2024年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　a を正の実数とし，$f(x)=x^2-2ax+4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C: y=f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$q>0$ とする。

(1) p，q の値を a を用いて表せ。また，$p>q$ であることを示せ。

(2) 放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3) (2) の S に対し，$S=\dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$　以下の問いに答えよ。

(1) t を $t>1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a) $x>\dfrac{1}{\sqrt{t}-1}$

(b) $x \geqq 2\log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式

$$x+1>2\log_t(x+1)$$

を示せ。

(2) $n \leqq 2\log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$　n を 2 以上の整数とする。それぞれ A，A，B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し，カードにもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し，抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ，n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また，作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n=6$ のとき，文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA などが不可で，文字列 BABAAB や BABABA などは可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n，作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n，作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

(1) p_2，q_2，r_2 をそれぞれ求めよ。また，p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1} を p_n，q_n，r_n を用いてそれぞれ表せ。

(2) $p_n+2q_n+2r_n$ を n を用いて表せ。

(3) $p_n+iq_n-(1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし，i は虚数単位である。

(4) $p_n=q_n$ を満たすための，n の必要十分条件を求めよ。

$\boxed{4}$　xyz 空間において，点 $\mathrm{P}_1(3,\ -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $\mathrm{P}_2(5,\ 0,\ -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

(3) (2) の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

$\boxed{5}$　$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，　$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$

とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ であること，および，自然対数の底 e が $2<e<3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を調べ，$y=f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leqq m<n$ を満たす整数 m，n の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

$$(*)\quad (2m-3)^n=(2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{6}$　xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2+y^2=1$ および円板 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする。$\mathrm{A}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする。xyz 空間内の平面 $H: z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(2) 円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta+h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3) 円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば，$\tan\dfrac{\theta}{2}=u$ とおく置換積分を用いてもよい。

2023年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 赤玉4個と白玉5個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A，Bの2人が，Aから交互に，袋から玉を1個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。Aが赤玉を取り出したらAの勝ちとし，その時点でゲームを終了する。Bが白玉を取り出したらBの勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2) このゲームにAが勝つ確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ。

(2) 正の整数 m に対して，$f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

$\boxed{3}$ s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) a_n を n と s を用いて表せ。

(2) ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする。s を m を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 実数 $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える。

(1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。α を極形式で表せ。ただし，$r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい。

(3) 設問 (2) の虚数 α に対して，$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 四面体OABCにおいて，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする。

$$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b}\cdot\vec{c} = 3$$

ただし $\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す。さらに，線分OCと線分ABは垂直であるとする。点Cから3点O，A，Bを含む平面に下した垂線をCHとし，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線をOKとする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ。

$\boxed{6}$ 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{4}{6x+1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で，傾きが1であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。

(2) 座標平面上の2点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。x が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分PQが通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。

2022 年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ。

(2) $K=99$ のとき，l，m，n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよ。

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

$\boxed{2}$　a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える。

(1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を α_1，α_2　$(\alpha_1<\alpha_2)$　とする。$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ。

(3) $f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$　正の整数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$　xy 平面の第 1 象限内において，直線 $\ell:y=mx$　$(m>0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y=tx$ $(t>0)$ を考える。また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし，$b>a$ とする。

(1) m を用いて t を表せ。

(2) t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ。

$\boxed{5}$　座標空間内において，ベクトル

$$\overrightarrow{a}=(1,\ 2,\ 1),\quad \overrightarrow{b}=(1,\ 1,\ -1),\quad \overrightarrow{c}=(0,\ 0,\ 1),$$

が定める 2 直線

$$\ell:s\overrightarrow{a},\qquad \ell':t\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\qquad (s,\ t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0,\ 0,\ 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ とおく。次に，点 $\mathrm{B}_1(t_1\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$ とおく。同様に，点 $\mathrm{A}_k(s_k\overrightarrow{a})$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$，点 $\mathrm{B}_k(t_k\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ から直線 ℓ に下ろした垂線を $\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}$ とする手順を繰り返して，点 $\mathrm{A}_n(s_n\overrightarrow{a})$，$\mathrm{B}_n(t_n\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ (n は正の整数) を定める。

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2) 極限値 $S=\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$，$T=\displaystyle\lim_{n\to\infty}t_n$ を求めよ。

(3) (2) で求めた S，T に対して，点 A，B をそれぞれ $\mathrm{A}(S\overrightarrow{a})$，$\mathrm{B}(T\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ とおくと，直線 AB は 2 直線 ℓ，ℓ' の両方と直交することを示せ。

$\boxed{6}$　半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と，半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき，直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

$\boxed{1}$　a，b を実数とする。曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

$\boxed{2}$　a，b を $0<a<1$，$0<b<1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え，辺 AB を $a:1-a$ に内分する点を P，辺 BC を $b:1-b$ に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とし，三角形 ABC の面積を S，三角形 PQR の面積を T とする。

(1) $\dfrac{T}{S}$ を a，b で表せ。

(2) a，b が $0<a<\dfrac{1}{2}$，$0<b<\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) p，q を 3 以上の整数とし，$a=\dfrac{1}{p}$，$b=\dfrac{1}{q}$ とする。$\dfrac{T}{S}$ の逆数 $\dfrac{S}{T}$ が整数となるような p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

$\boxed{3}$　正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 (∗) を満たすものの個数を求めよ。

(∗) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

$\boxed{4}$　座標平面において，次の条件 (∗) を満たす直線 ℓ を考える。

(∗) ℓ の傾きは 1 で，曲線 $y=x^3-2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さなものから順に P，Q，R とし，さらに線分 PQ の中点を S とする。

(1) 点 R の座標を $(a,\ a^3-2a)$ とするとき，点 S の座標を求めよ。

(2) 直線 ℓ が条件 (∗) を満たしながら動くとき，点 S の軌跡を求めよ。

(3) 直線 ℓ が条件 (∗) を満たしながら動くとき，線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

$\boxed{5}$　z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 O(0)，A(z)，B(z^2) について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O，A，B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

$\boxed{6}$　以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx$$

(2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x\,dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3) 不等式

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right|<10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2<e<3$ であることは証明なしに用いてもよい。

2020 年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ AB=1，AC=1，BC=$\dfrac{1}{2}$ である △ABC の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1) ∠BAC を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 s は $0 < s < 1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s : (1-s)$ に内分する点を P とするとき，AP^2+BP^2+CP^2 の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

$\boxed{2}$ a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$，直線 $L : -4x + 3y + a = 0$，直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 $\{$ P | 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{$ P | 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ n を正の整数，a，b を 0 以上の整数とする。

(1) $n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a，b，n の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ 白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉は手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1) 2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2) 3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。

(3) n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4) (3) の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

$\boxed{5}$ 実数 t に対して複素数 $z = \dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 絶対値 $\left| z - \dfrac{i}{2} \right|$ を求めよ。

(3) 実数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか。複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{6}$ 正の整数 m，n に対して実数 $A(m,n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m,n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n) = A(n,m),\quad A(m+2,n) + A(m,n+2) = A(m,n)$$

(2) $A(m,1)$ を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,n+2) = \frac{n+1}{m+1} A(m+2,n)$$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,n)$ は有理数であることを示せ。

$\boxed{1}$ xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直行するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ a を 1 ではない正の実数とし，n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a (x-n) > \frac{1}{2}\log_a (2n-x)$$

(1) $n=6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

(2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

$\boxed{3}$ a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a > 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

$\boxed{4}$ 実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1) $[2x^2+x+3]$，$[x^5-1]$，$[[2x^2+x+3][x^5-1]]$ をそれぞれ求めよ。

(2) 整式 $A(x)$，$B(x)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x\sin\theta+\cos\theta)^2] = x\sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$$[(ax+b)^4] = -1$$

$\boxed{5}$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1}(e^x - e^t + 1)f(t)dt$$

$\boxed{6}$ 10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに，袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき，取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m,\ k)$ とする。2 以上の整数 n に対して，以下の問いに答えよ。

(1) $p(n+1,\ 2)$ を $p(n,\ 2)$ と $p(n,\ 1)$ を用いて表せ。

(2) $p(n,\ 1)$ を求めよ。

(3) $p(n,\ 2)$ を求めよ。

2018 年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$，$D : y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a，b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a，b が (1) の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{2}$　n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする。箱の中に，1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている。この箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す，という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

$\boxed{3}$　整数 a，b は等式

$$3^a-2^b=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしているとする。

(1) a，b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ① を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

$\boxed{4}$　三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h=\dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle\mathrm{A}=2\alpha$，$\angle\mathrm{B}=2\beta$，$\angle\mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1) $h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して，$h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

$\boxed{5}$　α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2-\alpha z+2i=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 方程式 ① が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式 ① が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

$\boxed{6}$　xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。

2017 年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$ a, b を実数とする。$y = |x^2 - 4|$ で表される曲線を C とし，$y = ax + b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a，b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

$\boxed{3}$ a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が少なくとも一つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

$\boxed{4}$ s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s : 1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s : 3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

$\boxed{5}$ α，β，γ を複素数とし，

$$z\overline{z} + \alpha z + \beta\overline{z} + \gamma = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は

$$(\alpha - \overline{\beta})z - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{z} + \gamma - \overline{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ と仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

$\boxed{6}$ a，b，c を実数とし，

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad J(a,\ b,\ c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx \sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a \neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx\,dx$$

2016年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$ 鋭角三角形 △ABC において，頂点 A，B，C から各対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2) ∠ADE = ∠ADF であることを示せ。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立っていることを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に a，b，c とする。以下の問いに答えよ。

(1) a，b，c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) a，b，c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき，係数 a_0，$\cdots$，a_7 をすべて求めよ。

(2) $0 < \theta < \pi$ に対して

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (1) で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ にして，$k = 1,\ 2,\ 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき，$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し，$x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l の 1 点 O がある。さらに平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも点 O を通り l に垂直にとる。m，n 上にそれぞれ P，Q があり，

$$\mathrm{OP} = \sqrt{3},\ \mathrm{OQ} = 2,\ \mathrm{PQ} = 1$$

であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，PT$= t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t|\, dt$$

の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

2015 年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$　xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2+4y^2=1, \quad x>0, \quad y>0$$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし，P を通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$　xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする。また，P を D の点とする

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

$\boxed{3}$　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$　$a>0$ を実数とする。$n=1,2,3,\cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$\left(2n\pi,\ 0\right), \quad \left((2n+\frac{1}{2})\pi,\ \frac{1}{\{(2n+\frac{1}{2})\pi\}^a}\right), \quad \left((2n+1)\pi,\ 0\right)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx, \qquad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$　$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(t,\ \sqrt{3}t)$，を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$　$k\geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n>k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n=p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ の個数を求めよ。

$\boxed{1}$ $x = t + \dfrac{1}{3t}\left(0 < t \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする。

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ。

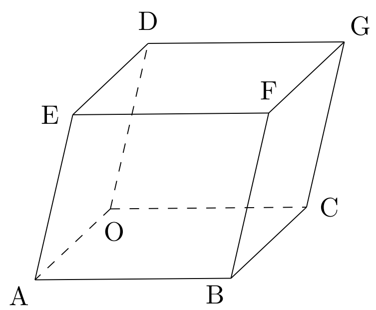
(2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{2}$ 下図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 平面にあり，O(0, 0, 0), A(2, 0, 0)，C(0, 3, 0)，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN$= 4$ かつ DN$<$GN を満たすように定める。

(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E，M，N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E，M，N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ。



$\boxed{3}$ 1，2，3，4，5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 不等式 $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする。P を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点，Q と R を円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の異なる 2 点とし，三角形 PQR は領域 D に含まれているとする。a，b を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ を表す 1 次変換により P は P$'$，Q は Q$'$，R は R$'$ に移されるとする。このとき，三角形 P$'$Q$'$R$'$ が領域 D に含まれるための a，b の必要十分条件を求めよ。ただし，三角形は内部も含めて考えるものとする。

$\boxed{5}$ 整数 n に対して，

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，$I_n - I_{n-1}$ を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。

$\boxed{6}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく。$x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

2013年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$ k を実数とする。3次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の3つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が1である3次式で，方程式 $g(x)=0$ の3つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1) $g(x)$ を k を用いて表せ。

(2) 2つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 四面体 OABC において，OA=OB=OC=1 とする。
$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ A，B の2人が，サイコロを1回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に6以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど2回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) A がちょうど2回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) A がちょうど3回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}d\theta,\ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) 一般項 b_n を求めよ。

(2) すべての n について，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

$\boxed{5}$ 2次の正方行列 A を $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ で定める。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を関係式

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，$x_0=1$，$y_0=0$ とする。

(1) A^4 を求めよ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=(E-A^{n+1})(E-A)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ。ただし，E は2次の単位行列とする。

(3) 原点 O から P_n までの距離 OP_n が最大となる n を求めよ。

$\boxed{6}$ 半径が1の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を1つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を2つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が $t\ (0\leqq t\leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。

$\boxed{1}$ s，t を実数をする。以下の問いに答えよ。

(1) $x = s + t + 1$，$y = s - t - 1$ とおく。s，t が，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) $x = st + s - t + 1$，$y = s + t - 1$ とおく。s，t が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$ m を実数とする。座標平面上で直線 $y = x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし，直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする。以下の問いに答えよ。

(1) 1 次変換 g を表す行列 A を求めよ。

(2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ。

(3) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 袋 A，袋 B のそれぞれに，1 から N までの自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1) $N = 4$ とする。袋 A，B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする。$X = 1$，$X = 2$，$X = 3$，$X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また，X の期待値を求めよ。

(2) $N = 3$ とし，n は自然数とする。袋 A，B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，それらのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。

$\boxed{4}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|\,t - x\,|}{1 + \sin|\,t - x\,|}\,dt$$

と定める。$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A，B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ。

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，$a_n < \alpha$ となることを示せ。

(4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leqq r \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

2011年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$ 実数 a に対し，不等式

$$y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を求めよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) X，Y を a を用いて表せ。

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 先生と 3 人の生徒 A，B，C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目が出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) 2 回目の操作が終わったとき，A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) 2 回目の操作が終わったとき，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3) 3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 平面上の長さが 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す。$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ $(0 < \theta < \pi)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ a を実数，z を 0 でない複素数とする。z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1) 次を満たす z を求めよ。

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

$\boxed{6}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする。f による点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ の像を P_1 とする。正の整数 n に対し，P_n の f による像を P_{n+1} とする。P_n が点 $\mathrm{Q}(10,\ 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ。

2010 年　東北大学理系　前期

$\boxed{1}$ $f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての x，y に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ a，b を正の実数とする。曲線 $C: y=x^3-a^2x+a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A，B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

$\boxed{3}$ 1，2，3，4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式

$$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$$

を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式

$$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$$

を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。

$\boxed{5}$ $0<t<3$ のとき，連立不等式

$$\begin{cases} 0\leqq y\leqq \sin x \\ 0\leqq x\leqq t-y \end{cases}$$

を表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。

$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ xy 平面において，原点を中心とし $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする。A を 2 次の正方行列とし，X の各頂点 $(x,\ y)$ に対して，行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 $(x',\ y')$ は X の辺上の点（頂点を含む）であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が行列 A で表す移動で P 自身に戻るとき，X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき，X の各頂点の X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また，そのときの行列 A を求めよ。