ショートトライアル　漸化式　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 4a_n$

(2) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = a_n + 3$

(3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4n - 2$

(4) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 6$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 4a_n$　（等比型）

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$$

(2) $a_1 = 6,\ a_{n+1} = a_n + 3$　（等差型）

$$a_n = 6 + (n-1) \times 3$$

$$\therefore a_n = 3n + 3$$

(3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4n - 2$　（階差型）

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)$$

$$= 2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 2 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} - 2(n-1)$$

$$= 2 + 2n(n-1) - 2n + 2$$

$$= 2 + 2n^2 - 2n - 2n + 2$$

$$= 2n^2 - 4n + 4 = 2(n^2 - 2n + 2)$$

$n = 1$ のとき $a_1 = 2(1-2+2) = 2$ で成り立つ

よって

$$a_n = 2(n^2 - 2n + 2)$$

(4) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 6$　（$a_n = pa_n + q$ 型　c を使う型）

$$a_{n+1} + 3 = 3(a_n + 3)$$

数列 $\{a_n + 3\}$ は初項 $a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

公比 3 なので $a_n + 3 = 5 \cdot 3^{n-1}$

$$\therefore a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 3$$

以下計算用紙に

$$a_{n+1} = 3a_n + 6$$

$$\rightarrow c = 3c + 6$$

$$a_{n+1} - c = 3(a_n - c)$$

$$a_n + 3 = 3(a_n + 3)$$

$c = 3c + 6$ は特性方程式という

解くと $-2c = 6$

$c = -3$

ショートトライアル　漸化式　2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} - a_n = -5$

(2) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = 3a_n$

(3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$

(4) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3^n$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} - a_n = -5$　（等差型）

$a_n = 2 + (n-1)\times(-5)$

$\therefore a_n = -5n + 7$ //

(2) $a_1 = 9,\ a_{n+1} = 3a_n$　（等比型）

$a_n = 9 \cdot 3^{n-1} = 3^2 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$ //

(3) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$　（$a_{n+1} = pa_n + q$ 型 cを使う型）

$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

公比 3 だから　$a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = 3^{n-1} + 1$ //

（計算用紙に）

$a_{n+1} = 3a_n - 2$

$-)\ \ c = 3c - 2$ ← 特性方程式

解くと $c = 1$

$a_{n+1} - c = 3(a_n - c)$

$a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$

(4) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3^n$　（階差型）

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 3^{k-1}$$ ← 初項3, 公比3, 項数 $n-1$ の等比数列の和

$$= 2 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{4 + 3^n - 3}{2}$$

$$= \frac{3^n + 1}{2}$$

$n = 1$ のとき $a_1 = \dfrac{3^1 + 1}{2} = 2$ で成り立つ

よって

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}$$ //

(1)〜(4) は漸化式の一般項を求めるための必須スキルです。100% マスターしておいて下さい。

ショートトライアル　漸化式　3

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 12,\ a_{n+1} = a_n - 5$

(2) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$

(3) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 12,\ a_{n+1} = a_n - 5$　（等差型）

$$a_n = 12 + (n-1)\cdot(-5)$$

$$\therefore a_n = -5n + 17$$

(2) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$　（$a_{n+1} = pa_n + q$ 型）

特性方程式

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ -) & c = 2c + 1 \\ \hline & a_{n+1} - c = 2(a_n - c) \end{array}$$

$c = -1$ より

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は

初項 $a_1 + 1 = 4 + 1 = 5$，公比 2 なので

$$a_n + 1 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 1$$

(3) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

↓ 両辺を 2^{n+1} でわる

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3 \times a_n}{2 \times 2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1} = \frac{3}{2} b_n + \frac{1}{2} \\ -) & c = \frac{3}{2} c + \frac{1}{2} \\ \hline & b_{n+1} - c = \frac{3}{2}(b_n - c) \end{array}$$

$c = -1$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = \frac{3}{2} b_n + \frac{1}{2}$ …… ①

$$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$① \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2 + 1 = 3$，

公比 $\frac{3}{2}$ なので

$$b_n + 1 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 3 \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - 1 = \frac{3^n}{2^{n-1}} - 1$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{3^n}{2^{n-1}} - 1$$

$$a_n = \left(\frac{3^n}{2^{n-1}} - 1\right) \times 2^n$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

point

$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型は q^{n+1} で割ると

$\frac{a_n}{q^n} = b_n$ と置き換えができる

ショートトライアル　漸化式　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4^n$

(3) $a_1 = \frac{1}{5},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 2}$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$　（等比型）

$$a_n = 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 4^n$　（階差型）

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 4\cdot 4^{k-1}}$

初項4. 公比4 項数 $n-1$ の等比数列の和.

$$= 2 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{6+4^n-4}{3} = \frac{4^n+2}{3} \cdots ①$$

①に $n=1$ 代入すると $a_1 = \frac{4^1+2}{3} = 2$ で成り立つ

以上より

$$a_n = \frac{4^n+2}{3}$$

(3) $a_1 = \frac{1}{5},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 2}$

$a_n \neq 0$ より 逆数をとって $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+2}{a_n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n}{a_n} + \frac{2}{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = 3 + 2\times\frac{1}{a_n}$

ここで $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 3 + 2b_n$

$b_{n+1} = 2b_n + 3$, $b_1 = \frac{1}{a_1} = 5$.

$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 3 = 5 + 3 = 8$.

公比2 なので $b_n + 3 = 8\cdot 2^{n-1}$

$$b_n = 8\cdot 2^{n-1} - 3$$

$$\frac{1}{a_n} = 8\cdot 2^{n-1} - 3$$

$$a_n = \frac{1}{8\cdot 2^{n-1} - 3}$$

← $\frac{1}{2^{n+2}-3}$ でもOK

point

分数型は逆数をとって $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおく.

ショートトライアル　漸化式　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{3},\ 2a_{n+1} = 5a_n$

(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{3},\ 2a_{n+1} = 5a_n$　$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{5}{2}a_n$

(等比型)　$a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ //

(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1$　(階差型)

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$
$$= 3 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\} + (n-1)$$
$$= 3 + n(n-1) + (n-1)$$
$$= 3 + n^2 - n + n - 1$$
$$= n^2 + 2$$

$n=1$ のとき $a_1 = 1^2 + 2 = 3$ で成り立つ

よって $a_n = n^2 + 2$ //

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n$

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n$ ……① とする

① $\Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} + 2a_n)$

数列 $\{a_{n+1} + 2a_n\}$ は初項 $a_2 + 2a_1 = 1 + 2\cdot 0 = 1$

公比 5 なので $a_{n+1} + 2a_n = 1\cdot 5^{n-1}$ ……②

① $\Leftrightarrow a_{n+2} - 5a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 5a_n)$

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は初項 $a_2 - 5a_1 = 1 - 5\cdot 0 = 1$

公比 -2 なので $a_{n+1} - 5a_n = 1\cdot(-2)^{n-1}$ ……③

$$\begin{array}{rl} ② & a_{n+1} + 2a_n = 5^{n-1} \\ -)\ ③ & a_{n+1} - 5a_n = (-2)^{n-1} \\ \hline & 7a_n = 5^{n-1} - (-2)^{n-1} \end{array}$$

$$\therefore a_n = \frac{5^{n-1} - (-2)^{n-1}}{7}$$ //

point　隣接三項間漸化式の基本

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n$ の特性方程式 $t^2 = 3t + 10$ を解くと $t = -2, 5$

これを使って①を変形して等比数列を2つ作る(②③ができる)あとは a_{n+1} を消去

ショートトライアル　漸化式　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 5$$

$$\therefore \underline{a_n = 5n - 3}$$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 3 なので $a_n + 1 = 2\cdot 3^{n-1}$

$$\therefore \underline{a_n = 2\cdot 3^{n-1} - 1}$$

(3) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ …① とすると

① ⇔ $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 2 - 2\cdot 0 = 2$

公比 2 なので $a_{n+1} - 2a_n = 2\cdot 2^{n-1}$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 2^n \quad \cdots ②$$

②の両辺を 2^{n+1} でわると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2\times a_n}{2\times 2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと $b_1 = \frac{a_1}{2^1} = 0$

$$③ \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 0$：公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列なので $b_n = 0 + (n-1)\times\frac{1}{2}$

$$\therefore b_n = \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{n-1}{2}$$

よって $a_n = \frac{n-1}{2}\times 2^n = \underline{(n-1)\cdot 2^{n-1}}$

point $t^2 - 4t + 4 = 0$ は重解 $t = 2$ だが、
等比数列で②を出せば $a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型。
q^{n+1} で割ってからの置き換えだ。

ショートトライアル　漸化式　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3$

(2) $a_1 = 10,\ 2a_{n+1} = a_n + 6$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3$

$a_n = 2 + (n-1)\cdot(-3)$

$\therefore a_n = -3n + 5$ //

(2) $a_1 = 10,\ 2a_{n+1} = a_n + 6$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$

$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$

数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 $a_1 - 6 = 10 - 6 = 4$

公比 $\frac{1}{2}$ だから

$a_n - 6 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 6$ //

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$ …… (＊)とする

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1) - 1$

$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 3b_n + 2$ …… ①

また $a_2 = 3a_1 + 2\times1 - 1 = 3\times1 + 2 - 1 = 4$ より

$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$

① ⇔ $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3 + 1 = 4$

公比 3 なので $b_n + 1 = 4\cdot3^{n-1}$

$b_n = 4\cdot3^{n-1} - 1$

$\therefore a_{n+1} - a_n = 4\cdot3^{n-1} - 1$ …… ②

②より $a_{n+1} - a_n = 4\cdot3^{n-1} - 1$

−) (＊)より $a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$

$2a_n = 4\cdot3^{n-1} - 2n$

$\therefore a_n = 2\cdot3^{n-1} - n$ //