特集「円に内接する四角形」

【$180^\circ-\theta$ の公式】

$\sin(180^\circ-\theta)=$　　　　　　　　　　　　，$\cos(180^\circ-\theta)=$　　　　　　　　　　　，$\tan(180^\circ-\theta)=$

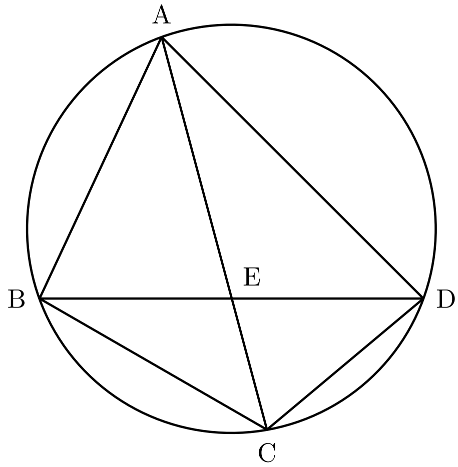
【カニカニの公式】

円に内接する四角形 ABCD において，対角線 AC と BD の交点を E とする。

△ABD : △BCD=(AB×AD):(CB×CD) であるから，

BD を底辺，AE と EC を高さとして見れば

AE:EC=(AB×AD):(CB×CD) が成り立つ。



(証明)　$A+C=180^\circ$ より $\sin A=$

であるから，

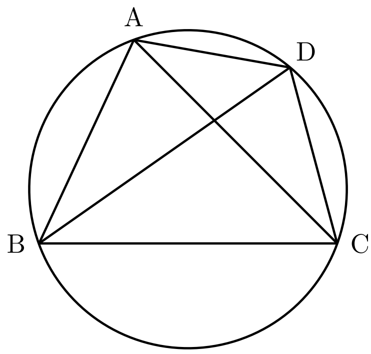
$$\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{BCD}}=\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}=\frac{\qquad}{\qquad}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{CED}$

であるから，

$$\frac{\triangle\mathrm{ABD}}{\triangle\mathrm{BCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot(\qquad)\cdot\sin\angle\mathrm{AEB}}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BD}\cdot(\qquad)\cdot\sin\angle\mathrm{CED}}=\frac{\qquad}{\qquad}\quad\cdots\cdots②$$

以上 ①，② より，



【トレミーの定理】

円に内接する四角形において，

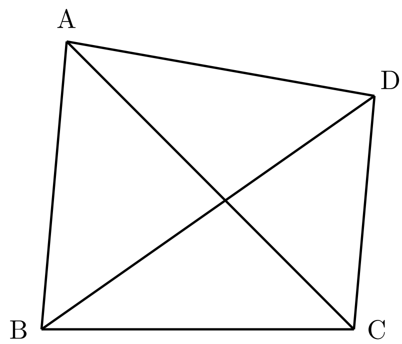
AB×CD+AD×BC=AC×BD

が成り立つ。(証明略)

【四角形の対角線と面積】

四角形 ABCD の面積を S，対角線 AC と BD のなす角を θ とする。

このとき，$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta$ を示せ。(円に内接しなくても成り立つ。)→章末 p172　演習問題 A　4



【例題　カニカニ作戦】

円に内接する四角形ABCDにおいて，AB=3，BC=2，CD=4，DA=4とし，対角線ACとBDの交点をEとする。
次のものを求めよ。

(1) BDの長さ　(2) ACの長さ　(3) 四角形ABCDの面積S　(4) BEの長さ　(5) $\sin\angle$AEBの値

【解答】(1) BD=$\sqrt{22}$ (2) AC=$\dfrac{10\sqrt{22}}{11}$ (3) $S=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ (4) BE=$\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$ (5) $\sin\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

【練習】

円に内接する四角形 ABCD において，AB=3，BC=5，CD=5，DA=8 とし，対角線 AC と BD の交点を E とする。
次のものを求めよ。

(1) AC の長さ　(2) BD の長さ　(3) 四角形 ABCD の面積 S　(4) AE の長さ　(5) $\sin\angle$AEB の値

【解答】(1) AC=7 (2) BD=$\dfrac{55}{7}$ (3) $S=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$ (4) AE=$\dfrac{24}{7}$ (5) $\sin\angle\mathrm{AEB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

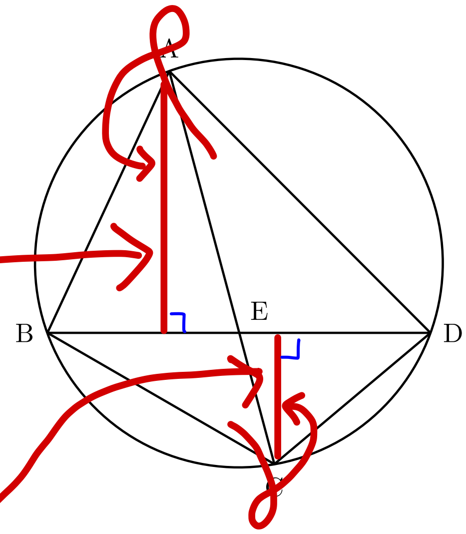
特集「円に内接する四角形」

【$180^\circ-\theta$ の公式】

$\sin(180^\circ-\theta)=$ $\sin\theta$ ， $\cos(180^\circ-\theta)=$ $-\cos\theta$ ， $\tan(180^\circ-\theta)=$ $-\tan\theta$

【カニカニの公式】

円に内接する四角形 ABCD において，対角線 AC と BD の交点を E とする。
△ABD : △BCD=(AB×AD):(CB×CD) であるから，
BD を底辺，AE と EC を高さとして見れば
AE:EC=(AB×AD):(CB×CD) が成り立つ。



(証明) $A+C=180^\circ$ より $\sin A=$ $\sin(180^\circ-C)=\sin C$
であるから，

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin A}{\frac{1}{2}\cdot CB\cdot CD\cdot\underbrace{\sin C}_{=\sin A}}=\frac{AB\times AD}{CB\times CD}\quad\cdots\cdots①$$

また，$\angle AEB=\angle CED$
であるから，

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle BCD}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot(\boxed{AE})\cdot\sin\angle AEB}{\frac{1}{2}\cdot BD\cdot(\boxed{EC})\cdot\sin\angle CED}=\frac{AE}{EC}\quad\cdots\cdots②$$

高さ

高さ

以上 ①，② より，

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB\times AD}{CB\times CD}\qquad\therefore AE:EC=(AB\times AD):(CB\times CD)$$

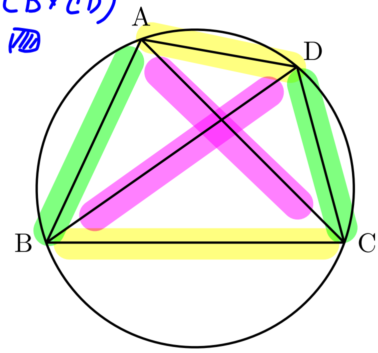
【トレミーの定理】

円に内接する四角形において，

AB×CD+AD×BC=AC×BD

が成り立つ。(証明略)

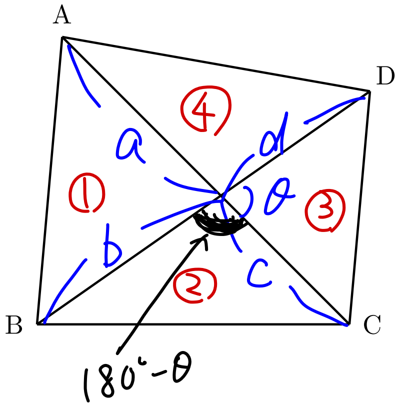
(向かい合う辺の積)+(向かい合う辺の積)=(対角線の積)



【四角形の対角線と面積】

四角形 ABCD の面積を S，対角線 AC と BD のなす角を θ とする。
このとき，$S=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\sin\theta$ を示せ。(円に内接しなくても成り立つ。)→章末 p172　演習問題 A　4

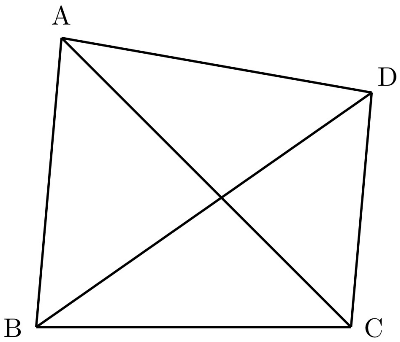
$AC=a+c$ ， $BD=b+d$



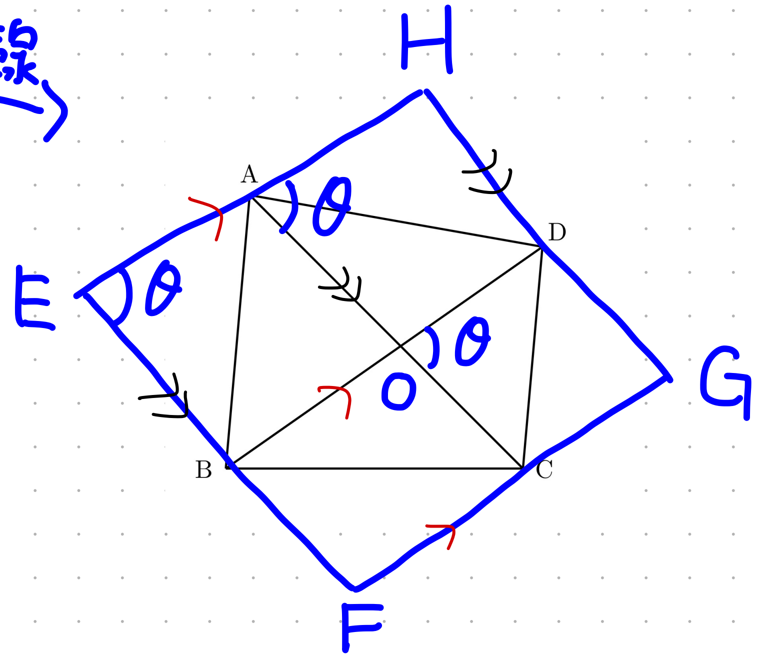
$S=$ ①+②+③+④ だから

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}bc\underbrace{\sin(180^\circ-\theta)}_{=\sin\theta}\\&\quad+\frac{1}{2}cd\sin\theta+\frac{1}{2}da\underbrace{\sin(180^\circ-\theta)}_{=\sin\theta}\\&=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\{b(a+c)+d(c+a)\}\sin\theta\\&=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta\\&=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\theta\end{aligned}$$

次のページに別解あり



補助線



$AC // EF // HG$
$BD // EH // FG$
をみたすように線を引くと
$AC = EF = HG$
$BD = EH = FG$

AEBO, BFCO, CGDO, DHAO, EFGH はすべて平行四辺形で
平行四辺形の対角線は平行四辺形を2等分するから

$$\text{四角形}ABCD = \frac{1}{2} \times \text{▱}EFGH \cdots ①$$

ここで ▱EFGH の面積について

$$\text{▱}EFGH = 2 \times \triangle EFH$$
$$= 2 \times \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EH \sin\theta$$
$$= AC \times BD \times \sin\theta \cdots ②$$

$EF = AC$
$EH = BD$

①に②を代入して

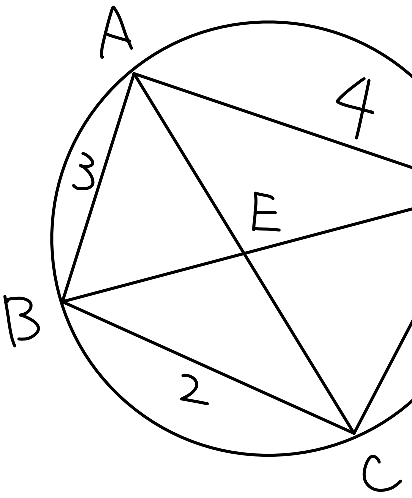
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\theta$$ が成り立つ

▨

【例題　カニカニ作戦】

円に内接する四角形 ABCD において，AB=3，BC=2，CD=4，DA=4 とし，対角線 AC と BD の交点を E とする。次のものを求めよ。

(1) BD の長さ　(2) AC の長さ　(3) 四角形 ABCD の面積 S　(4) BE の長さ　(5) $\sin\angle$AEB の値



(1) △ABD について余弦定理より

$BD^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot3\cdot4\cos A$

$\therefore BD^2 = 25 - 24\cos A \cdots\cdots$ ①

△BCD について余弦定理

$BD^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot2\cdot4\cos C$

$A + C = 180°$ より $C = 180° - A$

$\cos C = \cos(180° - A) = -\cos A$.

$\therefore BD^2 = 20 + 16\cos A \cdots$ ②

①.② で BD^2 を消去して

$25 - 24\cos A = 20 + 16\cos A$

$5 = 40\cos A$

$\cos A = \dfrac{1}{8}$

①より $BD^2 = 25 - 24\times\dfrac{1}{8} = 22$

$BD > 0$ より　$BD = \sqrt{22}$ //

(2) トレミーの定理より

$AB\times CD + BC\times DA = AC\times BD$

$3\times4 + 2\times4 = AC\times\sqrt{22}$

よって $AC = \dfrac{20}{\sqrt{22}} = \dfrac{20\sqrt{22}}{22} = \dfrac{10\sqrt{22}}{11}$ //

(3) $0° < A < 180°$ より $\sin A > 0$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$\sin C = \sin(180° - A) = \sin A = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

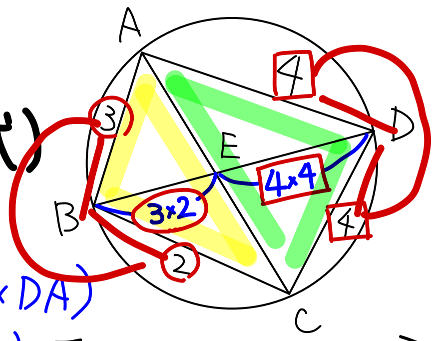
よって

四角形ABCD $= \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \dfrac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

$= \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ //

(4) (カニカニの公式)



$BE : ED$

$= (BA\times BC) : (DC\times DA)$

$= (3\times2) : (4\times4)$

$= 3 : 8$ だから

$\left[\triangle : \triangle = (3\times2):(4\times4)\right]$

$BE = \dfrac{3}{3+8}\times BD = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$ //

(5)

$\begin{pmatrix}\text{四角形}\\ ABCD\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle AEB$ より

$\dfrac{1}{2}\times\underbrace{\dfrac{10\sqrt{22}}{11}}_{(2)}\times\underbrace{\sqrt{22}}_{(1)}\times\sin\angle AEB = \underbrace{\dfrac{15\sqrt{7}}{4}}_{(3)}$

$10\sin\angle AEB = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

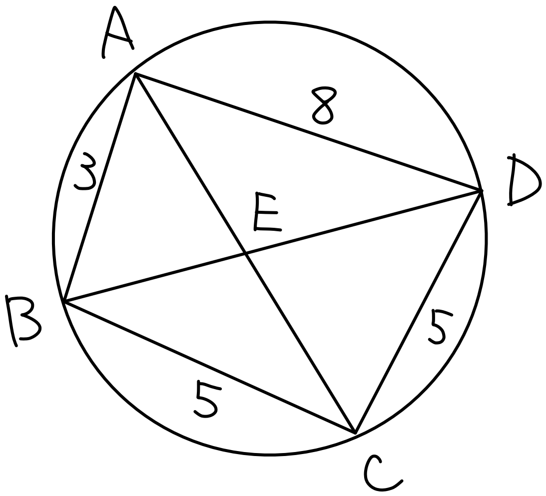
$\sin\angle AEB = \dfrac{15\sqrt{7}}{40} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ //

【解答】(1) BD=$\sqrt{22}$　(2) AC=$\dfrac{10\sqrt{22}}{11}$　(3) $S = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$　(4) BE=$\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$　(5) $\sin\angle AEB = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

【練習】

円に内接する四角形 ABCD において，AB=3，BC=5，CD=5，DA=8 とし，対角線 AC と BD の交点を E とする。次のものを求めよ。

(1) AC の長さ (2) BD の長さ (3) 四角形 ABCD の面積 S (4) AE の長さ (5) $\sin\angle\mathrm{AEB}$ の値



(1) $\triangle ABC$ について余弦定理より

$AC^2 = 3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos B$

$AC^2 = 34-30\cos B$ …… ①

$\triangle ACD$ について余弦定理

$AC^2 = 5^2+8^2-2\cdot5\cdot8\cos D$

$B+D=180^\circ$ より $D=180^\circ-B$

$\cos D = \cos(180^\circ-B) = -\cos B$

$\therefore AC^2 = 89+80\cos B$ …②

①, ② で AC^2 を消去して

$34-30\cos B = 89+80\cos B$

$-55 = 110\cos B$

$\cos B = -\frac{1}{2}$

① より $AC^2 = 34-30\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 49$

$AC>0$ より $AC=7$ //

(2) トレミーの定理より

$AB\times CD + BC\times DA = AC\times BD$

$3\times5 + 5\times8 = 7\times BD$

よって $BD = \frac{55}{7}$ //

(3) $0^\circ<B<180^\circ$ より $\sin B>0$ だから

$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin D = \sin(180^\circ-B) = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって

四角形ABCD $= \triangle ABC + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{55\sqrt{3}}{4}$ //

(4) $AE:EC = (AB\times AD):(CB\times CD)$

$= (3\times8):(5\times5)$

$= 24:25$

$AE = \frac{24}{24+25}\times AC = \frac{24}{49}\times7 = \frac{24}{7}$ //

(5)

(四角形ABCD) $= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle AEB$ より

$\frac{1}{2}\times7\times\frac{55}{7}\times\sin\angle AEB = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

$\sin\angle AEB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ //

【解答】(1) AC=7 (2) BD=$\frac{55}{7}$ (3) $S=\frac{55\sqrt{3}}{4}$ (4) AE=$\frac{24}{7}$ (5) $\sin\angle\mathrm{AEB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$