2023 年　新潟大学　理系　前期

$\boxed{1}$　a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a,\ 0)$，点 B を $(a,\ a^2)$，点 C を $(-1,\ 1)$，点 D を $(-1,\ 0)$ とし，曲線 E を $y = x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{2}$　一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\boxed{3}$　k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$A = \{\ x \mid x^3 - x^2 - (k^2+4k+4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\ \}$

$B = \{\ x \mid x^3 - (k^2+3k+3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\ \}$

次の問いに答えよ。

(1) $k = -1$ のとき，集合 A，B，$A \cap B$，$A \cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{4}$　a，b を正の数とし，座標平面上の曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = \sqrt{2x-b}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x-b}$ の導関数を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3) (2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

$\boxed{5}$　複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$\omega = -\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z \neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z = i$ のときの ω の実部と虚部を求めよ。

(2) z を ω を用いて表せ。

(3) 点 ω の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|\,\omega\,|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

$\boxed{6}$　座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

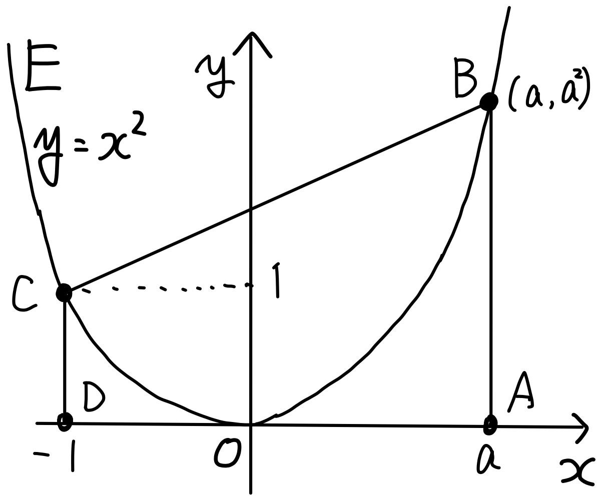
(2) 点 P が S 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

1　a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a,\ 0)$，点 B を $(a,\ a^2)$，点 C を $(-1,\ 1)$，点 D を $(-1,\ 0)$ とし，曲線 E を $y = x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。



(1) 直線BCの方程式は

$$y-1=\frac{a^2-1}{a-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$y-1=\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}(x+1)$$

$$y-1=(a-1)(x+1)$$

$$y=(a-1)x-a$$

$$S=\int_{-1}^{a}\{(a-1)x+a-x^2\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{a}\{x^2+(-a+1)x-a\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{a}(x-a)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{a-(-1)\}^3=\frac{1}{6}(a+1)^3$$

題意より

$$S=T=\frac{1}{6}(a+1)^3 \cdots ①$$

また

$$台形ABCD=\frac{1}{2}\{a-(-1)\}(1+a^2)$$

$$=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)$$

ここで $S+T=台形ABCD \cdots ②$

と①より

$$S+S=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)$$

$$2S=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)$$

$$2\times\frac{1}{6}(a+1)^3=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)$$

$$\frac{1}{3}(a+1)^3-\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)=0$$

$$(a+1)\left\{\frac{1}{3}(a+1)^2-\frac{1}{2}(a^2+1)\right\}=0$$

$$(a+1)\{2(a+1)^2-3(a^2+1)\}=0$$

$$(a+1)(2a^2+4a+2-3a^2-3)=0$$

$$(a+1)(-a^2+4a-1)=0$$

$$(a+1)(a^2-4a+1)=0$$

$$a=-1,\ 2\pm\sqrt{3}$$

$1 \leqq a \leqq 4$ より

$$\underline{a=2+\sqrt{3}}$$ //

(2) ②より

$$S+T=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)\text{から}$$

$$T=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)-S$$

両辺からSを引いて

$$T-S=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)-2S$$
$$=\frac{1}{2}(a+1)(a^2+1)-2\cdot\frac{1}{6}(a+1)^3$$
$$=\frac{1}{6}(3a^3+3a^2+3a+3-2a^3-6a^2-6a-2)$$
$$=\frac{1}{6}(a^3-3a^2-3a+1)$$

$f(a)=a^3-3a^2-3a+1$ とする

$|f(a)|$が最大のとき、SとTの差が最大となる。

$$f'(a)=3a^2-6a-3$$
$$=3(a^2-2a-1)$$

a	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$	4
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	-4	↘	極小	↗	5

$$f(1)=1-3-3+1=-4$$
$$f(4)=64-48-12+1=5$$

$$\begin{array}{r} a-1 \\ a^2-2a-1\overline{)\,a^3-3a^2-3a+1} \\ a^3-2a^2-a \\ \hline -a^2-2a+1 \\ -a^2+2a+1 \\ \hline -4a \end{array}$$

$$f(a)=\frac{1}{3}(a-1)(3a^2-6a-3)-4a$$

で $a=1+\sqrt{2}$ のとき

$3a^2-6a-3=0$ だから

$$f(1+\sqrt{2})=-4(1+\sqrt{2})$$

$1<2$ より $\sqrt{1}<\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}$ だから

両辺+1して $2<1+\sqrt{2}$

−4倍して $-4(1+\sqrt{2})<-8$

よって

$$|-4|<|5|<|-4(1+\sqrt{2})|$$

すなわち

$$|f(1)|<|f(4)|<|f(1+\sqrt{2})|$$

よってSとTの差が最大となるのは

$$\underline{a=1+\sqrt{2}}\,/\!/$$

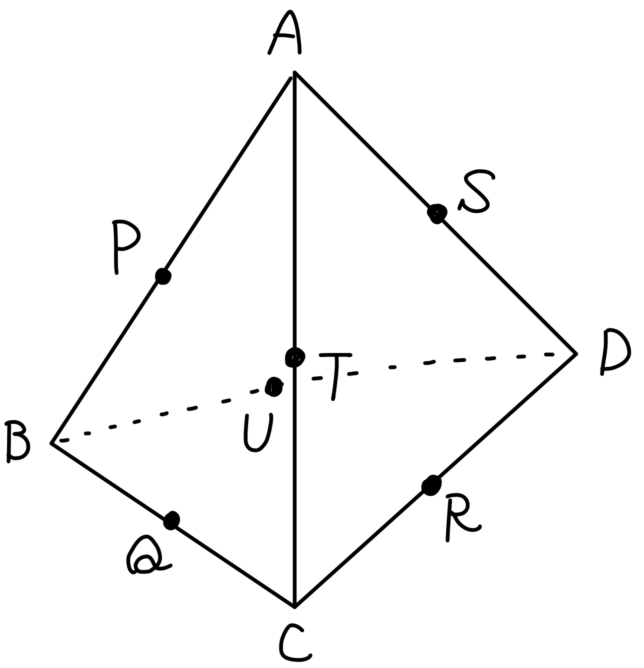
のときである

[2] 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) cos∠SBR の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

とおく. $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=2$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}$

$=2\times2\times\cos60^\circ=2$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$ より

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

$|\overrightarrow{PR}|^2=\frac{1}{4}|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|^2$

$=\frac{1}{4}(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2$
$-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{d}\cdot\vec{b})$

$=\frac{1}{4}(4+4+4-4+4-4)=2$

$|\overrightarrow{PR}|\geqq0$ より $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{2}$

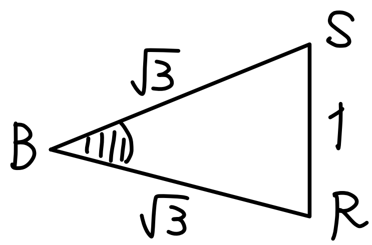
$\therefore PR=\sqrt{2}$ //

(2) 三平方の定理により

$BS=BR=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

中点連結定理より

$SR=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times2=1$



余弦定理より

$\cos\angle SBR=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-1}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$=\frac{5}{6}$ //

四面体ABCDの体積をVとすると

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle AQD\cdot 1\times 2$ である.

$QA=QD=\sqrt{3}$

$\angle AQD=\theta$ とおくと 余弦定理より

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

$0°<\theta<180°$ より $\sin\theta>0$ だから

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって

$\triangle AQD=\frac{1}{2}\cdot QA\cdot QD\cdot\sin\theta$

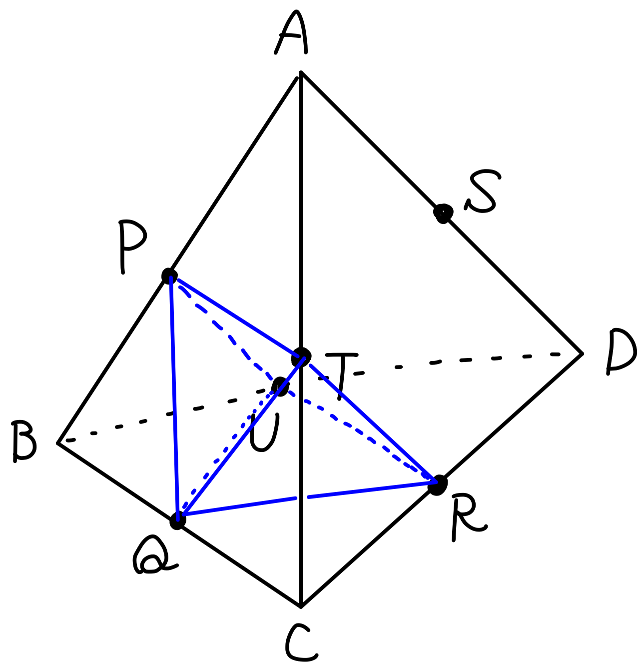
$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\times 1\times 2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

P, Q, R, S, T, Uは各辺の中点なので 四角錐Q-PTRUの体積は正八面体QPTRUSの体積の半分である

また, 四面体APTS, DSUR BPQU, CQRTの体積はすべて等しく $\frac{1}{8}V$ なので

相似比 1:2 なので
体積比 $1:2^3$



よって

$2\times$四角錐Q-PTRU $=V-\frac{1}{8}V\times 4$

$2\times$四角錐Q-PTRU $=\frac{1}{2}V$

四角錐Q-PTRU $=\frac{1}{4}V$

四角錐Q-PTRU $=\frac{1}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ //

3 kを実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合A，Bを次のように定める。

$$A = \{\, x \mid x^3 - x^2 - (k^2+4k+4)x + k^2 + 4k + 4 = 0 \,\}$$
$$B = \{\, x \mid x^3 - (k^2+3k+3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0 \,\}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k=-1$のとき，集合A，B，$A\cap B$，$A\cup B$を，$\{a,\ b,\ c\}$のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合Bが集合Aの部分集合となるようなkの値をすべて求めよ。そのようなkの値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合$A\cup B$の要素の個数を求めよ。

$$\begin{array}{r}
x - (k^2+3k+3) \\
x^2+k^2 \,\big)\, \overline{x^3 - (k^2+3k+3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2} \\
\underline{x^3 \qquad\qquad\qquad + k^2x \qquad\qquad\qquad} \\
-(k^2+3k+3)x^2 \qquad\quad - k^2(k^2+3k+3) \\
\underline{-(k^2+3k+3)x^2 \qquad\quad - k^2(k^2+3k+3)} \\
0
\end{array}$$

(1) $k=-1$のとき．

$A = \{x \mid x^3 - x^2 - x + 1 = 0\}$

$B = \{x \mid x^3 - x^2 + x - 1 = 0\}$

Aについて

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$x^2(x-1) - (x-1) = 0$

$(x^2-1)(x-1) = 0$

$(x+1)(x-1)^2 = 0$

$x = -1.\ 1$

よって $A = \{-1,\ 1\}$ //

Bについて

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

$x^2(x-1) + (x-1) = 0$

$(x^2+1)(x-1) = 0$

$x = 1$

よって $B = \{1\}$ //

＊ ここから x^2+k^2を因数にもつことを見抜ける？

$A \cap B = \{1\}$ //

$A \cup B = \{-1,\ 1\}$ //

(2) Aについて

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & -1 & -k^2-4k-4 & k^2+4k+4 \\
 & & 1 & 0 & -k^2-4k-4 \\
\hline
 & 1 & 0 & -k^2-4k-4 & 0
\end{array}$$

$(x-1)(x^2-k^2-4k-4) = 0$

$(x-1)\{x^2-(k+2)^2\} = 0$

$(x-1)\{x+(k+2)\}\{x-(k+2)\} = 0$

$x = 1,\ -k-2,\ k+2.$

よって $A = \{1,\ -k-2,\ k+2\}$

Bについて＊

$(x^2+k^2)\{x-(k^2+3k+3)\} = 0$

$k^2 \geqq 0$ （$\because k$実数）

$x^2+k^2=0$が実数解をもつのは

$k=0$のときである．

このとき $A = \{1,\ -2\ \ 2\}$

$B = \{0,\ 3\}$

BはAの部分集合にならない

よってBがAの部分集合になるのは

① $k^2+3k+3=1$

② $k^2+3k+3=-k-2$

③ $k^2+3k+3=k+2$

であるから

①のとき $k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-2,-1$

$k=-2$のとき

$A=\{0,1\}$ $B=\{1\}$より $A\supset B$

$k=-1$のとき

$A=\{-1,1\}$ $B=\{1\}$より $A\supset B$

②のとき $k^2+4k+5=0$

判別式Dとすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$$

kは実数ではないので不適

③のとき $k^2+2k+1=0$

$(k+1)^2=0$

$k=-1$

このとき $A=\{-1,1\}$, $B=\{1\}$ $\therefore A\supset B$

以上より $A\supset B$ となるようなkの値は

$k=-2,-1$ //

(3) 集合Aについて

$A=\{1,-k-2,k+2\}$は

$1=-k-2$ より $k=-3$

$1=k+2$ より $k=-1$

$-k-2=k+2$ より $k=-2$

要素の個数が2個になる条件を調べる

すなわち $k=-3,-2,-1$ のとき

集合Aの要素の個数が2個となり

$k=-2$のときは(2)より $A\cup B=\{0,1\}$ 2コ

$k=-1$のときは(2)より $A\cup B=\{-1,1\}$ 2コ

$k=-3$のときは $A=\{1,-1\}$, $B=\{9\}$

$A\cup B=\{1,-1,9\}$ 3コ

このときだけ $A\not\supset B$

集合Bについて

$k=0$のとき $A=\{1,-2,2\}$, $B=\{0,3\}$

$A\cup B=\{-2,0,1,2,3\}$ 5コ

$k\neq0$のとき $B=\{k^2+3k+3\}$で

集合Bの要素の個数が1個となり

$k\neq-3,-2,-1,0$のときは

$A=\{1,-k-2,-k+2\}$ $B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,-k-2,-k+2,k^2+3k+3\}$ 4コ

以上より

$k\neq-3,-2,-1,0$ のとき 4個

$k=-3$ のとき 3個

$k=-2,-1$ のとき 2個

$k=0$ のとき 5個 //

$\boxed{4}$ a，b を正の数とし，座標平面上の曲線

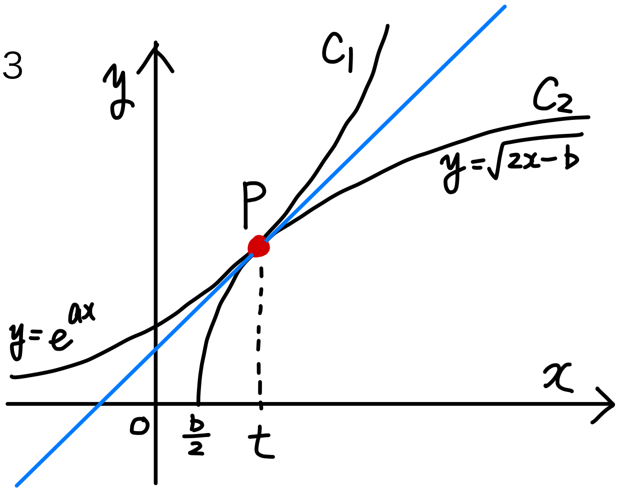
$$C_1 : y = e^{ax}, \quad C_2 : y = \sqrt{2x - b}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x-b}$ の導関数を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3) (2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。



(1) $\underline{y' = ae^{ax}}$ //

$y = (2x-b)^{\frac{1}{2}}$ より

$$y' = \frac{1}{2}(2x-b)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{2x-b}}} \ //$$

(2) $f(x) = e^{ax}$，$g(x) = \sqrt{2x-b}$ とすると

$$f'(x) = ae^{ax}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-b}}$$

接点のx座標をtとする

$f(x)$ と $g(x)$ は共通の接線をもつので

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} e^{at} = \sqrt{2t-b} & \cdots\cdots ① \\ ae^{at} = \dfrac{1}{\sqrt{2t-b}} & \cdots ② \end{cases}$$

① を ② に代入して e^{at} を消去すると

$$a\sqrt{2t-b} = \frac{1}{\sqrt{2t-b}}$$

$$a(2t-b) = 1$$

$$2t - b = \frac{1}{a} \quad ③$$

③ を ① に代入して

$$e^{at} = \sqrt{\frac{1}{a}} \Leftrightarrow e^{at} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdots ④$$

$$\Leftrightarrow \quad at = \log\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$t = \frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\log a$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2a}\log a \cdots ⑤$$

⑤ を ③ に代入して

$$2\times\left(-\frac{1}{2a}\log a\right) - b = \frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a}\log a - b = \frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\log a = b$$

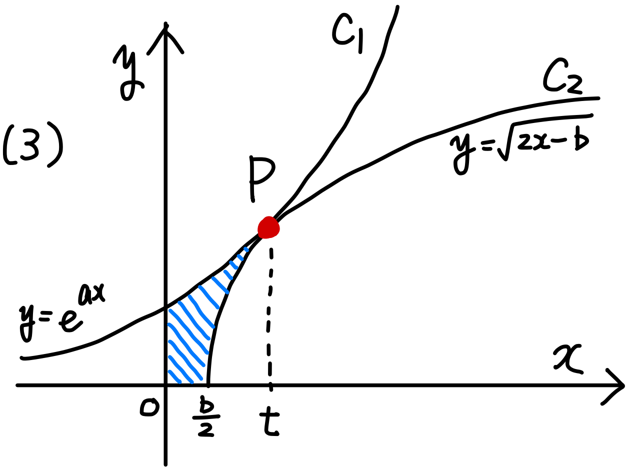
$$\therefore \underline{b = -\frac{1}{a}(1 + \log a)} \ //$$

また $f(t) = e^{at}$ ← ④を代入

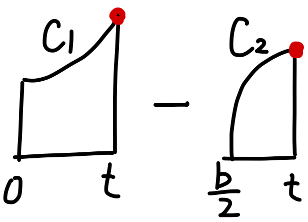
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{だから}$$

$$\underline{P\left(-\frac{1}{2a}\log a, \ \frac{1}{\sqrt{a}}\right)} \ //$$

(3)



求める面積を S とすると

$S =$ 

$$= \int_0^t e^{ax}dx - \int_{\frac{b}{2}}^{t} \sqrt{2x-b}\,dx \cdots (*)$$

$$\int_0^t e^{ax}dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{a}(e^{at} - e^0)$$

$$= \frac{1}{a} \times \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{a}} - \frac{1}{a}$$

$$\int_{\frac{b}{2}}^{t} \sqrt{2x-b}\,dx$$

$$= \int_{\frac{b}{2}}^{t} (2x-b)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-b)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{b}{2}}^{t}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{(2t-b)^{\frac{3}{2}} - 0\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3a\sqrt{a}}$$

(*)より

$$S = \left(\frac{1}{a\sqrt{a}} - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{3a\sqrt{a}}$$

$$= \frac{2}{3a\sqrt{a}} - \frac{1}{a}$$

//

5 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，
$\omega = -\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z \neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。
次の問いに答えよ。

(1) $z=i$ のときの ω の実部と虚部を求めよ。

(2) z を ω を用いて表せ。

(3) 点 ω の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|\,\omega\,|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

(1) $z=i$ のとき

$$\omega = -\frac{2(2\times i - i)}{i+1}$$
$$= -\frac{2i}{i+1}$$
$$= -\frac{2i(i-1)}{(i+1)(i-1)}$$
$$= -\frac{2(i^2-i)}{i^2-1}$$
$$= -\frac{2(-1-i)}{-1-1}$$
$$= -1-i$$

実部 -1，虚部 -1 //

(2) $\omega = -\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z \neq -1)$ より

$$\omega(z+1) = -2(2z-i)$$
$$\omega z + \omega = -4z + 2i$$
$$\omega z + 4z = -\omega + 2i$$
$$(\omega+4)z = -\omega + 2i \cdots ①$$

$\omega = -4$ は ① をみたさないので $\omega \neq -4$ より

$$z = \frac{-\omega + 2i}{\omega + 4} \quad (\omega \neq -4)$$ //

(3) z は原点を中心とする半径 1 の円周上だから

$$|z| = 1$$

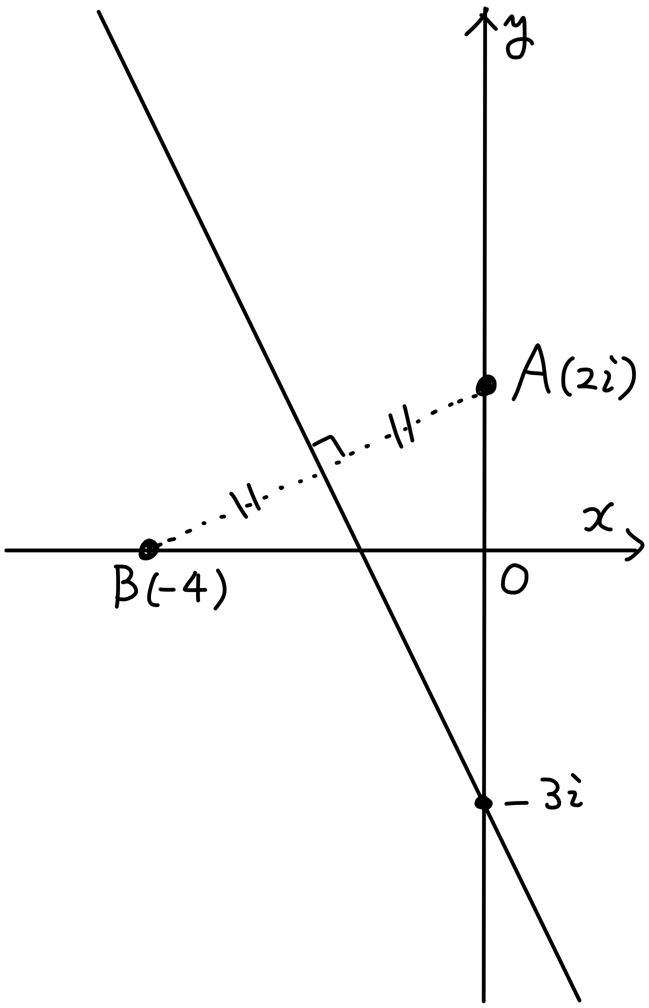
(2) の結果を代入して

$$\left|\frac{-\omega+2i}{\omega+4}\right| = 1$$
$$\frac{|-\omega+2i|}{|\omega+4|} = 1$$
$$|\omega - 2i| = |\omega - (-4)|$$

点 A$(2i)$，B(-4) とすると

ω は線分 AB の垂直二等分線 //

図示すると



(4) 座標平面で考えると

A(0, 2)、B(-4, 0) なので

直線ABの傾きは $\frac{1}{2}$ なので

ωは傾き-2でABの中点

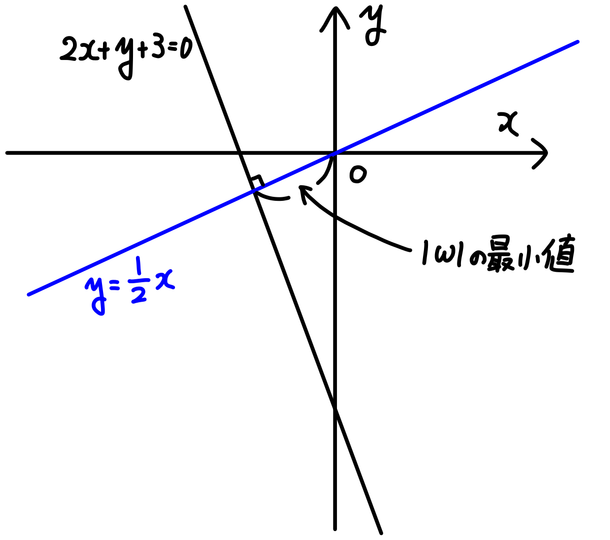
(-2, 1)を通る直線

よって $y-1=-2\{x-(-2)\}$

$$2x+y+3=0$$

$$|\omega|=\frac{3}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

これが|ω|の最小値.



$y=-2x$ に垂直で原点を通る直線は

$y=-\frac{1}{2}x$

$\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ y=-\frac{1}{2}x \end{cases}$ を解くと

$$(x, y)=\left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

よって $\omega=-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$

このとき

$$z=-\frac{-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i-2i}{-\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i+4}=\frac{6+13i}{14-3i}$$

$$=\frac{(6+13i)(14+3i)}{(14-3i)(14+3i)}$$

$$=\frac{84+18i+182i+39i^2}{196-9i^2}$$

$$=\frac{45+200i}{205}=\frac{9}{41}+\frac{40}{41}i$$

以上より|ω|は最小値 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

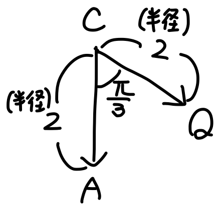
このとき $z=\frac{9}{41}+\frac{40}{41}i$ //

6 座標空間の 2 点 A(1, −1, 1)，B(1, −1, 5) を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，△ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 Q$(x,\ y,\ z)$ が $\angle\mathrm{QCA} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 R$(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。



$$\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-3\end{pmatrix}$$

(1) ABの中点が中心Cなので

$$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{-1-1}{2},\ \frac{1+5}{2}\right) \text{より}$$

$$\underline{C(1,-1,3)}\ //$$

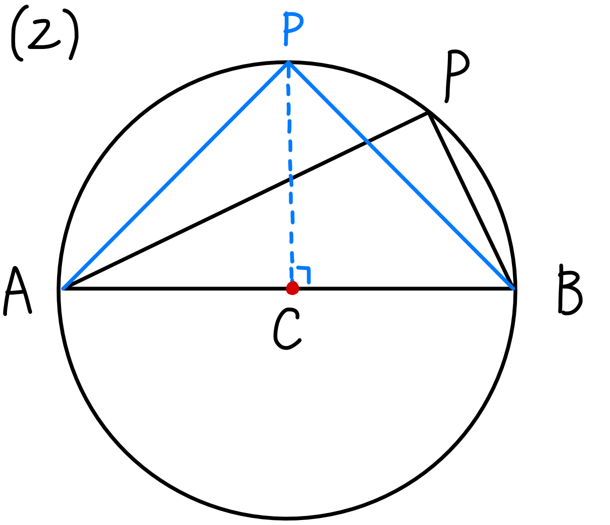
半径 = AC なので

$$\sqrt{(1-1)^2+\{-1-(-1)\}^2+(3-1)^2}$$
$$=2 \text{ だから}$$

球面Sの方程式は

$$\underline{S:(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4}\ //$$

(2)



図のように AB⊥CP のとき△ABPの面積は最大になるから このとき

AB = 4. CP = 2.

△ABPの面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot2=\underline{4}\ //$$

(3) Q(x, y, z) において

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CQ}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CQ}|\cos\frac{\pi}{3} \text{ だから}$$

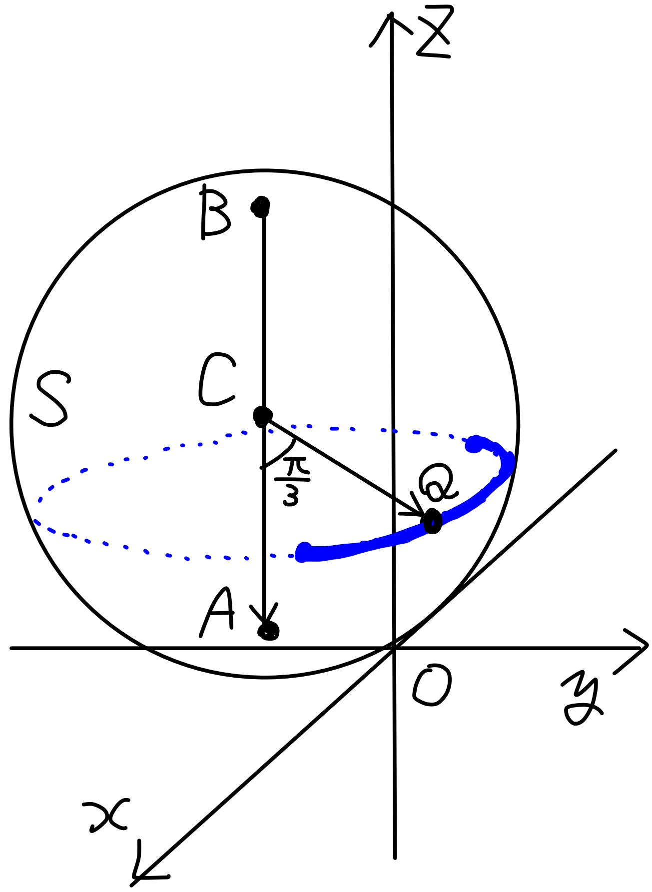
$$\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-3\end{pmatrix}=2\times2\times\frac{1}{2}$$

$$-2(z-3)=2 \qquad \therefore z=2$$

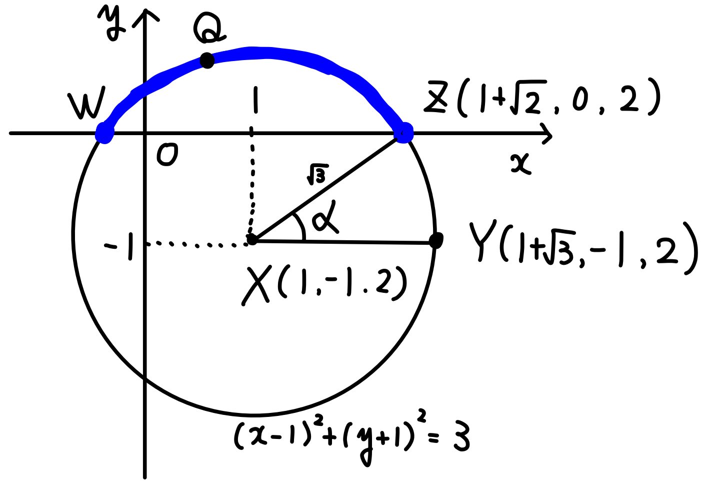
(1)のSの式にz=2を代入して

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(2-3)^2=4$$
$$(x-1)^2+(y+1)^2=3$$

点Qは平面z=2. 中心(1, −1, 2) 半径$\sqrt{3}$の円で$y\geqq0$の部分の周上にある

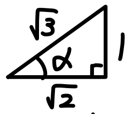


S を $z=2$ で切った断面図をかく



図のように点 X, Y, Z, W をおく

$\angle ZXY = \alpha$ とおく.



ただし $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

点Qは $\overset{\frown}{ZW}$ 上の点なので

円 $(x-1)^2+(y+1)^2=3$ を媒介変数 θ で表すと $Q(1+\sqrt{3}\cos\theta, -1+\sqrt{3}\sin\theta, 2)$

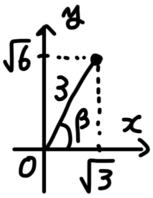
$(\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha)$ とおける.

$$\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}\cos\theta \\ -1+\sqrt{3}\sin\theta \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ \sqrt{3}\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\theta \\ \sqrt{3}\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{6}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta - 1$$
$$= \sqrt{3}\sin\theta + \sqrt{6}\cos\theta - 1$$
$$= 3\sin(\theta+\beta) - 1$$



ただし. β は $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をみたす.

$\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha$ より

$\alpha+\beta \leqq \theta+\beta \leqq \pi-\alpha+\beta$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 1$$

$$\left(\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 0\end{aligned}\right)$$
必要ないが

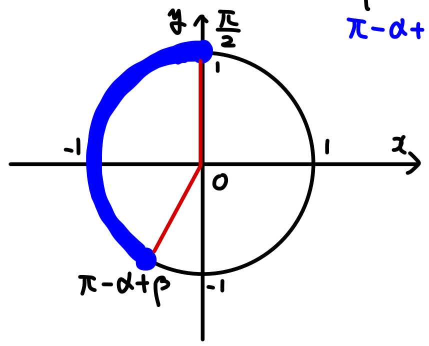
よって $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\sin(\pi-\alpha+\beta) = \sin(\alpha-\beta)$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$\cos(\pi-\alpha+\beta) = -\cos(\alpha-\beta)$$
$$= -(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$
$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} < 0$$

よって $\pi < \pi-\alpha+\beta < \dfrac{3}{2}\pi$

$\pi-\alpha+\beta$ は第3象限の角



図より

$$\sin(\pi-\alpha+\beta) \leqq \sin(\theta+\beta) \leqq \sin(\overset{\frac{\pi}{2}}{\alpha+\beta})$$

$$-\frac{1}{3} \leqq \sin(\theta+\beta) \leqq 1$$

$$-1 \leqq 3\sin(\theta+\beta) \leqq 3$$

$$-1-1 \leqq 3\sin(\theta+\beta)-1 \leqq 3-1$$

$$\therefore\ -2 \leqq \overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CR} \leqq 2$$

//

2023年　新潟大学　文系　前期

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 4a_n + 6n - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする。$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n を用いて表せ。

$\boxed{2}$ 一辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて，辺AB，BC，CD，DA，AC，BDの中点をそれぞれP，Q，R，S，T，Uとする。次の問いに答えよ。

(1) 線分PRの長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形PTRUを底面，点Qを頂点とする四角錐の体積を求めよ。

$\boxed{3}$ k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A = \{\ x\ \mid\ x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\ \}$$
$$B = \{\ x\ \mid\ x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\ \}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k = -1$ のとき，集合 A，B，$A \cap B$，$A \cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。

$\boxed{4}$ p は $p \geqq 0$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9 - p^2)x$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $p = 1$ のとき，$y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $f'(x) = 0$ となる x の値を p を用いて表せ。

(3) $x \geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 4a_n + 6n - 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とする。$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n を用いて表せ。

(1)

$$\begin{array}{rl} & a_{n+2} = 4a_{n+1} + 6(n+1) - 2 \\ -) & a_{n+1} = 4a_n + 6n - 2 \\ \hline & a_{n+2} - a_{n+1} = 4(a_{n+1} - a_n) + 6 \end{array}$$

だから

$b_{n+1} = 4b_n + 6 \quad \cdots\cdots ①$

$a_2 = 4a_1 + 6 \times 1 - 2$

$= 4 \times 1 + 6 - 2$

$= 8$ だから

$b_1 = a_2 - a_1 = 8 - 1 = 7.$

① は $b_{n+1} + 2 = 4(b_n + 2)$

数列 $\{b_n + 2\}$ は

初項 $b_1 + 2 = 7 + 2 = 9$

公比4の等比数列

$\therefore b_n + 2 = 9 \cdot 4^{n-1}$

$\therefore \underline{b_n = 9 \cdot 4^{n-1} - 2}$ //

(2) $b_n = 9 \cdot 4^{n-1} - 2$ より

$a_{n+1} - a_n = 9 \cdot 4^{n-1} - 2$

題意より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} - 4a_n = 6n - 2 \\ -) & a_{n+1} - a_n = 9 \cdot 4^{n-1} - 2 \\ \hline & -3a_n = 6n - 9 \cdot 4^{n-1} \end{array}$$

$\therefore \underline{a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2n}$ //

[別解] 階差数列で

$a_{n+1} - a_n = 9\cdot 4^{n-1} - 2$ より

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(9\cdot 4^{k-1} - 2)$$

$$= 1 + \frac{9(4^{n-1}-1)}{4-1} - 2(n-1)$$

$$= 1 + 3(4^{n-1}-1) - 2n + 2$$

$$= 1 + 3\cdot 4^{n-1} - 3 - 2n + 2$$

$$= 3\cdot 4^{n-1} - 2n \cdots (*)$$

(*) に $n=1$ 代入すると $a_1 = 3-2 = 1$

$n=1$ のとき成り立つ.

よって $\underline{a_n = 3\cdot 4^{n-1} - 2n}$ //

(3)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(3\cdot 4^{k-1} - 2k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3\cdot 4^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{3(4^n-1)}{4-1} - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= 4^n - 1 - n(n+1)$$

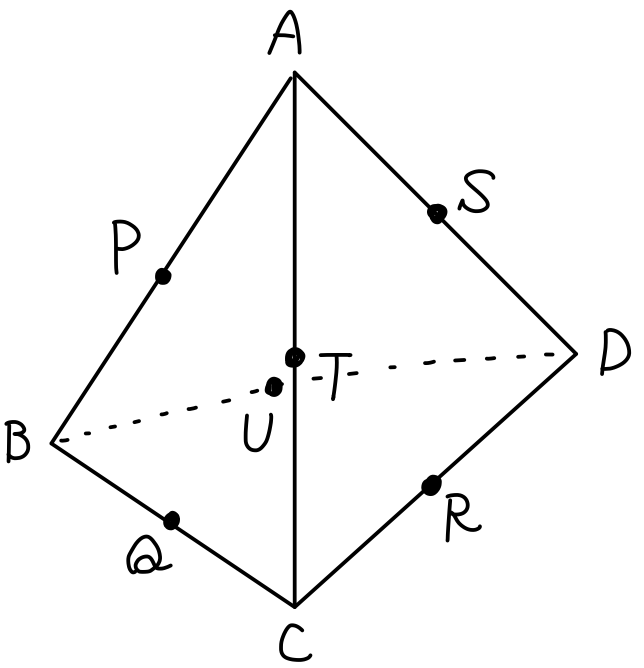
$$\underline{= 4^n - n^2 - n - 1}$$ //

$\boxed{2}$ 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

とおく. $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=2$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{b}$

$=2\times2\times\cos60^\circ=2$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AR}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$ より

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

$|\overrightarrow{PR}|^2=\frac{1}{4}|-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}|^2$

$=\frac{1}{4}(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2$
$-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{d}-2\vec{d}\cdot\vec{b})$

$=\frac{1}{4}(4+4+4-4+4-4)=2$

$|\overrightarrow{PR}|\geqq0$ より $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{2}$

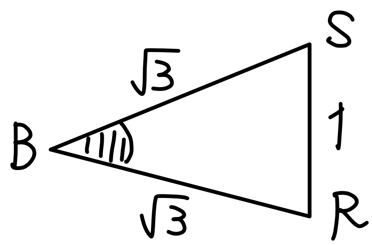
$\therefore \underline{PR=\sqrt{2}}$ //

(2) 三平方の定理により

$BS=BR=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

中点連結定理より

$SR=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times2=1$



余弦定理より

$\cos\angle SBR=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-1}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$=\underline{\dfrac{5}{6}}$ //

四面体ABCDの体積をVとすると

$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle AQD\cdot 1\times 2$

である.

$QA=QD=\sqrt{3}$

$\angle AQD=\theta$とおくと余弦定理より

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

$0°<\theta<180°$より$\sin\theta>0$だから

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって

$\triangle AQD=\frac{1}{2}\cdot QA\cdot QD\cdot\sin\theta$

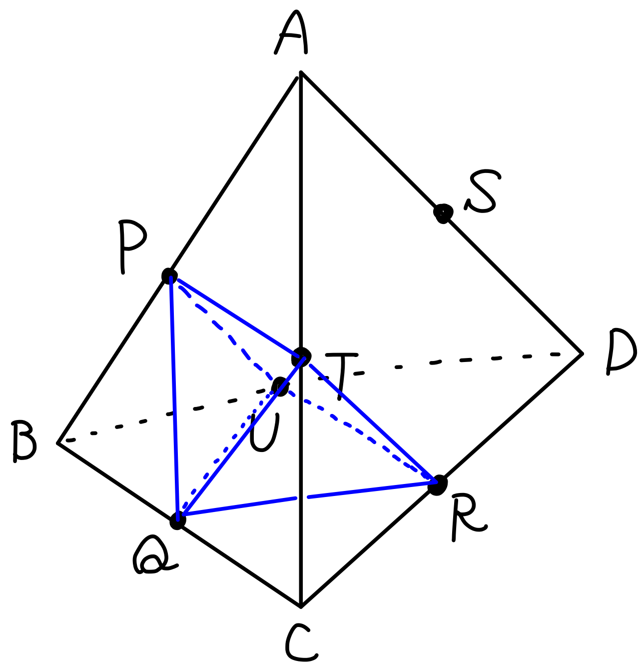
$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$

$\therefore V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\times 1\times 2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

P, Q, R, S, T, Uは各辺の中点なので四角錐Q-PTRUの体積は正八面体QPTRUSの体積の半分である

また, 四面体APTS, DSUR, BPQU, CQRTの体積はすべて等しく$\frac{1}{8}V$なので

相似比 1:2 なので
体積比 $1:2^3$



よって

$2\times$四角錐$Q\text{-}PTRU=V-\frac{1}{8}V\times 4$

$2\times$四角錐$Q\text{-}PTRU=\frac{1}{2}V$

四角錐$Q\text{-}PTRU=\frac{1}{4}V$

四角錐$Q\text{-}PTRU=\frac{1}{4}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ //

$\boxed{3}$ k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A，B を次のように定める。

$$A = \{\, x \mid x^3 - x^2 - (k^2+4k+4)x + k^2 + 4k + 4 = 0 \,\}$$
$$B = \{\, x \mid x^3 - (k^2+3k+3)x^2 + k^2x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0 \,\}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。

(1) $k=-1$ のとき.

$A=\{x \mid x^3-x^2-x+1=0\}$

$B=\{x \mid x^3-x^2+x-1=0\}$

Aについて

$x^3-x^2-x+1=0$

$x^2(x-1)-(x-1)=0$

$(x^2-1)(x-1)=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$x=-1,\ 1$

よって $A=\{-1,\ 1\}$ //

Bについて

$x^3-x^2+x-1=0$

$x^2(x-1)+(x-1)=0$

$(x^2+1)(x-1)=0$

$x=1$

よって $B=\{1\}$ //

＊ ここから x^2+k^2 を因数にもつことを見抜ける？

$A\cap B=\{1\}$ //

$A\cup B=\{-1,\ 1\}$ //

(2) Aについて

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -k^2-4k-4 & k^2+4k+4 \\ & & 1 & 0 & -k^2-4k-4 \\ \hline & 1 & 0 & -k^2-4k-4 & 0 \end{array}$$

$(x-1)(x^2-k^2-4k-4)=0$

$(x-1)\{x^2-(k+2)^2\}=0$

$(x-1)\{x+(k+2)\}\{x-(k+2)\}=0$

$x=1,\ -k-2,\ k+2$.

よって $A=\{1,\ -k-2,\ k+2\}$

Bについて＊

$$\begin{array}{r|l} & x-(k^2+3k+3) \\ \hline x^2+k^2 & x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2 \\ & x^3 \qquad\qquad\qquad\quad\ +k^2x \\ \hline & -(k^2+3k+3)x^2 \qquad -k^2(k^2+3k+3) \\ & -(k^2+3k+3)x^2 \qquad -k^2(k^2+3k+3) \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$(x^2+k^2)\{x-(k^2+3k+3)\}=0$

$k^2\geqq 0$ （∵ k 実数）

$x^2+k^2=0$ が実数解をもつのは

$k=0$ のときである.

このとき $A=\{1,\ -2\ \ 2\}$

$B=\{0,\ 3\}$

B は A の部分集合にならない

よってBがAの部分集合になるのは

① $k^2+3k+3=1$

② $k^2+3k+3=-k-2$

③ $k^2+3k+3=k+2$

であるから

①のとき $k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-2,-1$

$k=-2$のとき

$A=\{0,1\}$ $B=\{1\}$より $A\supset B$

$k=-1$のとき

$A=\{-1,1\}$ $B=\{1\}$より $A\supset B$

②のとき $k^2+4k+5=0$

判別式Dとすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$$

kは実数ではないので不適

③のとき $k^2+2k+1=0$

$(k+1)^2=0$

$k=-1$

このとき $A=\{-1,1\}$, $B=\{1\}$ $\therefore A\supset B$

以上より $A\supset B$ となるようなkの値は

$k=-2,-1$ //

(3) 集合Aについて

$A=\{1,-k-2,k+2\}$は

$1=-k-2$ より $k=-3$

$1=k+2$ より $k=-1$

$-k-2=k+2$ より $k=-2$

要素の個数が2個になる条件を調べる

すなわち $k=-3,-2,-1$ のとき

集合Aの要素の個数が2個となり

$k=-2$のときは(2)より $A\cup B=\{0,1\}$ 2コ

$k=-1$のときは(2)より $A\cup B=\{-1,1\}$ 2コ

$k=-3$のときは $A=\{1,-1\}$, $B=\{9\}$

このときだけ $A\not\supset B$

$A\cup B=\{1,-1,9\}$ 3コ

集合Bについて

$k=0$のとき $A=\{1,-2,2\}$, $B=\{0,3\}$

$A\cup B=\{-2,0,1,2,3\}$ 5コ

$k\neq0$のとき $B=\{k^2+3k+3\}$で

集合Bの要素の個数が1個となり

$k\neq-3,-2,-1,0$のときは

$A=\{1,-k-2,-k+2\}$ $B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,-k-2,-k+2,k^2+3k+3\}$ 4コ

以上より

$k\neq-3,-2,-1,0$ のとき 4個

$k=-3$ のとき 3個

$k=-2,-1$ のとき 2個

$k=0$ のとき 5個 //

$\boxed{4}$ p は $p \geqq 0$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9-p^2)x$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $p=1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $f'(x)=0$ となる x の値を p を用いて表せ。

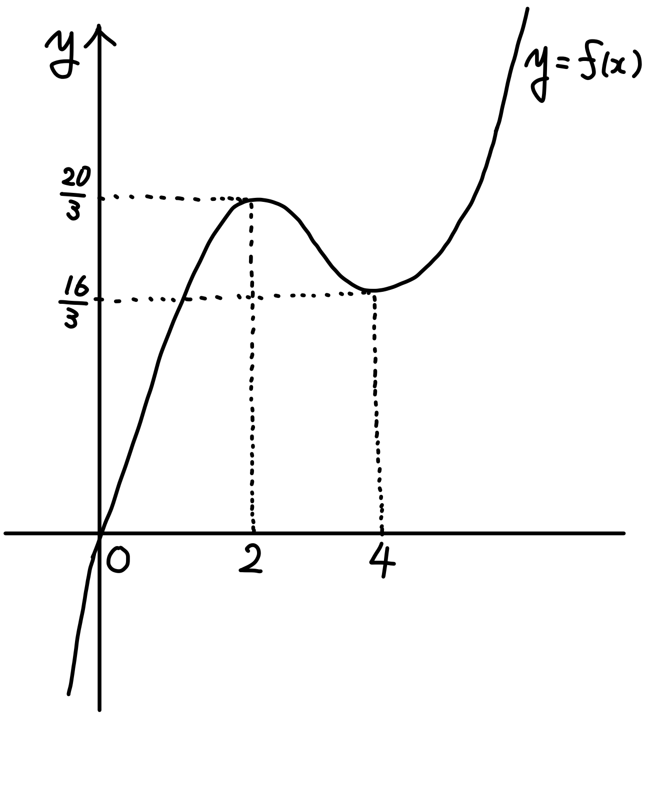
(3) $x \geqq 0$ において $f(x)$ が最小値をとる x の値を求めよ。

(1) $p=1$ のとき

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9-1^2)x$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x$$

$$f'(x) = x^2 - 6x + 8$$
$$= (x-2)(x-4)$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{20}{3}$	$\searrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$



(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (9-p^2)x$

$$f'(x) = x^2 - 6x + (9-p^2)$$
$$= x^2 - 6x + (3+p)(3-p)$$
$$= \{x-(3+p)\}\{x-(3-p)\} \cdots ①$$

$f'(x)=0$ を解くと

$$\underline{x = 3+p,\ 3-p}$$ //

(3) $f(x)$ が極値をもつときともたないときで場合分け

(i) $p=0$ のとき．（①に $p=0$ 代入）

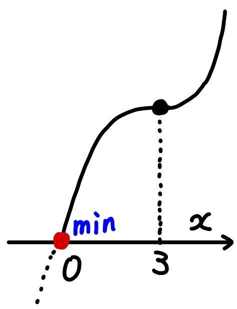
$f'(x) = (x-3)^2 \geqq 0$ なので

$f(x)$ は $x \geqq 0$ で単調増加（極値をもたない）

よって $x=0$ のとき $f(x)$ は最小 ↗

参考1

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	9	$\nearrow$



参考2

$f'(x)=0$ すなわち $x^2 - 6x + (9-p^2) = 0$

の判別式を D とする

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1\cdot(9-p^2) = p^2$$ なので

$p=0$ のとき極値をもたない

$p \neq 0$ のとき極値をもつ．

$(p>0)$

これは(2)の結果からもあきらかです．

(ii) $p>0$ のとき (2) より

$x=3-p$ で極大

$x=3+p$ で極小 なので

① $0\leqq 3-p$ すなわち $0<p\leqq 3$ のとき

x	0		$3-p$		$3+p$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗		↘	$f(3+p)$	↗

どちらがminか比べる必要がある

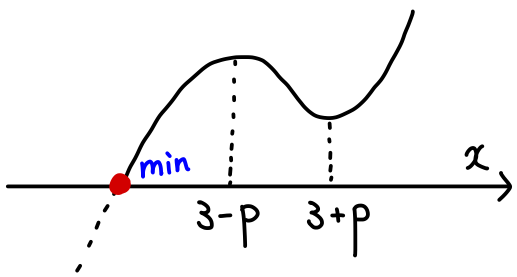
$$f(3+p)=\frac{1}{3}(3+p)^3-3(3+p)^2+(9-p^2)(3+p)$$
$$=\frac{1}{3}(3+p)^3-3(3+p)^2+(3+p)^2(3-p)$$
$$=(3+p)^2\left\{\frac{1}{3}(3+p)-3+(3-p)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}(3+p)^2(-2p+3)$$

これより

$f(3+p)\geqq 0$ すなわち $-2p+3\geqq 0$ だから

$0<p\leqq \frac{3}{2}$ のとき

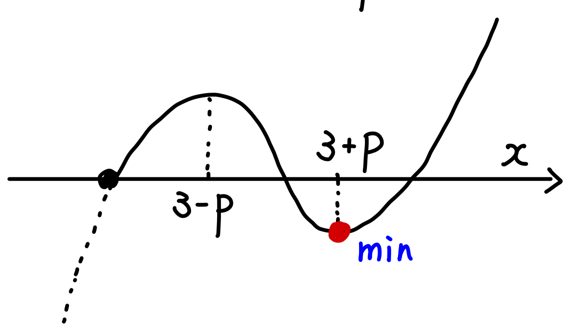
$x\geqq 0$ で $f(x)$ は $x=0$ のときに最小



$f(3+p)\leqq 0$ すなわち $-2p+3\leqq 0$ だから

のとき $\frac{3}{2}\leqq p\leqq 3$

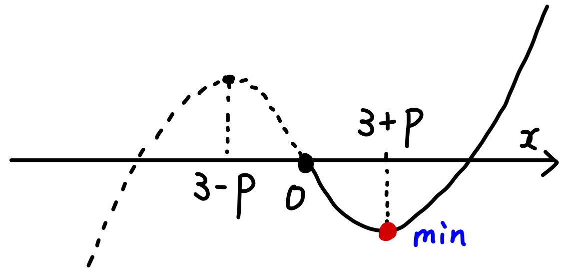
$x\geqq 0$ で $f(x)$ は $x=3+p$ のときに最小



② $3-p\leqq 0$ すなわち $p\geqq 3$ のとき

x	0	$\cdots$	$3+p$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$f(3+p)$	↗

よって $x\geqq 0$ で $f(x)$ は $x=3+p$ のとき最小



以上 (i) (ii) より

$0\leqq p\leqq \frac{3}{2}$ のとき $x=0$ で最小

$p\geqq \frac{3}{2}$ のとき $x=3+p$ で最小