2024～1985年
新潟大学理系数学過去問

produced by Tokufumi Hiroi

$\boxed{1}$ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とする。曲線 $C:y=f(x)$ の点 $\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C と接線 ℓ は点 $\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)$ 以外に共有点を持たないことを示せ。

(4) 曲線 C，接線 ℓ，y 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面の原点をOとし，3点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(3\cos 3\theta,\ 3\sin 2\theta)$ をとる。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) AB^2，BC^2 を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ のとき，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$ の最大値と最小値を求めよ。
また，そのときの点Bと点Cの座標をそれぞれ求めよ。

$\boxed{3}$ 座標空間において，3点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ -2)$ の定める平面を α とし，方程式 $x^2+y^2+z^2+2x-10y+4z+21=0$ が表す球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心Pの座標と S の半径を求めよ。

(2) 実数 s，t に対して，点Dを $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすようにとる。
このとき，Dの座標を s，t を用いて表せ。

(3) 点Qが平面 α 上を動き，点Rが球面 S 上を動くとき，QとRの距離の最小値を求めよ。また，そのときのQとRの座標をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ n，k を自然数とする。n 個のボールと k 個の箱がある。各箱は箱1，箱2，$\cdots$，箱 k のように表すものとする。n 個のボールを k 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。n 個のボールを投げ入れた後，箱 i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に入っているボールの個数を a_i とする。このとき，$a_1+a_2+\cdots+a_k=n$ となる。次の問いに答えよ。

(1) $n=4$，$k=5$ とする。このとき，$a_1=0$ となる確率を求めよ。

(2) $k\geqq 2$ とする。このとき，$a_1\times a_2=0$ となる確率を n，k を用いて表せ。

(3) $k=4$ とする。このとき，$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\neq 0$ となる確率を p_n とする。
p_n の値を n を用いて表せ。

(4) $k=4$ とし，p_n を(3)で求めたものとする。このとき，$r>0$ で数列 $\{r^n(p_{n+1}-p_n)\}$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ a を $0<a<1$ となる実数とする。座標平面上において，長さ4の線分PQを考える。線分PQの端点Pは x 軸上を，端点Qは y 軸上を動くとき，線分PQを $a:(1-a)$ の比に内分する点Rの軌跡は楕円となる。この楕円を C とする。ただし，円は楕円の特別な場合とする。次の問いに答えよ。

(1) 楕円 C の方程式を a を用いて表せ。

(2) 楕円 C で囲まれた部分と連立不等式
$$\begin{cases} x\geqq 0 \\ \sqrt{3}ax\geqq(1-a)y \end{cases}$$
を表す領域の共通部分の面積を S とする。S を a を用いて表せ。

(3) 面積 S の最大値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 実数 t に対して，複素数 z を次の条件(I)，(II)を満たすようにとる。

(I) z の虚部は0以上である。

(II) $z^2-2t^3z+t^6+9t^2=0$

この z に対して，複素数 ω を $\omega=i\overline{z}$ とおく。ただし，i は虚数単位とし，$\overline{z}$ は z の共役複素数とする。次の問いに答えよ。

(1) 複素数 z と ω を t を用いて表せ。

(2) $0\leqq t\leqq 2$ のとき，$|\,z-\omega\,|$ の最大値を求めよ。また，そのときの t の値をすべて求めよ。

(3) 実数 t を動かしたとき，複素数平面上で z が表す点が描く曲線を C_1 とし，ω が表す点が描く曲線を C_2 とする。C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{1}$　a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a,\ 0)$，点 B を $(a,\ a^2)$，点 C を $(-1,\ 1)$，点 D を $(-1,\ 0)$ とし，曲線 E を $y = x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1)　S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2)　S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$　一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 PR の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle$SBR の値を求めよ。

(3)　四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\boxed{3}$　k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A = \{\ x \mid x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\ \}$$
$$B = \{\ x \mid x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\ \}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k = -1$ のとき，集合 A，B，$A \cap B$，$A \cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{4}$　a，b を正の数とし，座標平面上の曲線

$$C_1 : y = e^{ax}, \qquad C_2 : y = \sqrt{2x - b}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x - b}$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3)　(2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

$\boxed{5}$　複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，

$$\omega = -\frac{2(2z - i)}{z + 1} \quad (z \neq -1)$$

とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$z = i$ のときの ω の実部と虚部を求めよ。

(2)　z を ω を用いて表せ。

(3)　点 ω の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4)　$|\,\omega\,|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

$\boxed{6}$　座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2)　点 P が S 上を動くとき，$\triangle$ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1 + \sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2022年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 座標平面の原点をOとし，2点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形OAPBの面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標空間の原点をOとし，3点 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ -2)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-2,\ 2,\ 2)$ をとる。線分ABを $3:1$ に内分する点をD，線分ACを $3:1$ に外分する点をEとするとき，次の問いに答えよ。

(1) 2点D，Eの座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点Fを直線DE上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角 θ が $\cos\theta=\frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき，点Fの座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 式 A，B，C を次のように定める。

$$A=y^2-3x^2y+11xy+4y-3x^3+13x^2-5x-5$$
$$B=y^2+x^2y-5xy+4y+x^3-7x^2+11x-5$$
$$C=y+x-1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A，B，C を y の整式とみて，A，B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A>\log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$ 曲線 C を $y=x^2e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\int xe^x\,dx$，$\int x^2e^x\,dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t,\ 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど2本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3)で求めた t のうち $-1<t<0$ を満たすものを T とする。点 $(T,\ 0)$ を通る2本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ とし，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\overline{z}+\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$$

ただし，α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

(3) $|\,\beta\,|\leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき，$|\,z\,|$ の最大値を求めよ。また，そのときの β，z を求めよ。

$$z\overline{z}+(1-i+\overline{\beta})z+(1+i+\beta)\overline{z}=\beta$$

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x)=x^2$ とし，$a_1=10$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における法線と曲線 $y=f(x)$ の2つの交点を $(a_n,\ f(a_n))$，$(-a_{n+1},\ f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) すべての $n\geqq 1$ に対して

$$|\,a_n-\sqrt{n+99}\,|\leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

2021年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 正四面体 OABC において三角形 ABC の重心を D，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を E，線分 AC を 5 : 2 に外分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 点 G は点 E を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線上にある。点 H は点 F を通り $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な直線上にある。3 点 D，G，H が一直線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) (3) で求めた $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に対して，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標平面上の 2 点 A$(0,\ -1)$，B$(1,\ 2)$ を通る直線を ℓ とする。また，中心 $(3,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 $(x,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A，B，C，D，E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4) (3) で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ 実数 a と b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=4+\pi$$
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{4}{3}(4+\pi)$$

を満たすとき，a と b の値を求めよ。

(4) (3) で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\quad \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\quad \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0$$
$$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|\,z_2-z_1\,|$ を θ_1 を用いて表せ。

(2) $|\,z_3-z_1\,|$，$|\,z_4-z_1\,|$ を θ_1，θ_2，θ_3 を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|\,z_4-z_1\,||\,z_2-z_1\,|+|\,z_3-z_2\,||\,z_4-z_3\,|}{|\,z_2-z_1\,||\,z_3-z_2\,|+|\,z_4-z_3\,||\,z_4-z_1\,|}=\dfrac{|\,z_3-z_1\,|}{|\,z_4-z_2\,|}$ を示せ。

$\boxed{6}$ $a\geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$$

を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$

とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 四面体 OABC の辺 OA を $y:(1-y)$ に内分する点を D，辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E，辺 BC を $(1-y):y$ に内分する点を F とする。ただし，x，y は $0<x<1$，$0<y<1$ を満たすものとする。3 点 D，E，F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ および x，y を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\overrightarrow{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3) 辺の長さに関して，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立つとする。$\mathrm{OA}=h$，$\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=1:k$ として，線分 EG の長さを最小にする x の値を k を用いて表せ。また，そのときの線分 EG の長さを h と k を用いて表せ。

$\boxed{2}$ m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2) (1) で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3) 次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

　　方程式 $70x+130y=m$ は，x，y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

$\boxed{3}$ n を正の整数とする。3 種類の数字 1，2，3 を並べて，各位の数が 1，2，3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1) 各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。y_n+x_n，y_n-x_n および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2) 各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3) y_n，z_n は (1)，(2) で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして，次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

　　数列 $\left\{c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。

$\boxed{4}$ n を 0 以上の整数とし，次の式で I_n を定める。

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx,\quad I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 および I_2 の値を求めよ。

(2) $\dfrac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ の値を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\infty$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{5}$ 複素数で極形式で表したときの偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n=i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，$\cdots$，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1$ に対して，α_k を極形式で表せ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1$ に対して，$\alpha_k=\alpha_0\beta_k$ と $(\beta_k)^n=1$ を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3) $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1$ に対して，$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ とする。また，γ_k を表す複素数平面上の点を P_k とする。このとき，P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_{n-1} を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4) $n=6$ とし，(3) で求めた正 6 角形の頂点 P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_5 を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。

$\boxed{1}$ 座標空間において，1辺の長さが1の立方体 OABC-DEFG をなす8つの頂点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0) および D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 P$(s,\ 0,\ 1)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$，辺 CB 上に点 Q$(t,\ 1,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ をとり，3点 O，P，Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また，四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ および s，t で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s，t で表せ。また，U を s，t で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき，U の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの s，t の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 多項式 $P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ について，次の問いに答えよ。ただし，n は2以上の整数とする。

(1) $Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式 $Q(t)$ の定数項，t の係数および t^2 の係数は0であることを示せ。

(2) $P(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3) 方程式 $P(x)=0$ の整数解は1および -1 のみであることを示せ。

$\boxed{3}$ 平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし，$p>q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と4本の直線 AB，BC，CD，DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p，q および θ で表せ。

(3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2) で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S}{T}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 半径がそれぞれ a，b の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる。はじめに2点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の1周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 m，n の最大公約数を $\gcd(m,n)$ で表せ。

(1) a，b を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，a，b を用いて表せ。

(2) a，b を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで p，q は互いに素な自然数とし，s，t も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，p，q，s，t を用いて表せ。

(3) a，b は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき，$\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。

$\boxed{5}$ a は $-2<a<2$ をみたす定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+a\sin x\cos x}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおいて，$f(x)$ を t と a を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) $a=-1$ と $a=1$ の場合に，$u=\sin x-\cos x$ とおいて，置換積分法により定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

2018年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ OA$=\sqrt{7}$，OB$=\sqrt{5}$，AB$=\sqrt{6}$ の △OAB の外接円の中心を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{c}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ をみたす実数 s，t を求めよ。

(3) 点 O を座標平面上の原点にとり，点 A の座標を $(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点 B，C の座標をそれぞれ求めよ。ただし，点 B は第 1 象限にあるとする。

$\boxed{2}$ 袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 2 個の玉を同時に取り出す。次の問いに答えよ。

(1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率，白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ がある。ただし，t は正の実数である。また，線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $\ell : y=ax+b$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ が正方形 OABC の面積を 2 等分するとき，a を b を用いて表せ。

(2) 直線 ℓ が正方形 OABC を 2 等分し，さらに直角三角形 OAP の面積を 2 等分するとき，b を t を用いて表せ。

(3) $t\to+0$ および $t\to\infty$ のときの (2) で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$ 座標平面上の $x>0$ の領域において，2 つの曲線 $C_1 : y=\dfrac{\log x}{x}$ と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ を考える。ここで，k は正の実数である。曲線 C_1 と曲線 C_2 はただ 1 つの交点をもつので，その x 座標を a とする。a が $1<a<e$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x=1$ および直線 $x=e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$$

の和を求めよ。

$\boxed{1}$ 式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1) $(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2) $(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3) $(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標空間の次のような 4 点 A，B，C，D を考える。A の座標は $(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3 点 B，C，D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある。
さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 点 B，C，D の座標を求めよ。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。
点 H の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3) 不等式 $a_n > 1-10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\boxed{4}$ t は $t>\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2+4y^2=1$ が与えられている。点 $\mathrm{P}(-1,\ -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l，その接点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とする。また，x 軸，y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は，$ax+4by=1$ であることを示せ。

(2) a，b を，それぞれ t を用いて表せ。

(3) 面積 $S(t)$ を，t を用いて表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)=xe^{1-x^2}$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。
必要があれば

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-x^2}=0$$

が成り立つことを用いてよい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3) S_k を，k を用いて表せ。

(4) 次の条件 (＊) を満たす最小の自然数 n を求めよ。
(＊) すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ。

2016年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 整式 $P(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $P(x) = 0$ の実数解を求めよ。

(3) $Q(x)$ を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1) = P(1),\quad Q(-1) = P(-1)$$
$$Q(2) = P(2),\quad Q(-2) = P(-2)$$

をすべて満たす $Q(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$OAB において，OA$=5$，OB$=6$，AB$=7$ とする。t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を P，辺 OB を $1 : t$ に外分する点を Q，辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱に中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了とする。ただし各カードには必ず 3，5，10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに，カードを取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

$\boxed{4}$ a を $0 < a < 1$ を満たす実数のとして x の関数 $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，必要があれば

$$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$$

が成り立つことを用いてよい。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) a の関数 $y = M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) a の関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。

$\boxed{5}$ 一般項が $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

$\boxed{1}$ 整数 a に対して $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x) = 0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とする。

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 5, \qquad 4\overrightarrow{\mathrm{AG}} + 3\overrightarrow{\mathrm{BG}} + 5\overrightarrow{\mathrm{CG}} = 12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$ および $\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点 A$(a,\ b)$ とし，$f(x) = (x-a)^2 + b$ とする。点 B$(0,\ -2)$ から放物線 $y = f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接線をそれぞれ P$(p,\ f(p))$，Q$(q,\ f(q))$ とする。ただし，$p < q$ である。放物線 $y = f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2) 面積 S を b を用いて表せ。

(3) 点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める。

(i) $a_1 = 0$，$a_2 = 3$

(ii) 3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n = a_{n-1} - 1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n = a_{n-1} + 6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。

$\boxed{5}$ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad （n \text{ が偶数のとき}）$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad （n \text{ が 3 以上の奇数のとき}）$$

次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，$0 < x \leqq 1$ のとき $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{x^4}{4!} \leqq f_1(x) - \cos x \leqq \frac{x^4}{4!}$$

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \leqq f_{2m-1}(x) - \cos x \leqq \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m \to \infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

$\boxed{1}$　a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos\theta - \sin\theta) + 1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$t = \cos\theta - \sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を $a,\ t$ を用いて表せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{2}$　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P とし，線分 CP を 3 : 1 に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。
このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}| : |\overrightarrow{\mathrm{RC}}|$ を求めよ。

(3)　$\triangle$OQR の面積を求めよ。

$\boxed{3}$　$a,\ b,\ c$ を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ は
$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(2)　A は逆行列をもつことを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，A^n を求めよ。

(4)　自然数 n に対して，$\left(A + 6A^{-1}\right)^n$ を求めよ。

$\boxed{4}$　関数 $f(x) = (-4x^2 + 2)e^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　a を $a \geqq 0$ となる実数とし，$I(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-x^2}dx$ とする。
このとき，定積分 $\displaystyle\int_0^a x^2 e^{-x^2}dx$ を $a,\ I(a)$ を用いて表せ。

(3)　曲線 $y = f(x)$，x 軸，y 軸および直線 $x = 5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$　自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2}dx$ とおく。
このとき，次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，不等式

$$\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx - a_n \right| \leqq \frac{1}{2n+3}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 正の実数 a, b に対して，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} ax + y \leqq 6 \\ 0 \leqq x \leqq b \\ 0 \leqq y \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) $a = \dfrac{3}{2}, b = 3$ であるとする。点 P (x, y) が領域 D 内を動くとき，$5x + 2y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(2) $a = 1, b = 9$ であるとする。点 P (x, y) が領域 D 内を動くとき，$2x + y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(3) $ab = 9$ であり，点 P (x, y) が領域 D 内を動くときの $2x + y$ の最大値が 16 であるとする。このとき，a, b の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B，C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2) 面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3) 線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{3}$ a を実数とし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\dfrac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$ は $A^3 = -a^2E$ を満たすとする。 次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$ を求めよ。

(3) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2011} + A^{2012} + A^{2013}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 平面上の 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり，また平行でないとする。次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して，不等式

$$0 < \left|\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}\right|^2 \leqq (1+t)^2$$

が成立することを示せ。

(2) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して $\overrightarrow{p} = \dfrac{2t^2\,\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}\right|^2}$ とおき，$f(t) = |\overrightarrow{p}|$ とする。このとき，不等式

$$f(t) \geqq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

が成立することを示せ。

(3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。

$\boxed{5}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし，さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

$\boxed{1}$　平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって定められる点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に移す移動を考える。ここで，a は実数とする。楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられているとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は円 $D : X^2 + Y^2 = 1$ 上を動くとする。このとき a の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ は直線 $l : Y = pX + q$ 上を動くとする。ただし $p,\ q$ は実数とする。このとき a および $p,\ q$ の値を求めよ。

(3) (2) において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が楕円 C 上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の X の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $k,\ n$ は不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数とする。このとき，

$$2^{k-1} n(n-1)(n-2) \cdots\cdots (n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して，$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{9}{19} < \log_{10} 3 < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$　a を実数とし，xy 平面において，２つの放物線

$$C : y = x^2,\quad D : x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $p,\ q$ を実数として，直線 $l : y = px + q$ が C に接するとき，q を p で表せ。

(2) (1) において，直線 l がさらに D にも接するとき，a を p で表せ。

(3) C と D の両方に接する直線の本数を，a の値によって場合分けして求めよ。

$\boxed{4}$　箱の中に１から９までの異なる整数が１つずつ書かれたカードが９枚入っている。「箱からカードを１枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を３回繰り返す。記録された３つの整数の最小値を m，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1) $5 < m$ となる確率および $M < 5$ となる確率を求めよ。

(2) $m \leqq 5 \leqq M$ となる確率を求めよ。

(3) $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ に対して，$m \leqq k \leqq M$ となる確率を $p(k)$ とする。$p(k)$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{5}$　次の問いに答えよ。

(1) 実数 $x \geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqq \log(1+x) \leqq x$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x)dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

2011 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　A^2, A^3 を求めよ。

(2)　$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(3)　$A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ を求めよ。

$\boxed{2}$　数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上の正の向きまたは負の向きにそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で指定された長さを移動するものとする。n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_1, p_2 を求めよ。

(2)　動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

(3)　動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

$\boxed{3}$　$\triangle$OAB において，OA $=1$，OB $=$ AB $=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\angle$AOB の二等分線上の点 P が AP $=$ BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

$\boxed{4}$　関数

$$f(t)=\begin{cases} t & (0\leqq t\leqq \pi)\\ 2\pi-t & (\pi<t\leqq 2\pi)\end{cases}$$

に対して，次のように 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ で定義する。

$$g(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t+x)dt,\quad h(x)=\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t+x)dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$, $h(x)$ を求めよ。

(2)　x が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，関数 $y=g(x)+h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$　実数 a, b, c に対して，3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ。

$\boxed{1}$　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=3$, $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$ である。また，点 P は辺 AB を $x:1-x$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y:1-y$ に内分する（$0<x<1$, $0<y<1$）。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ として、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, x, y で表せ。

(3) 2 点 P，Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の条件 (ア)〜(ウ) を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア)　$p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。
(イ)　$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ はどれも自然数である。
(ウ)　$p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ の中にはすべての自然数 k が現れ，その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件 (ア)〜(ウ) を満たし，すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\ 個},\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 項数 5 の数列で，数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。

$\boxed{3}$　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & d\end{pmatrix}$ は，ある実数 k に対して等式 $A^2=kA$ を満たす。

このとき，次の問いに答えよ。ただし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。

(1) k と d の値を求めよ。

(2) 実数 b と c が等式

$$(E+bA)(E+2A)=E+cA$$

を満たすとき，c を b で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が任意の自然数 n に対して等式

$$(E+2A)^n=E+a_nA$$

を満たすとき，a_n を n で表せ。

$\boxed{4}$　$F(x)=\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+e^{2t}}\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。
ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおいて，$F(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}$ を求めよ。

$\boxed{5}$　座標平面上の 4 点を A(1, 1)，B(1, 2)，C(2, 2)，D(2, 1) とする。点 A に駒をおき，1 個のさいころを投げて，出た目の数だけこれらの点の上を時計回りに駒を進める試行を考える。たとえば，出た目が 5 のとき，駒は A → B → C → D → A → B と進み B に止まる。1 回目の試行で止まる点を P とし，駒を点 A に戻し，2 回目の試行で止まる点を Q とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

(1) O，P，Q が同一直線上にある確率を求めよ。

(2) O，P，Q を通る 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフがただ一通りに定まるとき，P，Q の位置およびその 2 次関数をすべて求めよ。

(3) (2) で 2 次関数がただ一通りに定まるとき，その 2 次関数の最大値を X とし，そうでないとき $X=0$ とする。このとき，X の期待値を求めよ。

2009 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ a を定数、e を自然対数の底とする。曲線 $C : y = xe^{-x}$ と直線 $l : y = ax$ は、$x \geqq 0$ の範囲で、原点 O 以外の点 P$(p,\ pe^{-p})$ で交わる。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点 P における接線の傾きを $h(a)$ とするとき、$h(a)$ が最小となる a の値と、そのときの $h(a)$ の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a の値について、$0 \leqq x \leqq p$ の範囲で、曲線 C と直線 OP とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ a は実数で、行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。B は 2 次の正方行列で、$AB = BA,\ P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} と行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) a の値と、行列 B を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、行列 $(A+B)^n$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $-\pi < \theta < \pi$ とするとき、次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \cos\frac{\theta}{2},\quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a_n = \cos\dfrac{\theta}{2^n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $2^n \times \sin\dfrac{\theta}{2^n} \times \cos\dfrac{\theta}{2} \times \cos\dfrac{\theta}{2^2} \times \cos\dfrac{\theta}{2^3} \times \cdots\cdots \times \cos\dfrac{\theta}{2^n} = \sin\theta\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $b_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots\cdots \times a_n\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。$\theta \neq 0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を θ を用いて表せ。

$\boxed{4}$ n を 3 以上の整数とし、1 から n までのすべて異なる整数が 1 つずつ書いてある n 枚のカードをよく切って横 1 列に並べ、左から 1 番目のカードに書いてある数字を x とする。

　左から 3 番目までのカードに書いてある数字の中で x が最大のとき、x が得点として与えられ、それ以外の場合の得点は 0 である。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 得点が x である確率を p_x とするとき、p_x を n と x を用いて表せ。

(2) 得点が 0 である確率を p_0 とするとき、p_0 の値を求めよ。

(3) 得点の期待値を n を用いて表せ。

$\boxed{5}$ 点 A$(0,\ a)$ を中心とする円と、曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ は 1 点 B$\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ のみを共有する。このとき、次の問いに答えよ。

(1) a を b を用いて表せ。

(2) 点 A が y 軸上を動くとき、線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ。

2008 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　長方形 ABCD に対して，それぞれの辺の長さを

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 1, \quad \mathrm{BC} = \mathrm{DA} = t, \quad 0 < t < 1$$

とする。辺 AB 上の点 P および辺 BC 上の点 Q を，点 C と点 P が 2 点 D，Q を通る直線に関して対称になるようにとる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{a}\ (0 < x < 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = y\overrightarrow{b}\ (0 < y < 1)$$

とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DP}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, x, y$ で表せ。

(2) x, y を t で表せ。

(3) $x = \dfrac{3}{5}$ のとき，t および y を求めよ。

$\boxed{2}$　A は $A \neq E, A \neq O$ かつ $A^2 = A$ をみたす 2 次正方行列とする。
ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，
次の問いに答えよ。

(1) 実数 t に対して，積 $(A - tE)\{A - (1-t)E\}$ および $\{A - (1-t)E\}(A - tE)$ を求めよ。

(2) 行列 A および $A - E$ はともに逆行列をもたないことを示せ。

(3) $A - tE$ が逆行列をもつための t に対する必要十分条件を求めよ。
また，t がその必要十分条件をみたすとき，逆行列 $(A - tE)^{-1}$ を求めよ。

$\boxed{3}$　定数 $c > 0$ に対して，楕円

$$\frac{1+c}{c}x^2 + (1+c)y^2 = 1$$

を E_c で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 楕円 E_c は直線 $x + y = 1$ に接することを示し，接点の座標を求めよ。

(2) 正の実数 a, b に対して，楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ が直線 $x + y = 1$ に接するとき，a と b の関係式を求め，ab 平面にそのグラフをかけ。また このとき，楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ は楕円 E_c の形に表せることを示せ。

$\boxed{4}$　座標平面上で，不等式 $y \leqq -ax^2 + b$ の表す領域を A とし，
不等式 $x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を B とする。ただし，
$a > \dfrac{1}{2}$ かつ $b > 0$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = -ax^2 + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を a, b で表せ。

(2) B が A に含まれるための必要十分条件は，$b \geqq \dfrac{1+4a^2}{4a}$ であることを示せ。

(3) B が A に含まれるとき，(1) で求めた面積 S が最小となる a, b およびそのときの S を求めよ。

$\boxed{5}$　n を $n \geqq 2$ である自然数とする。関数

$$f_n(x) = x^n \log x, \quad x > 0$$

について，次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。
必要ならば，x を右側から近づけたときの極限値について

$$\lim_{x \to +0} x^k \log x = 0$$

がすべての自然数 $k \geqq 1$ に対して成り立つことを利用してもよい。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} f_n'(x) = 0$ を示せ。

(2) 関数 $y = f_n(x)$ の増減，グラフの凹凸を調べ，グラフをかけ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 \int_{e^{-\frac{1}{n}}}^{1} f_n(x)dx$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 平行四辺形 ABCD において，対角線 BD の中点を E，
辺 AD を 3 : 2 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{d}$
とするとき，次の問いに答えよ。

(1) △BCD の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d}$ で表せ。

(2) 直線 AE と直線 BF の交点を S とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{d}$ で表せ。

(3) 線分 AC の長さが 36 のとき，線分 SG の長さを求めよ。

$\boxed{2}$ $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，以下の問いに答えよ。

(1) 15^{15} は何桁の整数であるか。

(2) m, n は正の整数で $100m > 106n$ をみたしているとき，
不等式 $8^m > 9^n$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある。辺 OB の中点を M とし，
点 P は辺 OC 上を動くものとする。線分 OP の長さを t とするとき，
次の問いに答えよ。

(1) AP^2, PM^2 を t で表せ。

(2) $\angle\mathrm{PAM} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ を t で表せ。

(3) △AMP の面積を t で表せ。

(4) △AMP の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ a を正の実数とし，$x \geqq 0$ で定義された関数

$$f(x) = a\sqrt{x}e^{-\frac{ax}{2}}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた部分を，
x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ。

(3) $0 < a_1 < a_2$ のとき，$V(a_1) < V(a_2)$ となることを示せ。

$\boxed{5}$ 座標平面において，直線 $y = x$ に関する対称移動を表す行列を A，
原点のまわりの -90° の回転移動を表す行列を B とする。このとき，
次の問いに答えよ。ただし，E は単位行列である。

(1) 行列 A, B を求めよ。

(2) $A^m = E$, $B^n = E$ となる最小の正の整数 m, n をそれぞれ求めよ。

(3) $ABA = B^k$, $AB^2A = B^l$ をみたす最小の正の整数 k, l をそれぞれ求めよ。

(4) BA, B^2A, B^3A をそれぞれ AB^s $(s = 1, 2, 3)$ の形で表せ。

2006 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 曲線 $y=2x^3-12x$ を C とし，点 $(1,\ -2)$ を通る C の接線を l とする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) C と l で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$-A　新課程用

四角形 ABCD は $\angle\mathrm{B}=120^\circ$，CD=DA=AC を満たしているものとする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) AB $<$ BD であることを示せ。

(2) 線分 BD 上に AB=BE となる点 E をとるとき，$\angle$BAE の大きさを求めよ。

(3) AB+BC=BD であることを示せ。

$\boxed{2}$-B　旧過程用

α を 0 でない複素数とする。複素数平面上において，複素数 z は $\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}=1$ を満たしながら動くものとする。複素数 $\omega_1=\alpha z$ を表す点が描く図形を C_1，複素数 $\omega_2=\dfrac{\alpha}{z}$ を表す点が描く図形を C_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{z}$ はそれぞれ α，z に共役な複素数を表すものとする。

(1) C_1 は実軸上の点 $\dfrac{1}{2}$ を通り虚軸に平行な直線であることを示せ。

(2) C_2 は点 α^2 を中心とする半径 $|\,\alpha\,|^2$ の円周から 1 点 0 を除いたものであることを示せ。

(3) C_1 と C_2 がただ 1 点のみを共有するとき，$\alpha+\overline{\alpha}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a-20 & 25 \\ -16 & a+20 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について，
次の問いに答えよ。ただし，a は実数である。

(1) P の逆行列 P^{-1} および Q の逆行列 Q^{-1} をそれぞれ求めよ。

(2) $C=P^{-1}AP$，$D=Q^{-1}BQ$ とおくとき，行列 C，D をそれぞれ求めよ。

(3) C，D を (2) で求めた行列とする。等式 $CX=XD$ を満たす行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で，零行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と異なるものが存在するとき，a の値を求めよ。ただし，x，y，z，w は実数である。

$\boxed{4}$ 四面体 OABC において，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。
頂点 A から，3 点 O，B，C を通る平面に下ろした垂線を AH とし，
点 H から直線 OB に下ろした垂線を HD とする。辺 OA，OB，OC
の長さをそれぞれ a，b，c として，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を，それぞれ a，b，c で表せ。

(2) 線分 OH は $\angle$BOC を 2 等分することを示せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であることを示せ。さらに線分 OD および OH の長さをそれぞれ a で表せ。

(4) 四面体 OABC の体積を a，b，c で表せ。

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

(2) $x\geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x\log x\geqq(x-1)\log(x+1)$$

(3) 整数 n $(n\geqq 3)$ に対して，不等式 $(n!)^2>n^n$ が成り立つことを示せ。

2005 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　i を虚数単位とし，複素数平面上で $4i$，$-2i$ を表す点をそれぞれ A，D とする。点 D を中心として点 A を 90° だけ回転した点を B，点 A を中心として点 B を 90° だけ回転した点を C とする。$\alpha = 4i$ とし，β，γ はそれぞれ点 B，C が表す複素数とする。複素数 z に対して，$T = |z-\alpha|^2 + |z-\beta|^2 + |z-\gamma|^2$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　β，γ，および $\alpha+\beta+\gamma$ の値を求めよ。

(2)　T を $|z|$ で表せ。

(3)　点 z が $|z-(3+4i)| = 1$ を満たしながら動くとき，T の最大値とそのときの点 z を求めよ。

$\boxed{2}$　点 O を中心とし半径 1 の円の円周を S とする。三角形 ABC は，すべての頂点が S 上にあり，辺 BC 上に点 O がなく，AB:AC=3 : 2 を満たすとする。点 D は辺 BC の点 C の方への延長線上で BC:CD=1 : k の位置にあるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k で表せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $\vec{a}\cdot\vec{c}$ で表せ。

(3)　点 A における S の接線が点 D を通るとき，k の値を求めよ。

$\boxed{3}$　2 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ と $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通る放物線 $y=-ax^2+bx+c\ \ (a>0)$ と x 軸で囲まれる領域の面積を S とする。このような放物線のうちで，S を最小にするものを求めよ。また，そのときの S の値を求めよ。

$\boxed{4}$　a，b，c，d を実数とし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $ad-bc=1$ を満たし，E の実数倍ではないとする。$p=a+d$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　等式 $A^2 = pA - E$ を証明せよ。

(2)　$A^3 = E$ となるとき，p の値を求めよ。

(3)　$p^2+p-1=0$ は，$A^5=E$ であるための必要十分条件であることを示せ。

$\boxed{5}$　e を自然対数の底とし，t は $-1 \leqq t \leqq e$ を満たすとする。x，y に関する連立不等式

$$\begin{cases} (y-e^{-x})(y-t) \leqq 0 \\ -1 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の領域の面積を $S(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

(2)　$S(t)$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{6}$　曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ を C とする。点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は第 4 象限にあり，点 P を通る C の接線を m_1，m_2 とし，C との接点の x 座標をそれぞれ x_1，x_2 とする。ただし，$x_1 < x_2$ となるように m_1，m_2 を定める。m_1，m_2 と y 軸との交点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}(0,\ y_1)$，$\mathrm{Q_2}(0,\ y_2)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　x_1，x_2 を a，b で表せ。

(2)　三角形 $\mathrm{Q_1PQ_2}$ の面積が 4 であるように点 P が動くとき，点 P の軌跡を求めよ。

2004年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　座標平面上に，原点 O(0, 0)，点 A(1, 0)，点 B(0, 1) をとる。さらに 2 点 $\mathrm{P_1}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{P_2}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ をとる。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする。S_1 を $\theta > 0$ のとき $\triangle \mathrm{AP_1O}$ の面積，$\theta = 0$ のとき 0 とする。また，S_2 を $\theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\triangle \mathrm{BP_2O}$ の面積，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき 0 とする。$S = S_1 + \dfrac{1}{2}S_2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　S を $\sin\theta$ で表せ。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$　曲線 $x = 10e^{-y}$ の $0 \leqq y \leqq 4$ の部分と x 軸の $0 \leqq x \leqq 10$ の部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる容器を考える。x 軸の $0 \leqq x \leqq 10$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる面が容器の底である。この容器の中に，容器の底を水平にして，毎秒 2 の割合で水を注ぐ。注ぎ始めてから t 秒後の水面の高さを $h(t)$ とする。$h(0) = 0$ である。はじめて $h(t) = 4$ となる t を T(秒) とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　T を求めよ。

(2)　$0 \leqq t \leqq T$ における $h(t)$ を求めよ。

(3)　$0 < t < T$ における水面の上昇速度 $h'(t)$ を求めよ。

$\boxed{3}$　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とする。辺 AB 上に，A，B と異なる点 P をとり，線分 AM と線分 CP の交点を Q とする。$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$k = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，k で表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ を k で表せ。

(3)　$\triangle \mathrm{APQ}$ が二等辺三角形となるとき，k を求めよ。

$\boxed{4}$　α，β は異なる複素数とし，複素数平面上で α，β を表す点をそれぞれ A，B とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　複素数 z が $|\ z\ | = |\ z-1\ |$ を満たすとき，$z + \overline{z} = 1$ であることを示せ。

(2)　複素数 z が $|\ z-\alpha\ | = |\ z-\beta\ |$ を満たすとき，

$$\left|\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha} - 1\right|$$

であることを示せ。

(3)　線分 AB の垂直二等分線と A を中心とする半径 $2|\beta-\alpha|$ の円との共有点が表す複素数を α，β で表せ。

$\boxed{5}$　$x > 0$ において定義された関数 $y = f(x) = x(1+\log x)$ のグラフを C とする。また，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における C の接線 l の方程式を $y = g(x)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)$ を求めよ。

(2)　$x > 0$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であることを示せ。

(3)　2 直線 $x = 1$，$x = 2$ と曲線 C および接線 l で囲まれた面積 $S(t)$ を求めよ。

(4)　t が $t > 0$ の範囲を動くとき，面積 $S(t)$ が最小となる t を求めよ。

$\boxed{6}$　a，b を整数とする。行列 A，B を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

と定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$A+B$ は逆行列 $(A+B)^{-1}$ をもつことを示せ。

(2)　$(A+B)^{-1}$ のすべての成分が整数となるとき，$A-B$ は逆行列 $(A-B)^{-1}$ をもつことを示せ。

(3)　$(A+B)^{-1}$ と $(A-B)^{-1}$ のすべての成分が整数となるような a と b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

$\boxed{1}$ 関数 $y=x^2$ のグラフ C と，定点 A$(0,\ a)$ $(a>0)$ を通り傾き t の直線 l との交点を P，Q とする。また，点 A を通り直線 l に垂直な直線 m と，曲線 C との交点を R，S とする。ここで，t は正の実数とし，P と R の x 座標は正，Q と S の x 座標は負であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) PQ^2 と RS^2 を a と t を用いて表せ。

(2) $u=t^2+\dfrac{1}{t^2}$ とおき，四角形 PSQR の面積を T とするとき，T^2 を u を用いて表せ。

(3) 直線 l の傾き t が正の実数全体を動くとき，面積 T の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ とし，E は 2 次の単位行列とする。また，P と Q は 2 次の正方行列で $A=2P+3Q$，$P+Q=E$ を満たしているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P と Q を求めよ。

(2) $P^2=P$，$Q^2=Q$ を示し，PQ と QP を求めよ。

(3) A の逆行列を $aP+bQ$ と表したとき，実数 a と b を求めよ。

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ。

$\boxed{3}$ 1 辺の長さが r の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，三角形 ABC の重心を G とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を示せ。

(3) 線分 OG を $3:1$ に内分する点を H とするとき，OH=HA を示し，この値を求めよ。

(4) $\angle\mathrm{OHA}$ を θ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(\cos x+\sin x)$ に対して，$f(x)=0$ の正の解を小さい方から順に $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_n を求めよ。

(2) $a_n \leqq x \leqq a_{n+1}$ の範囲で，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ の和を求めよ。

$\boxed{5}$ 点 P は数直線上を原点から出発して，投げたサイコロの目が 1，2，3 または 4 なら正の向きに進み，5 または 6 なら負の向きに 1 進むとする。点 P の座標を x として，サイコロを n 回投げたとき，$x=15$ となる確率を p_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) n 回中，5 または 6 の目が k 回出る確率を n と k を用いて表せ。ただし，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ とする。

(2) p_9 と p_{10} を求めよ。

(3) $n\geqq 9$ とするとき，p_n を求めよ。

$\boxed{6}$ p と q は相異なる実数とし，整式 $P(x)=x^3+px+q$ と $Q(x)=x^3+qx+p$ は共通因数 $R(x)$ をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $R(x)$ は 2 次式ではないことを示せ。

(2) r を実数として，$R(x)=x+r$ とする。p と q の関係および r の値を求めよ。

(3) $p=0$ のときを考える。整式 $S(x)$ は $P(x)$ と $Q(x)$ で共に割り切れる整式のうち次数が最小で，最高次数の項の係数が 1 であるとする。このような $S(x)$ を求めよ。

2002 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 上の異なる 2 点 P，Q における接線が直交するとし，P の座標を $\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ $(a>0)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標，および，P と Q を結ぶ直線 l の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ と直線 l で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$　$A^2+A+E=O$ を満たす 2 次の正方行列 A について，次の問いに答えよ。ただし，E，O はそれぞれ単位行列，零行列とする。

(1) $\alpha A+\beta E=O$ を満たす実数 α，β が存在するならば，$\alpha=\beta=0$ となることを示せ。

(2) $(xA+yE)^3=E$ を満たす実数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$　2 次関数 $f(x)=x^2+(k-1)x+3k-2$ （k は実数) について，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2) $x=u+iv$ $(u, v$ は実数) が 2 次方程式 $f(x)=0$ の虚数解のとき，u と v の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) k が 0 以上のすべての実数値をとるとき，2 次方程式 $f(x)=0$ の解 (実数解および虚数解) すべての集合を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$　袋の中に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている。3 個を同時に袋から取り出し，取り出された赤玉の個数を記録してから袋に戻す。この試行を n 回くり返したとき，記録された赤玉の個数の合計が奇数である確率を p_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p_1 を求めよ。

(2) p_{n+1} を p_n で表せ。

(3) p_n を求めよ。

$\boxed{5}$　次の問いに答えよ。ただし，数値はすべて 10 進法とする。

(1) 7^{12} の 1 の位を求めよ。

(2) n が自然数のとき，117^n の 1 の位は 1，3，7，9 のいずれかであることを証明せよ。

(3) 117^{2002} の 1 の位を求めよ。

$\boxed{6}$　座標平面上の 2 定点 A$(\sqrt{2},\ 0)$，B$(-\sqrt{2},\ 0)$ に対し，条件 PA·PB=2 を満たして動く点 P$(x,\ y)$ を考える。

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{4},\ r>0\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $r^2=4\cos 2\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ。また，このときの点 P の座標を求めよ。

2001 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 2 つの 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=px^2+qx+r$ が $f(-1)=g(-1)=0$，$f(2)=g(2)=3$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b を c で表せ。

(2) $c<r$ のとき，$-1<x<2$ を満たす x に対して，$f(x)<g(x)$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ 平行四辺形 ABCD において，4 辺 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 E，F，G，H を HF // AB，EG // BC となるようにとり，2 直線 EF と AC の交点を M，2 直線 HG と AC の交点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=p\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=q\vec{b}$ とおくとき，$\frac{1}{2}<p<1$，$\frac{1}{2}<q<1$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+s\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+t\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ とするとき，s，t を p と q で表せ。

(3) 2 点 M，N は一致することを示せ。

$\boxed{3}$ O を原点とする xy 平面上に，定点 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ と 2 つの動点 P，Q がある。点 Q は P を中心とする半径 1 の円周上を，点 $(3,\ 0)$ から出発して反時計回りに毎秒 2π の速さで等速回転している。さらに，点 P は O を中心とする半径 2 の円周上を，点 $(2,\ 0)$ から出発して反時計回りに毎秒 π の速さで等速回転している。このとき，次の問いに答えよ。

(1) t 秒後の AQ の長さを $f(t)$ とするとき，$f(t)$ を求めよ。

(2) 動点 P が O のまわりを 1 回転するまでの間で，$f(t)$ が最大，最小となる t とそのときの $f(t)$ を求めよ。

(3) $f(t)$ が初めて最小となるまでに，動点 Q が動いた道のりを求めよ。

$\boxed{4}$ -1 と異なる複素数 z に対し，複素数 w を $w=\dfrac{z}{z+1}$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) z が複素数平面の虚数軸を動くとき，w が描く図形を求めよ。

(2) z が複素数平面の円 $|\,z-1\,|=1$ の上を動くとき，w が描く図形を求めよ。

$\boxed{5}$ 2 つの楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 4 つの交点の座標を求めよ。

(2) 2 つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

$\boxed{6}$ n を自然数とするとき，等式 $\dfrac{1}{1-t^2}=1+t^2+t^4+\cdots+t^{2n-2}+\dfrac{t^{2n}}{1-t^2}$ の両辺を，区間 $[0,\ 1]$ $(0<x<1)$ で積分すると，

$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$$

となる。これについて，次の問いに答えよ。

(1) $0<x<1$ のとき，

$$0<\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}dt<\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

となることを示せ。

(2) $0<x<1$ のとき，無限級数

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

の和を求めよ。

2000 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　$a,\ b$ は実数で，$a>0$ とする。座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$ をとる。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PAB}, \triangle\mathrm{P'BA}$ は，それぞれ $\angle\mathrm{P},\ \angle\mathrm{P'}$ を直角とする直角二等辺三角形とする。
$\mathrm{P}(c,\ d)$, $\mathrm{P}(c',\ d')$ として，点 P と P′ の座標をそれぞれ求めよ。ただし，$c>c'$ とする。

(3) $a=1$ として，b が $-10 \leqq b \leqq 10$ の範囲を動くとき，点 P と P′ の軌跡をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$　2 次方程式 $x^2+2x+4=0$ の解のうち，虚部が正のものを β とする。
また，$n=0,1,2,\cdots$ に対して，β の n 乗 β^n の実部を a_n とし，虚部を
b_n とする。さらに，実数 $h,\ k$ を定数とし，$n=0,1,2,\cdots$ に対して，
$c_n=ha_n+kb_n$ で，数列 $\{c_n\}$ を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，β^n を極形式で表せ。

(2) $n=0,1,2,\cdots$ に対して，$c_{n+2}+2c_{n+1}+4c_n=0$ が成り立つことを示せ。

(3) $c_0=0,\ c_1=1$ となるように，定数 $h,\ k$ を定めよ。またそのときの
$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$　関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}\ \ (x \geqq 0)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求めよ。

(2) 関数 $S(t)=\displaystyle\int_{t-1}^{t+1} f(x)dx\ \ (t \geqq 1)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$　実数 $a,\ b$ を正の定数，実数 β を $0<\beta<\pi$ を満たす定数とする。
だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ と
$\mathrm{Q}(a\cos(\theta+\beta),\ b\sin(\theta+\beta))$ を通る直線を ℓ とし，$\mathrm{P'}(a\cos\theta',\ b\sin\theta')$ と
$\mathrm{Q'}(a\cos(\theta'+\beta),\ b\sin(\theta'+\beta))$ を通る直線を ℓ' とする。ただし，
$-\pi<\theta'-\theta<\pi$ で，$\theta' \neq \theta$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と ℓ' が交わることを示せ。また，その交点 R の座標を θ と θ' の式で表せ。

(2) θ' が限りなく θ に近づくとき，(1) の交点 R はある点 S に近づく。その点 S の
座標を θ の式で表せ。

(3) 座標平面上で，点 P が C 上を動くとき，(2) の点 S はあるだ円上を動く。
そのだ円の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$　r を正の定数とする。$t>r$ のとき，点 $(t,\ 0)$ から円 $x^2+y^2=r^2$ に引いた
2 つの接線の接点と円の中心を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とする。また，
この三角形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。この
とき，次の問いに答えよ。

(1) 接点の座標を t の式で表せ。

(2) $S(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

(3) $V(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$　実数 d を定数とし，2 次の正方行列 A は $A^2-A+dE=O$ を満たすとする。また，
自然数 $n=1,2,3,\cdots$ に対して，x についての整式 x^n を x^2-x+d で割ったときの
商を $Q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とする。すなわち，
$$x^n=(x^2-x+d)Q_n(x)+a_nx+b_n$$
とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，E は単位行列，O は零行列を表す。

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，
$$a_{n+1}=a_n+b_n,\quad b_{n+1}=-da_n$$
が成り立つことを示せ。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対して，
$$A^n=a_nA+b_nE$$
が成り立つことを，(1) の式を用い，数学的帰納法で証明せよ。

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき，$A^2-A-6E=O$ であることを示し，$n=1,2,3,\cdots$
に対して，A^n を n の式で表せ。

1999 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　空間内に，平行四辺形 ABCD と点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{c}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) 次の等式が成り立つことを示せ。
ただし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の内積を表す。

$$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{CP}^2 = \mathrm{BP}^2 + \mathrm{DP}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\boxed{2}$　0 でない複素数 z に対して $w = z + \dfrac{2}{z}$ とおく。z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とし，w の実部を x，虚部を y とする。
このとき，次の問いに答えよ。

(1) x, y をそれぞれ r と θ で表せ。

(2) 複素数平面上で，z が原点を中心とする半径 1 の円上を動くとき，点 w が描く図形を図示せよ。

(3) 複素数平面上で，z が $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ と $\sqrt{3} + i$ を結ぶ線分上を動くとき，点 w が描く図形を図示せよ。

$\boxed{3}$　関数 $f(x) = x^2 \log x$　$(x > 0)$ とする。ここで，対数は自然対数である。
e を自然対数の底として，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線を l とする。このとき，$y = f(x)$ と l には接点以外に共有点がないことを示せ。

$\boxed{4}$　媒介変数 t を用いて

$$x = 1 - \cos t, \quad y = 1 + t\sin t + \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される座標平面上の曲線を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y の最大値と最小値を求めよ。

(2) 曲線 C，x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{5}$　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。
ただし，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(1) $A^2 = O$ のとき，A は逆行列をもたないことを示せ。

(2) $A^2 = O$ のとき，$E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。

(3) $A^3 = O$ のとき，$E + A$ は $E - A$ の逆行列であることを示せ。

$\boxed{6}$　数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x dx$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。
ここで，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$a_n = b_n e + c_n$ となる整数 b_n，c_n があることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = -\frac{1}{e}$ を示せ。

1998年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　関数 $f(x) = \dfrac{1 + \log x}{x^2}$　$(x > 0)$ について，次の問いに答えよ。

ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてもよい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および，第２次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ の増減，極値，凹凸を調べて，そのグラフの概形を描け。

(3) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)dx$ を求めよ。

(4) $1 < a < b$ のとき，$0 < f(a) - f(b) < b - a$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$　$\alpha = 1 + i,\ \beta = 2 + 3i$　とする。複素数 z に複素数 $f(z) = \alpha z + \beta$　を対応させる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(z) = z$　を満たす複素数 z を求めよ。この複素数を z_0 と表す。

(2) $z \neq z_0$ である複素数 z に対して，$\dfrac{f(z) - z_0}{z - z_0}$ の値を求めよ。

(3) $z \neq z_0$ である複素数 z に対して，複素数平面上で，複素数 $z_0,\ z,\ f(z)$　を表す点を，それぞれ，M，A，B とする。このとき，三角形 ABM はどんな形の三角形か。

$\boxed{3}$　実数 a に対して，行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & 5 \end{pmatrix}$ とする。等式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots\cdots (※)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$x,\ y$ は実数とする。

(1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でないある $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，等式 (※) が成り立つ実数 m を考える。

そのような実数 m が存在するような a の範囲を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でないある $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，等式 (※) が成り立つ実数 m を考える。

そのような実数 m がただ１つ存在するような a の値を求めよ。さらに，このときの m の値を求めよ。

(3) $a,\ m$　を (2) で求めた値とするとき，等式 (※) が成り立つ x と y の関係式を求めよ。

(4)　２つの数列 $\{x_n\},\ \{y_n\}$ を $x_1 = 2,\ y_1 = 1,$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + 5y_n \end{cases} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。このとき，$x_n,\ y_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$　座標平面上を運動する点 P と点 Q がある。点 P は点 $(0,\ 1)$ を出発して，曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　$(x \geqq 0)$ 上を毎秒１の速さで動いている。

点 P の t 秒後の座標を $(f(t),\ g(t))$　で表す。一方，点 Q は点 P と同時刻に点 $(0,\ 3)$ を出発して，x 軸に平行な直線 $y = 3$ 上を動いている。

点 Q の t 秒後の座標は $(t + \log(t + \sqrt{t^2 + 1}),\ 3)$　である。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(t),\ g(t)$　を求めよ。

(2) 点 P と点 Q が最も近づくのは何秒後であるか。

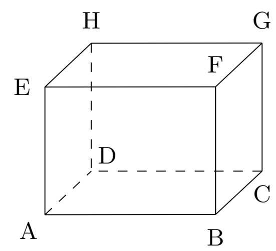
また，そのときの点 P と点 Q の距離を求めよ。

$\boxed{5}$　直方体 ABCD − EFGH において

AB $= 4$，AD $= 2$，AE $= 1$　とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{c}$

とするとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}},\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$　で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角が $120°$ より大きいか小さいかを調べよ。

$\boxed{6}$　$1 < a$ とする。方程式

$$\sin\left(\frac{(x + a)^2}{32}\pi\right) = 0$$

の $-1 \leqq x \leqq 1$ の間にある解の個数を $N(a)$ で表す。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $N(a) = 0$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2) $N(a) = 3$ となる最小の a の値を求めよ。

1997年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　整数全体を定義域とする関数 $f(n)$ が

$$f(n) = \begin{cases} n-10 & (n \geqq 101) \\ f(f(n+11)) & (n \leqq 100) \end{cases}$$

を満たすとき，

$$f(n) = 91 \qquad (n \leqq 100)$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$-[A]　複素数 $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ が $z^5 = 1$ を満たすとき，
次の問いに答えよ。ただし，$a,\ b,\ r$ は正の実数で $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) r の値と θ の値を求めよ。

(2) z を解とする整数係数の4次方程式を求めよ。

(3) $z + \dfrac{1}{z}$ を解とする整数係数の2次方程式を求めよ。

(4) a の値を求めよ。

$\boxed{2}$-[B]　$A^3 = E$ を満たす行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。
ただし，E は単位行列，$a,\ b,\ c,\ d$ は実数とする。

(1) $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & p \\ q & r \end{pmatrix}$ ならば，$(eh - fg)(im - jk) = nr - pq$ が成り立つことを利用して，$ad - bc$ の値を求めよ。

(2) 行列 $A^2 - (a+d)A + E$ を求めよ。

(3) 行列 $A - (a+d)E + A^2$ を求めよ。

(4) $A \neq E$ のとき，$a + d$ の値と行列 $A^2 + A + E$ を求めよ。

$\boxed{3}$　座標平面上の原点を O とするとき，次の問いに答えよ。

(1) O を通らない直線 m に，O から下ろした垂線を OH とする。線分 OH の長さを p，x 軸の正の部分 OX を始線とする $\angle$XOH を θ とすると，m の方程式は，$x\cos\theta + y\sin\theta = p$ と表せることを示せ。

(2) 2直線 $m : x\cos\theta + y\sin\theta = p$，$m' : x\cos\theta' + y\sin\theta' = p'$
$(0° < |\,\theta - \theta'\,| \leqq 90°,\ 0 < p' \leqq p)$ がなす角の一つを α $(0° < \alpha \leqq 90°)$
とするとき，m と m' がなす角の2本の2等分線それぞれまでの，
O からの距離を $p,\ p',\ \dfrac{\alpha}{2}$ を用いて表せ。

$\boxed{4}$　直角三角形 OPQ の斜辺 PQ を $n+1$ 等分した点を
$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_n$ とするとき，次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{b}$，$|\overrightarrow{a}| = a$，$|\overrightarrow{b}| = b$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\mathrm{OM}_1{}^2 + \mathrm{OM}_2{}^2 + \cdots + \mathrm{OM}_n{}^2\right)$ を求めよ。

$\boxed{5}$

(1) 関数 $f(x) = e^x \sin x$ を微分せよ。

(2) 平均値の定理を利用して，$\alpha \leqq \beta$ のとき，

$$|\,e^\beta \sin\beta - e^\alpha \sin\alpha\,| \leqq \sqrt{2}(\beta - \alpha)e^\beta$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{6}$　$n,\ m$ を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$ を求めよ。

(2) $S_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

1996年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ $\dfrac{1}{2} < a < 1$ である行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される xy 平面上の１次変換を f とする。１次変換による点 P の写像を f(P) で表すとき，任意の点 P に対し，定点 C(1, 1) の位置ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Pf(P)}}$ との内積はつねに 0 である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 行列 A を a，b で表せ。

(2) １次変換 f によって直線 $y = x$ がそれ自身にうつされるとき，行列 A を a で表せ。

(3) (2) の行列 A で表される１次変換 f に対して，点 P$(x,\ y)$ が単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき，原点 O から点 f(P) までの距離の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ 変数 t の関数 $x = x(t)$，$y = y(t)$ が微分可能で，条件

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 4\sqrt{2}y,\quad \frac{dy}{dt} = 2y$$

を満たしている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}(x - py) = q(x - py)$ となる定数 p，q を求めよ。

(2) $x(0) = -1$，$y(0) = \sqrt{2}$ を満たす関数 $x(t)$，$y(t)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ n 本 (n は 3 以上の整数) のくじの中に当たりくじとはずれくじがあり，そのうち 2 本がはずれくじである。このくじを 1 本ずつ引いていき，はずれくじ 2 本を引いたとき，それまでに引いた当たりくじが k 本であるとき $X = k$ とする。ただし，引いたくじはもとに戻さない。このとき，次の問いに答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1 - \cos t}{t}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f'(t) > 0$ を示せ。

(2) 不等式 $1 - \cos x \leqq f(t)x$ を満たす x $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の範囲を t で表せ。

(3) t が区間 $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, 1 - \cos x - f(t)x \,|\, dx$ の最小値を与える t の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 各項が $\dfrac{q}{2^p}$ (p は正の整数，q は奇数) の形をした数列 $\{a_n\}$ が，次のように定義されている。

(i) $a_1 = \dfrac{1}{2}$ である。

(ii) $a_n = \dfrac{q}{2^p}$ のとき，$q = 1$ ならば $a_{n+1} = \dfrac{12p + 1}{2^{p+1}}$ であり，
$q \neq 1$ ならば $a_{n+1} = \dfrac{q - 2}{2^p}$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 分母が 2^k（k は正の整数）である項は何項あるか。

(2) $\dfrac{1}{2^k}$（k は正の整数）は第何項か。

(3) 第 100 項を求めよ。

$\boxed{6}$ 座標空間において，点 A を (0, 0, 2)，点 B を (0, 0, 1) とし，点 A と xy 平面上の直線 $y = b$，$z = 0$（b は 0 ではない定数）によって定まる平面を π とする。そして平面 π 上の z 座標が 1 でない任意の点 P に対し，直線 BP と xy 平面との交点 P$'$ を対応させる。また，点 A を中心とした半径が $\sqrt{5}$ である π 上の円を C とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 平面 π の方程式を求めよ。

(2) 平面 π 上の点 P$(x,\ y,\ z)$（ただし，$z \neq 1$）に xy 平面上の点 P$'(u,\ v,\ 0)$ が対応しているとき，x，y，z を u，v で表せ。

(3) 点 P が円 C 上の z 座標が 1 でないすべての点を動くとき，対応する点 P$'$ の描く xy 平面上の曲線 C' の方程式を求めよ。

1995 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$，$a_{n+1}=6n+2-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定義されているとき，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=a_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，一般項 b_n を求めよ。

(2)　$c_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，一般項 c_n を求めよ。

(3)　一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{2}$　1 次変換 f は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ に移し，点 Q を点 $\mathrm{R}(-r,\ -r)$ に移すものとする。ただし，q，r は正の数であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　f を表す行列を q，r を用いて表せ。

(2)　f によって点 R が移った点を S とおくとき，さらに f によって点 S が点 P に移ったとする。このとき，S の座標を q を用いて表せ。

$\boxed{3}$　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値，および曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$e^x>\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ であることを証明して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

(3)　$S(t)=\displaystyle\int_{-1}^{t}f(x)dx$ $(t\geqq 0)$ とおくとき，$S(t)$ を求めて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ を求めよ。

$\boxed{4}$　箱の中に 1 から n までの番号のついた n 枚のカードが入っている。この中から 1 枚取りだしたときの番号を x，これを箱にもどして再び 1 枚取りだしたときの番号を y とする。このときの x と y の最大値を X とする。

(1)　$X\leqq k$ である確率を求めよ。ただし，k は $1\leqq k\leqq n$ となる整数とする。

(2)　X の確率分布を求めよ。

(3)　X の平均値と分散を求めよ。

$\boxed{5}$　空気中で物体が落下するとき，速度の大きさの 2 乗に比例した空気の抵抗を受けるとすると，時刻 t における速度 v は，次の微分方程式を満たす。

$$\frac{dv}{dt}=-g+kv^2$$

ただし，g と k は正の定数である。

(1)　$a\neq 0$ のとき，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ を求めよ。

(2)　$t=0$ での速度を 0 として，時刻 t $(t\geqq 0)$ における速度 v を求めよ。ただし，$-g+kv^2<0$ である。

$\boxed{6}$　座標平面上を点 P は次のように運動している。まず P は原点 $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$ から x 軸の正の向きに 1 だけ直進して $\mathrm{A}_1(1,\ 0)$ に行き，次に A_1 において正の向きに角 θ $(0<\theta<\pi)$ だけ向きを変えて 1 だけ直進して A_2 に行く。以後同様に A_{n-1} に行ったとき，正の向きに角 θ だけ向きを変えて 1 だけ直進して，A_n に行くものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 A_0，A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ は，同一円周上にあることを証明し，その円の半径を求めよ。

(2)　$\theta=\dfrac{3}{5}\pi$ の場合の点 P の軌跡を考えて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\cos\frac{3k}{5}\pi$ の値を求めよ。

(3)　互いに素な正の整数 p と q によって $\theta=\dfrac{q}{p}\pi$ と表されるとき，$\mathrm{A}_n=\mathrm{A}_0$ となる最小の正の整数 n の値を求めよ。

1994年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$ に対して，$BA=A\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}$ が成り立っているものとする。ただし，$x\neq 1$，$b\neq 0$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　x の値を求めよ。さらに，y，z を a，b を用いて表せ。

(2)　数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次によって定める。

$$\begin{pmatrix}p_1\\ q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}p_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

p_n，q_n を a，b，n を用いて表せ。

$\boxed{2}$　原点 O における曲線 $C: y=x^3-3x$ の接線を l_1 とする。P を O と異なる l_1 上の点とし，P より C へひいた接線で l_1 と異なるものを l_2，P を通り y 軸に平行な直線を l_2 とする。点 P の x 座標を $p\ (p>0)$ として，次の問いに答えよ。

(1)　l_1 の方程式を求めよ。また，l_2 の p を含んだ方程式を求めよ。

(2)　曲線 C と 2 直線 l_1，l_2 によって囲まれた図形の面積を S_1，曲線 C と 2 直線 l_1，l_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$　座標平面上で，直線 l は点 A$(1,\ 0)$ において円 $x^2+y^2=1$ に接している。このとき，l 上に固定された点 P は点 A の位置にあるものとする。直線 l がこの円周上をすべることなく接しながら左回りに 1 回転するときの点 P のえがく曲線を C とし，点 P の最終の位置を点 B とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　接点の座標が $(\cos t,\ \sin t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ であるときの点 P の座標を求めよ。

(2)　曲線 C の長さを求めよ。

(3)　x 軸または y 軸に平行な直線で C (2 点 A，B は除く) に接するものをすべて求めよ。

$\boxed{4}$　1 つのサイコロを 3 回投げる。k 回目 $(k=0,\ 1,\ 2)$ に出た目の数が X_k であるとき，得点 S を次の (i)，(ii)，(iii) により定めるものとする。

(i)　$1\leqq X_1\leqq 3$ のとき，$S=X_1$

(ii)　$4\leqq X_1\leqq 6$，$1\leqq X_2\leqq 3$ のとき，$S=X_1+X_2$

(iii)　$4\leqq X_1\leqq 6$，$4\leqq X_2\leqq 6$ のとき，$S=X_1+X_2+X_3$

このとき，S の期待値を求めよ。

$\boxed{5}$　三角形 ABC は辺 AB，BC，CA の長さがそれぞれ 3，4，5 である直角三角形とする。辺 AC，AB をそれぞれ 3 : 5 と 4 : 5 の比に内分する点を D，E とし，線分 BD と線分 CE の交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{a}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{b}$ であることを示せ。

(3)　線分 CF 上に点 G を FE=FG となるようにとるとき、$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ。

$\boxed{6}$　関数 $f(x)$ はすべての実数に対して連続な導関数 $f'(x)$ をもち，次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たしているものとする。

(i)　$f(-1)=f(1)=0$，　(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx=1$

(iii)　区間 $-1<x<1$ のすべての x に対して，$f(x)>0$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　任意の実数 t に対して，等式

$$\int_{-1}^{1}\{tf'(x)+xf(x)\}^2\,dx=t^2\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx-t+\int_{-1}^{1}x^2\{f(x)\}^2\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2)　不等式

$$\left\{\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx\right\}\left\{\int_{-1}^{1}x^2\{f(x)\}^2\,dx\right\}>\frac{1}{4}$$

を示せ。

1993 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 原点を O とする xy 平面上の三角形 OAB と点 C に対して，

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \overrightarrow{\mathrm{OC}},\ f(\overrightarrow{\mathrm{OC}}) = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

をみたす 1 次変換がある。$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　（s，t は実数）とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) s と t の値を求めよ。

(2) 1 次変換 f を表す行列を P とする。行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は，

$P^3 = E$（E は単位行列），$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ をみたすとする。

このとき，$P\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ と行列 P とを求めよ。

$\boxed{2}$ $P(x)$，$Q(x)$ を x の整式とするとき，次の問いに答えよ。

(1) x の関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)P(t)\,dt$ の第 2 次導関数を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^x e^t Q(t)\,dt - \int_0^x (x-t)e^t Q(t)\,dt = (x^2+2x)e^x$

となる $Q(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 曲線 $y = \dfrac{4}{3}x - x^3$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{4}{3}t - t^3\right)$ $(t > 0)$ におけるこの曲線の接線は，この曲線上のもう 1 つの点 Q における接線と点 Q で直交している。このとき，次の問いに答えよ。

(1) t の値と点 Q の x 座標を求めよ。

(2) この曲線と点 P における接線とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 甲，乙 2 つのサイコロを同時に振る試行を A で表すとき，動点 P は原点 O を出発し，試行 A においてサイコロ甲の出た目がサイコロ乙の出た目より大きいときにのみ，x 軸上の正の方向に 1 つだけ進むものとする。試行 A を n 回（n は正の整数）くり返した後の動点 P の x 座標を X で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行 A においてサイコロ甲の出た目がサイコロ乙の出た目より大きくなる確率を求めよ。

(2) X の確率分布を求めよ。

(3) xy 平面上で定点 $\mathrm{Q}(n,\ 2)$，$\mathrm{R}(-1,\ 0)$ と動点 P とを頂点とする三角形の面積を Y で表すとき，Y の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ とを求めよ。

$\boxed{5}$ 原点を O とする空間の点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$ に対して，点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ のなす角 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{3}{4}\pi\right)$ を一定にして動くものとする。xy 平面上の点 P の軌跡を L とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$ を x，y を用いて表せ。

(2) $2\cos^2\theta = a$ とおいたとき，x，y，a の間にはどのような関係が成り立つか式で表せ。

(3) L が楕円となる θ の値の範囲を求めよ。

(4) L が直線となるときがあるかどうか調べよ。

$\boxed{6}$ n を正の整数とし，曲線 $y = x^2 - 8x + 18$ 上の点 $\mathrm{P}(n,\ n^2 - 8n + 18)$ における接線を l とする。また，曲線 $y = x^2 - 8x + 18$ と接線 l および y 軸とで囲まれた部分（境界も含む）に含まれる格子点の個数を N とする。ただし，格子点とは x，y がともに整数であるような点 $(x,\ y)$ のこととする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = x^2 - 8x + 18$ と接線 l および y 軸とで囲まれた部分（境界も含む）に含まれる格子点のうち，直線 $x = k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上にあるものの個数を求めよ。

(2) N を求めよ。

1992年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 等脚台形 ABCD（AD // BC，AB=DC，AD $\leqq$ BC）に対して，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{p}$，$|\overrightarrow{p}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{q}$，$|\overrightarrow{q}| = k$，$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = m$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を m，$\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ で表せ。

(2) $\angle$ABC の 2 等分線と直線 CD の交点を E とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を k，m，$\overrightarrow{p}$，$\overrightarrow{q}$ で表せ。

(3) $k = \dfrac{14}{13}$ で，E が辺 CD の中点であるとき，m の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 正の整数 n に対して，$f_n(x)$ は

$$f_1(x) = 1 - 2\int_0^x f_1(s)ds$$
$$f_n(x) = f_{n-1}(n-1) + 1 - 2\int_{n-1}^x f_n(s)ds \quad (n \geqq 2)$$

(1) $f_1(x)$，$f_2(x)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して，$f_n(x)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標平面上の 1 次変換 $\begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}$ がある。定数 a，b，c，d は，$a \neq 0$，$ad - bc = 0$，$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ を満たす。また，$x^2 + y^2 \leqq 1$ で与えられる円板を S とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 平面上のすべての点が，この 1 次変換によってある直線 l に移される。直線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が円板 S 上を動くとき，$u^2 + v^2 \leqq 1$ となることを示せ。

$\boxed{4}$ $f(x) = \cos 2x + a\cos x + b$ とする。関数 $f(x)$ は，$x = \dfrac{\pi}{3}$ で極値 1 をとるものとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 定数 a，b の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$ 赤玉と白玉の入った袋を使って次のゲームを行う。n は 2 以上の整数とする。袋から玉を 1 個取り出し，色を調べ玉を袋に戻すことを 1 回の操作と呼ぶ。ゲームはこの操作を繰り返し行う。ただし，赤玉を取り出したときか，n 回目の操作を行ったとき，ゲームを終了する。ゲームが i 回目の操作で終了するとき $X = i$ とおく。また，白玉を袋から 1 個取り出す確率を p とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

(3) ゲームを 2 度行う。はじめのゲームが j 回目の操作で終了するとき $Y = j$ とおき，あとのゲームが k 回目の操作で終了するとき $Z = k$ とおく。$|Y - Z| \leqq 1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{6}$ 正の整数 n に対して，

$$a_1 = 2,\ b_1 = 1 \text{ とし，} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

によって，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を定める。このとき，次の問に答えよ。

(1) a_nb_n を求めよ。

(2) $a_n > b_n$ を示せ。

(3) $n \geqq 2$ に対して，$a_n - b_n < \dfrac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1})$ を示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

1991年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 原点をOとする座標平面上の1次変換 f が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ で表されるものとする。平面上のすべての点が f で直線 $l\ :\ y=mx$ 上に移るとき，次の問に答えよ。

(1) a，b を m を用いて表せ。

(2) 直線 l 上にない任意の点Aと点B$=f(\mathrm{A})$ について，AB$\perp$OB であることを示せ。

(3) $m=1$ のとき，曲線 $y=\sqrt{x^2+1}$ 上の点A，点B$=f(\mathrm{A})$ および原点Oのつくる三角形OABの面積は点Aの位置に関係なく，つねに一定であることを示せ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$x>0$ で微分可能であり，$f(1)=1$，かつすべての $x>0$ に対して $f(x)>0$ をみたしている。

曲線 $C\ :\ y=f(x)\ (x \geqq 0)$ 上の任意の点Pから x 軸へ引いた垂線の足をQ，原点をOとする。曲線 C，x 軸，y 軸および線分PQによって囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を U，三角形OPQを x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とする。このとき，Pの位置に関係なくつねに $U=2V$ となるような $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $0<a+b<1$ であるとし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$ を用いて数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。このとき，次の問に答えよ。

(1) 第 n 項 x_n，y_n $(n \geqq 2)$ を求めよ。

(2) d_n で平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を結ぶ線分の長さを表すとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 1つの袋の中に1，2，3，$\cdots$，n までの番号が書かれたカードが，それぞれ2，2^2，2^3，$\cdots$，2^n 枚ずつ入っている。この袋の中から1枚のカードをとりだし，その番号を X とするとき，次の問に答えよ。

(1) 番号 k について，$X=k$ である確率を求めよ。

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 三角形OABの辺ABの中点をCとし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点Dをとる。Dを通る直線が辺OA，OBとそれぞれ点O以外の点P，Qで交わっているものとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=h\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\vec{b}$ として，次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}=5$ であることを示せ。

(2) $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，OA$\perp$PQ のとき，$h$ と k の値を求めよ。

$\boxed{6}$ t を変数とする関数 $f(t)$ と $g(t)$ が微分可能で，

$$f'(t)=g(t)+2\cos t, \qquad g'(t)=f(t)+4\cos t,$$
$$f(0)=-2, \qquad g(0)=-1$$

をみたしているとき，次の問に答えよ。

(1) $F(t)=e^{-t}(f(t)+g(t))$，$G(t)=e^{t}(f(t)-g(t))$ とおくとき、$F'(t)$，$G'(t)$ を求めよ。

(2) $f(t)$，$g(t)$ を求めよ。

(3) 曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ 上の点Pと原点Oを結ぶ線分の長さの最大値と最小値を求めよ。

1990 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ および直線 $l:3x+10y=5$ について，次の各問に答えよ。

(1)　行列 A^n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求め，A^n で表される 1 次変換による l の像 l_n を求めよ。

(2)　原点を中心とする半径 1 の円と l_n が共有点をもたないような n を求めよ。

$\boxed{2}$　四面体 ABCD において，AC=BD，AD=BC が成り立つとき，次の各問に答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BAD}$，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BCD}$ を示せ。

(2)　辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ を示せ。

(3)　$\mathrm{MN}\perp\mathrm{AB}$，$\mathrm{MN}\perp\mathrm{CD}$ を示せ。

$\boxed{3}$　等差数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_1>a_2$ およびある自然数 p に対し，$(a_{3p})^2=4$ を満たすとき，次の各問に答えよ。

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　$a_n\geqq 0$ であるような最大の n を求めよ。

(3)　$b_n=na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ として得られる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 k 項までの和を S_k とおくとき，S_1，S_2，S_3，$\cdots\cdots$ の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$　関数 $f(x)=xe^{-x^2}$ について，次の各問に答えよ。

(1)　$f''(a)=0$ なる正の数 a を求めよ。

(2)　$x<a$ のとき，$f(x)<f(a)+f'(a)(x-a)$ であること，および $x>a$ のとき，$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$ であることを示せ。

(3)　曲線 $C:y=f(x)$ の，点 $(a,\ f(a))$ における接線を l とする。曲線 C，直線 l および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$　$f(x)$ は，$f(0)=1$ およびすべての x $(x>0)$ に対して $f(x)>0$ を満たす，微分可能な関数とする。曲線 $C:y=f(x)$ 上を動く点 P，点 P における曲線 C の接線と x 軸との交点を Q とする点 P の時刻 t $(\geqq 0)$ における位置は $(t,\ f(t))$ であり，点 Q の，時刻 0 における位置は $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，時刻 0 における加速度は $\dfrac{1}{3}$，時刻 t における加速度は $\dfrac{2}{(t+1)^4}$ であるとするとき，$t\geqq 0$ として，次の各問に答えよ。

(1)　時刻 t における Q の位置を求めよ。

(2)　$f(t)$ が満たす微分方程式をつくり，$f(t)$ を求めよ。

$\boxed{6}$　n 人 $(n\geqq 2)$ で 1 回だけジャンケンをする。勝者の数を X として，次の各問に答えよ。

(1)　k を $1\leqq k\leqq n$ である整数とするとき，$k_nC_k={}_{n-1}C_{k-1}$ を示せ。

(2)　$X=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ である確率を求めよ。

(3)　$X=0$，すなわち勝負が決まらない確率を求めよ。

(4)　X の期待値を求めよ。

1989年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$ に対して，2次の行列 X，Y が $X+Y=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$XY=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，および $aX+bY=A$ を満たす。ただし，a，b は定数で $a>b$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) a，b，X，Y を求めよ。

(2) X^3，Y^3 を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$A^n=a_nX+b_nY$ となる a_n，b_n を推定し，そのことを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{2}$ 平面上に2つのベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を点O，A，Bが一直線上にないようにとり，ベクトル $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を次のように定める。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$|\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{c}|$　　(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$|\overrightarrow{d}|=|\overrightarrow{a}|$

(1) $\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{d}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ で表せ。

(2) n を正数として，$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}=n\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ のとき，比 $|\overrightarrow{a}|:|\overrightarrow{b}|$ の値を求めよ。

(3) n が自然数のとき，n および $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ のなす角を求めよ。

$\boxed{3}$ xyz 空間に3直線 $l: x=y=z$，$m: x-1=y-1=z$，$x-y-1=z=0$ があり，l，m の決定する平面を π とする。n 上の点Pに対し，点A，B，Cをそれぞれ l，m，π 上に $\mathrm{PA}\perp l$，$\mathrm{PB}\perp m$，$\mathrm{PC}\perp \pi$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 平面 π の方程式を求めよ。

(2) Pの座標を $(t,\ t-1,\ 0)$ とするとき，点A，B，Cの座標を t で表せ。

(3) 線分PA，PBの長さの和は，$t=1$ のとき最小となることを示せ。

$\boxed{4}$ 微分方程式 $x(f'(x))^2-2f(x)f'(x)+x=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) x の整式で表される関数 $f(x)$ で上の微分方程式を満たすものを求めよ。

(2) 実数 p，q に対し，(1) で求めた関数 $f(x)$ で $q=f(p)$ を満たすものがあるという。このような点 $(p,\ q)$ の存在範囲を図示せよ。

$\boxed{5}$ x の連続関数 $f(x)$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1 f(t)dt$ とおくとき，次の各問いに答えよ。

(1) $F''(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)=A\sin px+B\cos px$ のとき，次の (i)，(ii) に答えよ。ただし，A，B，p は定数で $p>0$ とする。

(i) $F(1)$ を求めよ。

(ii) ある定数 q に対して，$f(x)=q^2F(x)$ となるような $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 表の出る確率が p $(0<p<1)$ である硬貨を n 回 $(n\geqq 2)$ 続けて投げるとき，m 回目に表が出たら $X_m=1$，裏が出たら $X_m=0$ とする。いま，X_1 と異なる数字が $k+1$ 回目に初めて出たとき，$X=k$ とおく。ただし，n 回とも同じ数字の場合は $X=n$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\{X=k\}$ という事象を X_1，X_2，$\cdots$，X_n を用いて表せ。

(2) X の確率分布を求めよ。

(3) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

1988 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，$P^{-1}AP$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して $\left(\dfrac{1}{2}P^{-1}AP\right)^n$ を求めよ。

(3) (2) の結果を用いて，A^n を求めよ。

$\boxed{2}$　$a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}e^x\,dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $0<a_n<\dfrac{e}{n!} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ。

(2) $a_n-a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ を調べて，a_n を求めよ。

(3) (1) と (2) により，無限級数

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

の和を求めよ。

$\boxed{3}$　空間内の 2 つの直線

$$x=y=\frac{z}{4},\qquad x=y+6=z$$

をそれぞれ l_1，l_2 とする。l_1 上の点 P から l_2 に垂線を下ろして l_2 との交点を $f(\mathrm{P})$，l_2 上の点 Q から l_1 に垂線を下ろして l_1 との交点を $g(\mathrm{Q})$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}=(s,\ s,\ 4s)$，$f(\mathrm{P})=(t,\ t-6,\ t)$ とおくとき，t を s で表せ。

(2) $\mathrm{P}=(s,\ s,\ 4s)$ とおくとき，$g(f(\mathrm{P}))$ を s で表せ。次に $g(f(\mathrm{P_0}))=\mathrm{P_0}$ となる点 $\mathrm{P_0}$ を求めよ。

(3) l_1 上の点 P について，P と $f(\mathrm{P})$ の距離が最小となるのは $\mathrm{P}=\mathrm{P_0}$ のときであることを証明せよ。

$\boxed{4}$　曲線 $y=x+\dfrac{1}{x}$ と直線 $x+y=3$ とで囲まれた図形を D とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x$ に平行かつ点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ からの距離が t である直線が D と共通点をもつとき，その直線が D によって切りとられる部分の長さを t で表せ。

(2) D を $x+y=3$ のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{5}$　$x>0$ に対して定義された関数 $f(x)$ があって，曲線 $y=f(x)$ の上の点 $(x,\ f(x))$ におけるこの曲線の接線はいつも点 $\left(\dfrac{2}{3}x,\ -\dfrac{1}{3}x^3\right)$ を通るという。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{x^3}\right)$ を x の式で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=2x-\dfrac{5}{3}$ と接するように $f(x)$ の形を定めよ。

$\boxed{6}$　1 つのサイコロをふって出た目の数だけ 10 円玉を投げるとき，表の出る枚数を n とする。

(1) $n=0$ となる確率を求めよ。

(2) $n\leqq 4$ となる確率を求めよ。

(3) 投げた 10 円玉がすべて表である場合には，それらの 10 円玉がもらえるという。（すなわち，サイコロの目の数と n が一致した場合には $10n$ 円がもらえる。）もらえる金額の期待値を求めよ。

1987 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　r を実数とし，$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-r\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}+r\end{pmatrix}$ とおく。$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ とし，

自然数 n に対して $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ を式 $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$ で定義する。

このとき，次の問に答えよ。

(1) $A^{n+2}-(r+1)A^{n+1}+rA^n=O$ であることを証明せよ。

(2) x_n と y_n を r と n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束するための r の範囲を求め，
そのときの極限値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{2}$　平面上の 4 角形 ABCD において対角線 AC，BD の中点をそれぞれ P，Q とし，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{c}$ とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ で表せ。

(2) 等式 $\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2+4\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2+\overline{\mathrm{DA}}^2$ が成り立つことを示せ。
ただし，たとえば $\overline{\mathrm{AC}}$ は線分 AC の長さを表すものとする。

$\boxed{3}$　$x>0$ で定義された関数 $f(x)$ は，第 2 次導関数をもち，等式

$$x^2f(x)+\int_1^x(4x-9t)f(t)dt=x-1$$

を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $f(1)$，$f'(1)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を導け。

(3) $f(x)=xg(x)$ とおくとき，$g(x)$ の満たす微分方程式を導け。

(4) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$　確率変数 X は値として 1，2，$\cdots$，n のみをとり，$k=1,\ 2,\ ,\ \cdots,\ n-1$ のとき，
X が値 k をとる確率は $\dfrac{1}{2^k}$ に等しいとする。ただし，n は 4 以上の自然数とする。
このとき，次の問に答えよ。

(1) X が値 n をとる確率 p_n を求め，$p_n<\dfrac{2}{(n-1)(n-2)}$ であることを示せ。

(2) X の平均値を a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の値を求めよ。

(3) X の分散を b_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$　$\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$，$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$　$(x_1<x_0)$ を曲線 $C:y=x^2$ 上の 2 点とする。
C 上に点 P_2 をとり，この点 P_2 における C の接線が点 P_0，P_1 を通る直線
に平行であるようにする。順次，C 上に点 P_n をとり，この点 P_n における
C の接線が点 P_0，P_{n-1} を通る直線に平行であるようにする。このとき，
次の問に答えよ。

(1) 点 P_0 と P_1 を通る直線と曲線 C で囲まれる部分の面積 S を x_0 と x_1 で表せ。

(2) 点 P_2 の座標を x_0 と x_1 で表せ。

(3) 3 角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を x_0 と x_1 で表せ。

(4) 3 角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}S_n=S$ であることを示せ。

$\boxed{6}$　a，b を正の定数とする。だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$
におけるだ円の接線が，x 軸と y 軸とで切り取られる部分の長さを $L(\theta)$ とする。
このとき，次の問に答えよ。

(1) $L(\theta)$ を θ の式で表せ。

(2) $L(\theta)$ の最小値を求めよ。

1986 年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　1 次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$ とする。O を原点とする座標平面上の 2 点 P，Q について，$\mathrm{P}'=f(\mathrm{P})$，$\mathrm{Q}'=f(\mathrm{Q})$ とおく。このとき，次の問に答えよ。

(1) 3 点 O，P，Q が 3 角形の頂点ならば，3 点 O，P$'$，Q$'$ も 3 角形の頂点となることを証明せよ。

(2) $a=2$，$c=1$ であり，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ ならば，つねに $\mathrm{OP}'\perp\mathrm{OQ}'$ になるという。このとき，b，d の値を求めよ。

$\boxed{2}$　$(x,\ y,\ z)$ を座標とする空間に，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球 S と点 $\mathrm{B}(3,\ 0,\ 3)$ がある。B から S に接線を引いたときの接点を P とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 接点 P の全体は一定の平面上にある。その平面の方程式を求めよ。

(2) 接線 BP と平面 $z=0$ との交点の軌跡の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$　$f_1(x)=1$，$f_{n+1}(x)=1-\displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす関数 $f_n(x)$ と，$f(x)=1-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を満たす実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ がある。このとき，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$，$f_n(x)$ を求めよ。

(2) $x>0$ のとき，$|\,f(x)-f_n(x)\,|<\dfrac{x^n}{n!}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を証明せよ。

$\boxed{4}$　1 から n までの n 個の自然数 1，2，$\cdots$，n の各数字を記入したカードが 1 枚ずつ合計 n 枚入っている箱がある。いま，表の出る確率が p $(0<p<1)$ である硬貨を表が出るまでくり返し投げて，k 回目で初めて表が出れば $X=k$ とする。ただし，n 回投げても表が出ないときは $X=n+1$ とする。次に，上の箱の中から無作為に 1 枚のカードを取り出して，そのカードの数字が X 以上のときだけ合格とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) 合格する確率を p_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$　関数 $f(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\left(1-\frac{|\,t\,|}{x}\right)\cos t\,dt$　$(x>0)$ について，次の問に答えよ。

(1) 積分することにより，$f(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_{\pi a}^{\pi a+1} f\left(\frac{x}{a}\right)dx$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$　3 次関数 $f(x)=-x^3+ax$ と $g(x)=(a-1)x^3+bx^2+cx+d$ は，次の条件を満たしている。

(ア) x_1，$x_2 \leqq \dfrac{1}{2}$ なる任意の x_1，x_2 について $f(x_1)\geqq g(x_2)$

(イ) $f(x)$，$g(x)$ のグラフは，ちょうど 2 点で交わる。

(ウ) $f(1)=g(1)$

(エ) 関数 $f(x)-g(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ で極値をとる。

このとき，a，b，c，d の値を求めよ。

1985年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　行列 $A=\begin{pmatrix} 2+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 2-\cos\theta \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とする。点 $(3,\ 4)$ が f により点Pにうつされ，点Qが f により点 $(3,\ 4)$ にうつされるとき，次の問に答えよ。

(1) 点Pと点 $(3,\ 4)$ が一致するときの $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 実数 θ にかかわりなく，点Qは一定の円の周上にあることを証明せよ。

$\boxed{2}$　3次関数 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ は次の条件 (i)，(ii)，(iii) をすべて満たしているものとする。ただし，a，b，c は実数である。

(i) $f'(0)=f'(1)$

(ii) $f'(1)f(1)-f'(0)f(0)\leqq 0$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$

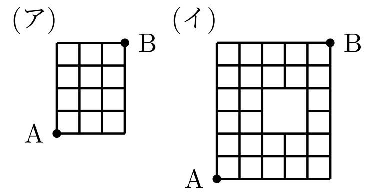
このとき，次の問に答えよ。

(1) a の値，および b のとる値の範囲を求めよ。

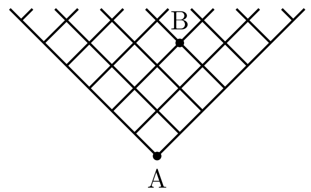
(2) $f(x)$ の区間 $[0,\ 1]$ における最大値と最小値の和を求めよ。

$\boxed{3}$　a を正の実数とし，$x\geqq 0$ で定義された連続な関数 $f(x)$ が，すべての x に対して $f(x)\geqq a$ であり，また $f(0)=a$ であるとする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から x 軸に下ろした垂線の足をQとする。この曲線と x 軸，y 軸および線分PQで囲まれる部分の面積が，Pと直線 $y=a$ との距離に比例するとき，$f(x)$ はどんな関数か。

$\boxed{4}$　(1) 右の (ア)，(イ) の図のような格子状の道が与えられているとき，各図のA地点からB地点にいたる最短経路はそれぞれ何通りあるか。



(2) 右図のような格子状の道をA地点から上方に進んで行くものとする。各分岐点で左上方へ進むか右上方へ進むかが等しい確率で選ばれるものとして，図のB地点を通る確率を求めよ。



$\boxed{5}$　$t>0$ とする。3点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 4,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ t)$ を通る平面と原点を中心とする球が接するときの接点をPとする。

(1) 3点A，B，Cが通る平面の方程式を求めよ。

(2) 接点Pと xy 平面との距離が最大となるときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$　関数 $f(x)$，$g(x)$ はすべての実数 x で微分可能で，次の関係式を満たしている。

(i) $f(x)=g(x)+xe^{-x}-2e^x\displaystyle\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$

(ii) $g(x)=f(x)-xe^{-x}-2e^x\displaystyle\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$

(1) $f(x)+g(x)=0$ であることを証明せよ。

(2) $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。