

- 1 座標平面の原点を O とし、2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり、単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。

ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。
- (3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

- 2 座標空間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。

線分 AB を $3:1$ に内分する点を D 、線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 点 D , E の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、点 F の座標を求めよ。

- 3 式 A , B , C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$

$$C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

- (1) 式 A , B , C を y の整式とみて、 A , B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。
- (2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

- 4 曲線 C を $y = x^2e^x$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) $\int xe^x dx$, $\int x^2e^x dx$ をそれぞれ求めよ。
- (3) 点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。
- (4) (3) で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。
点 $(T, 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

- 5 複素数 z に対して、その共役複素数を $\bar{z}$ とし、 i を虚数単位とする。

次の問いに答えよ。

- (1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

ただし、 α は複素数とする。

- (2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\bar{z} + (1 - i + \bar{\beta})z + (1 + i + \beta)\bar{z} = \beta$$

- (3) $|\beta| \leq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき、 $|z|$ の最大値を求めよ。

また、そのときの β , z を求めよ。

$$z\bar{z} + (1 - i + \bar{\beta})z + (1 + i + \beta)\bar{z} = \beta$$

- 6 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x) = x^2$ とし、 $a_1 = 10$ とする。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における法線と曲線 $y = f(x)$ の 2 つの交点を $(a_n, f(a_n))$, $(-a_{n+1}, f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (2) すべての $n \geq 1$ に対して

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

- 1 座標平面の原点を O とし, 2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり, 単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。

ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

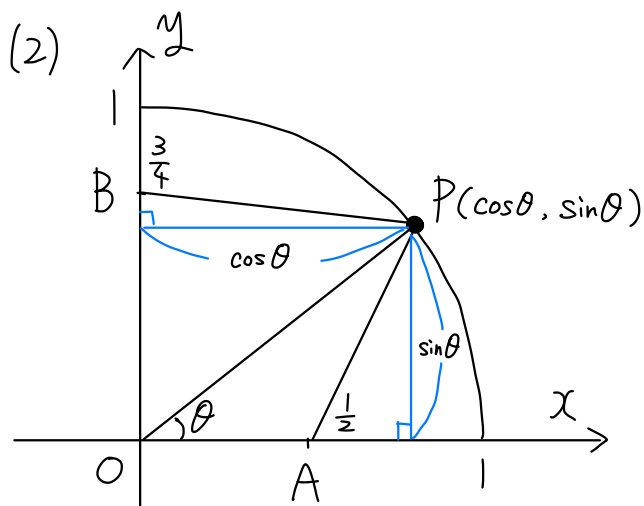
- (1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。
 (3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ のとき, S の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



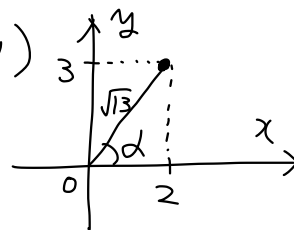
$$\begin{aligned} S &= \triangle OAP + \triangle OBP \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cos \theta \\ &= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad S &= \frac{1}{8} (2 \sin \theta + 3 \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{13}}{8} \sin (\theta + \alpha) \end{aligned}$$

ただし, α は

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ である角.}$$



$$\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{12} + \alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + \alpha$$

∴ ②

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right) &= \sin \frac{\pi}{12} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{12} \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times \frac{3}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{5\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4\sqrt{13}} \dots\dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right) &= \cos\frac{5}{12}\pi \cos\alpha - \sin\frac{5}{12}\pi \sin\alpha \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{-\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4\sqrt{13}} < 0 \quad \dots \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

The graph shows a downward-opening parabola on a Cartesian coordinate system. The vertex is at $(\frac{5}{2}, 1)$, labeled "Max". The x-intercepts are at $(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, 0)$ and $(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, 0)$. The y-intercept is at $(0, -2\sqrt{3})$. The graph is annotated with dashed lines, angles of $\frac{\pi}{12} + \alpha$, and various algebraic expressions for coordinates and intercepts.

$$P\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \text{ 为最小值 } \frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{32}$$

2 座標空間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。

線分 AB を $3:1$ に内分する点を D , 線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、

次の問いに答えよ。

文系2と同じ

(1) 2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、点 F の座標を求めよ。

(1) D について

① 2

② $\frac{1 \times 2 + 3 \times (-2)}{3+1} = -1$

③ $\frac{1 \times (-2) + 3 \times 2}{3+1} = 1$

$\underline{D(2, -1, 1)}$

E について

① $\frac{-1 \times 2 + 3 \times (-2)}{3-1} = -4$

② 2

③ $\frac{-1 \times (-2) + 3 \times 2}{3-1} = 4$

$\underline{E(-4, 2, 4)}$

(2) 点 F は直線 DE 上なのを

$$\overrightarrow{OF} = (1-t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE}$$

$$= (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-6t \\ -1+3t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

大きさについて

$$|\overrightarrow{OF}|^2 = (2-6t)^2 + (-1+3t)^2 + (1+3t)^2$$

$$= 4 - 24t + 36t^2$$

$$+ 1 - 6t + 9t^2$$

$$+ 1 + 6t + 9t^2$$

$$= 6 - 24t + 54t^2$$

$$= 6(1 - 4t + 9t^2)$$

ここで $9t^2 - 4t + 1 = 0$ とするとき $\cup$

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 9 \times 1 = -5 < 0$$

任意の実数 t について $9t^2 - 4t + 1 > 0$.

$$\therefore |\overrightarrow{OF}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - 4t + 9t^2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0} = 4\sqrt{2}$$

内積について

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-6t \\ -1+3t \\ 1+3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4(2-6t) + 4(-1+3t) + 0$$

$$= 4(-2+6t-1+3t)$$

$$= 4(9t-3)$$

$$= 12(3t-1)$$

$$\vec{OF} \cdot \vec{BC} = |\vec{OF}| |\vec{BC}| \cos \theta \text{ により}$$

$$\text{題意より } \cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \text{ だから}$$

$$\cancel{12}(3t-1) = \cancel{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1-4t+9t^2} \times \frac{\cancel{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$3t-1 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{1-4t+9t^2} \times \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\cancel{2}\sqrt{7}(3t-1) = \cancel{2}\sqrt{3} \sqrt{1-4t+9t^2}$$

$$\sqrt{7}(3t-1) = \sqrt{3} \sqrt{1-4t+9t^2} \dots \textcircled{1}$$

両辺2乗して

$$7(9t^2-6t+1) = 3(1-4t+9t^2)$$

$$36t^2-30t+4=0$$

$$18t^2-15t+2=0 \quad \begin{array}{r} 3 \times -2 = -6 \\ 6 \times -1 = -6 \\ \hline 18 \quad 2 \quad -6 \end{array}$$

$$(3t-2)(6t-1)=0$$

$$t = \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$$

①の左辺は正だから

$$3t-1 > 0 \text{ より } t > \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{1}{6} \text{ は不適}$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$\vec{OF} = \begin{pmatrix} 2-6 \times \frac{2}{3} \\ -1+3 \times \frac{2}{3} \\ 1+3 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以上より求める点Fの座標は

$$\underline{\underline{(-2, 1, 3)}}$$

3 式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$

$$C = y + x - 1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて, A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(1)

$$\begin{array}{r} y - 3x^2 + 10x + 4 \\ y+x-1 \overline{) y^2 + (-3x^2 + 11x + 4)y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5} \\ \underline{y^2 + (x-1)y} \\ (-3x^2 + 10x + 5)y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5 \\ \underline{(-3x^2 + 10x + 5)y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5} \\ 0 \end{array}$$

$A \in C$ で割ったときの商は $y - 3x^2 + 10x + 5$ //

$$\begin{array}{r} y + x^2 - 6x + 5 \\ y+x-1 \overline{) y^2 + (x^2 - 5x + 4)y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \\ \underline{y^2 + (x-1)y} \\ (x^2 - 6x + 5)y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5 \\ \underline{(x^2 - 6x + 5)y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \\ 0 \end{array}$$

$B \in C$ で割ったときの商は $y + x^2 - 6x + 5$ //

(2) $\log A > \log(-B) \dots \dots \textcircled{1}$ とする

真数は正なので $A > 0$ かつ $-B > 0$
すなわち $A > 0$ かつ $B < 0$

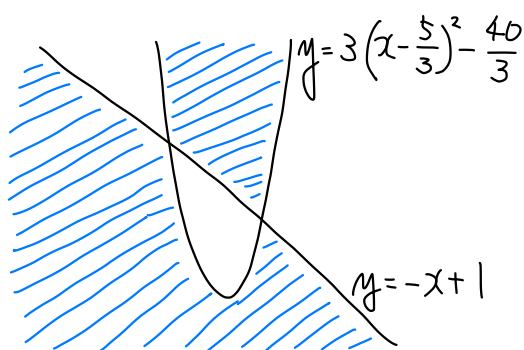
$A > 0$ により (1) より

$$(y+x-1)(y-3x^2+10x+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-1 > 0 \\ y-3x^2+10x+5 > 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y+x-1 < 0 \\ y-3x^2+10x+5 < 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y > -x+1 \\ y > 3x^2-10x-5 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y < -x+1 \\ y < 3x^2-10x-5 \end{cases} \dots \dots \textcircled{2}$$



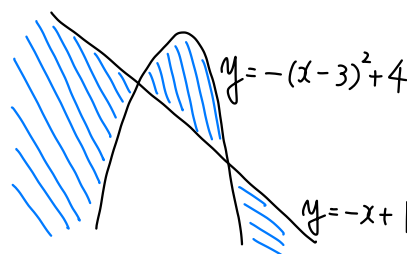
$B < 0$ により (1) より

$$(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-1 > 0 \\ y+x^2-6x+5 < 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y+x-1 < 0 \\ y+x^2-6x+5 > 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y > -x+1 \\ y < -x^2+6x-5 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y < -x+1 \\ y > -x^2+6x-5 \end{cases} \dots \dots \textcircled{3}$$



不等式により (1) より

$$\log(y+x-1)(y-3x^2+10x+5) > \log(y+x-1)(-y-x^2+6x-5)$$

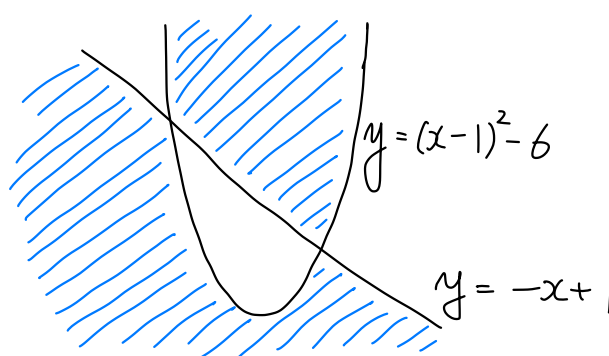
底 $e > 1$ より

$$(y+x-1)(y-3x^2+10x+5) > (y+x-1)(-y-x^2+6x-5)$$

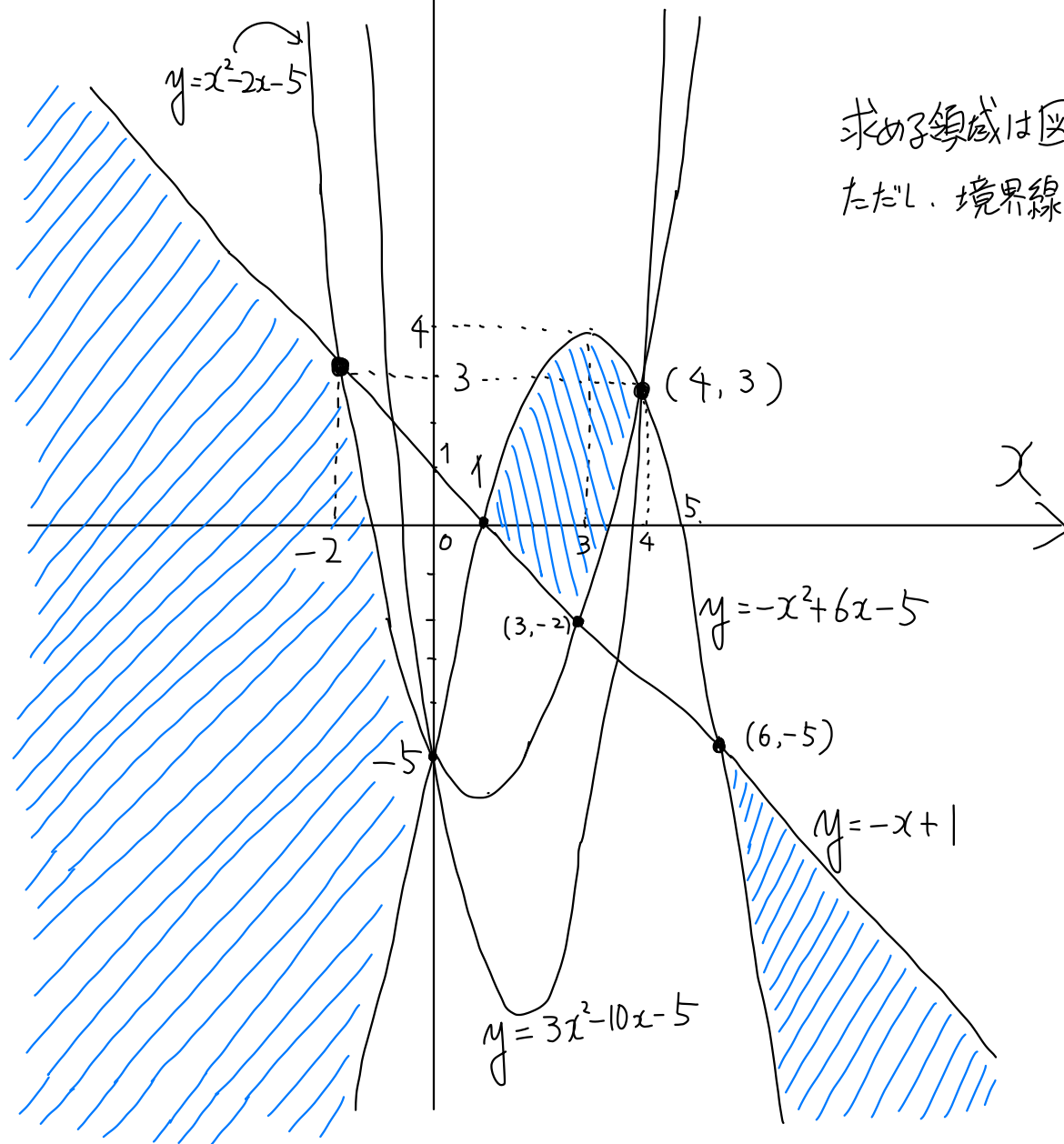
$$(y+x-1)(2y-2x^2+4x+10) > 0$$

$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > -x+1 \\ y > x^2-2x-5 \end{cases} \text{または} \begin{cases} y < -x+1 \\ y < x^2-2x-5 \end{cases} \dots \dots \textcircled{4}$$



②から③から④
を④示すと



求める領域は図の斜線部分
ただし、境界線に含まない。

4 曲線 C を $y = x^2 e^x$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\int x e^x dx$, $\int x^2 e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど2本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3) で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。

点 $(T, 0)$ を通る2本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

$$(1) y = x^2 e^x \text{ より } y' = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

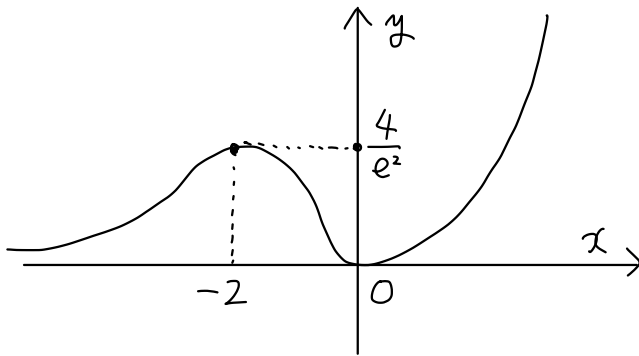
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$t \rightarrow \infty$ とき
 $t^2 \ll e^t$ だから
あきかたずね。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t)^2 e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$$(x = -t \text{ とおくと } x \rightarrow -\infty \text{ のとき } t \rightarrow \infty)$$



$$(2) \int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

ただし C は積分定数。

(3) C 上の点 $(\alpha, \alpha^2 e^\alpha)$ における接線の方程式は

$$y - \alpha^2 e^\alpha = \alpha(\alpha+2)e^\alpha(x - \alpha) \cdots \textcircled{1}$$

① が $(t, 0)$ を通るのとき

$$0 - \alpha^2 e^\alpha = \alpha(\alpha+2)e^\alpha(t - \alpha)$$

$$e^\alpha > 0 \text{ より両辺を } e^\alpha \text{ で割ると}$$

$$-\alpha^2 = \alpha(\alpha+2)(t - \alpha) \text{ より}$$

$$\alpha(\alpha+2)(t - \alpha) + \alpha^2 = 0$$

$$\alpha \{ (\alpha+2)(t - \alpha) + \alpha \} = 0$$

$$\alpha \{ (\alpha+2)t - \alpha^2 - 2\alpha + \alpha \} = 0$$

$$\alpha \{ (\alpha+2)t - \alpha^2 - \alpha \} = 0 \cdots \textcircled{2}$$

α は接点の x 座標なのだから

② が異なる2個の実数解をもてば接線2本である。

$$\alpha = 0 \text{ または } (\alpha+2)t = \alpha^2 + \alpha$$

$$\therefore (\alpha+2)t = \alpha^2 + \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + (1-t)\alpha - 2t = 0 \cdots \textcircled{3}$$

(i) α の2次方程式③が 0 と 0 以外の解をもてばよから

③に $\alpha = 0$ 代入して $t = 0$.

$$t = 0 \text{ のときの③は } \alpha^2 + \alpha = 0 \text{ より } \alpha(\alpha+1) = 0$$

$$\alpha = 0, -1$$

これは②が異なる2個の実数解をもつことになる

$$\text{よって } t = 0$$

(ii) α の2次方程式③が 0 以外の重解をもてばよから
判別式 D に $D = 0$.

$$D = (1-t)^2 - 4 \cdot (-2t) = 0$$

$$t^2 + 6t + 1 = 0$$

$$\therefore t = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

このとき③は

$$\alpha^2 + (4 \mp 2\sqrt{2})\alpha + (6 \mp 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\alpha = -(2 \mp \sqrt{2}) \pm \sqrt{(2 \mp \sqrt{2})^2 - (6 \mp 2\sqrt{2})}$$

$$\therefore \alpha = -2 \pm \sqrt{2} \text{ これは } 0 \text{ ではない}$$

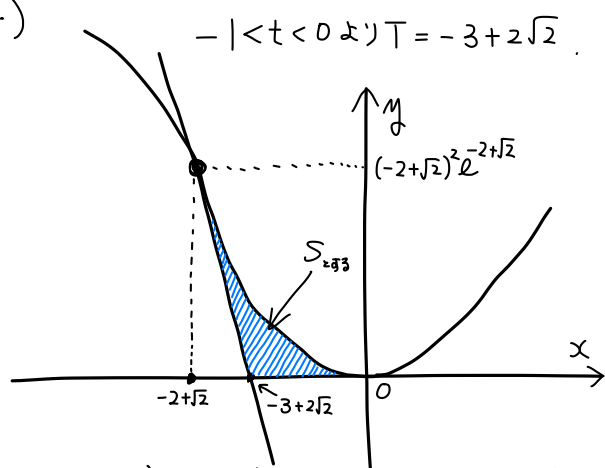
これは②が異なる2個の実数解をもつことになる

$$\text{よって } t = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

以上 (i) (ii) より

$$t = 0, -3 \pm 2\sqrt{2}$$

(14)



このとき接点の x 座標は $-2 + \sqrt{2}$ (∵ (3))

$\beta = -2 + \sqrt{2}$ とおくと β は $\beta^2 + 4\beta + 2 = 0$ を満たす.

図より求める面積 S は

$$S = \int_{\beta}^0 x^2 e^x dx - \beta e^{\beta} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \leftarrow (-3+2\sqrt{2}) - (-2+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$

$$\begin{aligned} \beta e^{\beta} &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\beta^2 e^{\beta} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)(-4\beta-2)e^{\beta} \\ &= (\sqrt{2}-1)(-2\beta-1)e^{\beta} \\ &= \{(-2\sqrt{2}+2)\beta - \sqrt{2}+1\}e^{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^0 x^2 e^x dx &= \left[(x^2 - 2x + 2)e^x \right]_{\beta}^0 \\ &= (0-0+2)e^0 - (\beta^2 - 2\beta + 2)e^{\beta} \\ &= 2 - \{(\beta^2 + 4\beta + 2) - 6\beta\}e^{\beta} \\ &= 2 - \{0 - 6\beta\}e^{\beta} \\ &= 2 + 6\beta e^{\beta} \end{aligned}$$

④より

$$\begin{aligned} S &= (2 + 6\beta e^{\beta}) - \{(-2\sqrt{2}+2)\beta - \sqrt{2}+1\}e^{\beta} \\ &= 2 + \{6\beta - (-2\sqrt{2}+2)\beta + \sqrt{2}-1\}e^{\beta} \\ &= 2 + \{(4+2\sqrt{2})\beta + \sqrt{2}-1\}e^{\beta} \\ &= 2 + \{(4+2\sqrt{2})(-2+\sqrt{2}) + \sqrt{2}-1\}e^{-2+\sqrt{2}} \\ &= 2 + (-8+4\sqrt{2}-4\sqrt{2}+4+\sqrt{2}-1)e^{-2+\sqrt{2}} \\ &= 2 + (\sqrt{2}-5)e^{-2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

#

[(3)の(ii)の部分の別解]

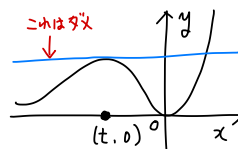
$$\alpha = 0 \text{ または } (\alpha+2)t = \alpha^2 + \alpha$$

$(\alpha+2)t = \alpha^2 + \alpha$ が 0 以外の実数解 1 個と
もてばよい. (変数と定数を分離する)

$\alpha = -2$ のとき 接線の傾き 0 となり, x 軸と平行
2 本目の接線にはならない.

$\alpha \neq -2$ である

このとき



$$t = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha + 2} \text{ として } g(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha + 2} \text{ とおく}$$

$y = t$ と $y = g(\alpha)$ が共有点をもてば ③ が
1 個の実数解をとる.

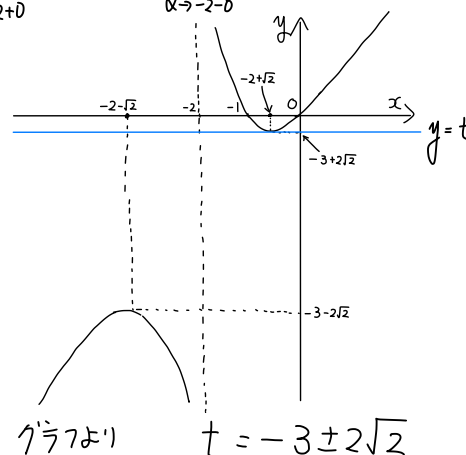
$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha - 1 + \frac{2}{\alpha + 2} \text{ より } \frac{\alpha-1}{\alpha+2} \cdot \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha^2+2\alpha} \\ g'(\alpha) &= 1 - \frac{2}{(\alpha+2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 2}{(\alpha+2)^2} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha^2 + 4\alpha + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha = -2 \pm \sqrt{2} \end{array} \right)$$

α	$-2-\sqrt{2}$	-2	$-2+\sqrt{2}$	
$g'(\alpha)$	+	0	-	+
$g(\alpha)$	$\nearrow$	$-3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-3+2\sqrt{2}$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} g(\alpha) = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} g(\alpha) = -\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -2+0} g(\alpha) = \infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow -2-0} g(\alpha) = -\infty$$



これと (ii) と合わせると

$$t = 0, -3 \pm 2\sqrt{2} \quad \#$$

やはり判別式が楽ですよね...

5 複素数 z に対して、その共役複素数を $\bar{z}$ とし、 i を虚数単位とする。

次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

ただし、 α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\beta)z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

(3) $|\beta| \leq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき、 $|z|$ の最大値を求めよ。

また、そのときの β , z を求めよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\beta)z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

$$(1) \quad z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

$$= z(\bar{z} + \bar{\alpha}) + \alpha(\bar{z} + \bar{\alpha})$$

$$= (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha})$$

$$= (z + \alpha)(\overline{z + \alpha})$$

$$= |z + \alpha|^2$$

$$(2) \quad z\bar{z} + (1-i+\beta)z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

$$\text{よって } \alpha = 1-i+\beta \text{ とおくと}$$

$$\bar{\alpha} = 1+i+\bar{\beta} \text{ となる}$$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \beta$$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} + \beta$$

$$(1) \text{より } |z + \alpha|^2 = |\alpha|^2 + \beta$$

z が点 $-\alpha$ 、半径 $\sqrt{|\alpha|^2 + \beta}$ の円

または点 $-\alpha$ 上に存在するには

$$|\alpha|^2 + \beta \geq 0 \text{ である。}$$

$$|1-i+\beta|^2 + \beta \geq 0 \text{ より}$$

$$\beta = x + yi \text{ とおくと}$$

$$|1-i+(x+yi)|^2 + x + yi \geq 0$$

$$|(x+1) + (y+1)i|^2 + x + yi \geq 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + x + yi \geq 0.$$

$$\text{よって } \begin{cases} y = 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + x \geq 0 \end{cases}$$

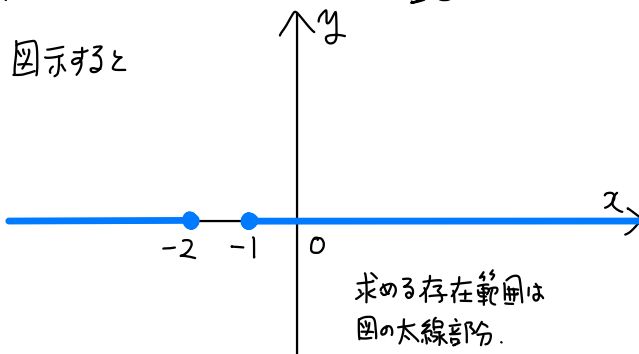
$$y \text{ を消去して } (x+1)^2 + 1^2 + x \geq 0$$

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$(x+1)(x+2) \geq 0$$

$$x \leq -2, -1 \leq x$$

よって β の存在範囲は実軸上の点 -2 の左側と点 -1 の右側。ただし点 $-2, -1$ を含む。



(3) $|\beta| \leq 2$ より $-2 \leq \beta \leq 2$ だから

(2) より $\beta = t$ (t は実数) とすると

$$t = -2, \text{ または } -1 \leq t \leq 2.$$

$$|z + (1-i+t)|^2 = t + |1-i+t|^2$$

$$|z - (-t-1-i)|^2 = t + (t+1)^2 + 1^2$$

$$|z - (-t-1-i)| = \sqrt{t^2 + 3t + 2} \dots \textcircled{1}$$

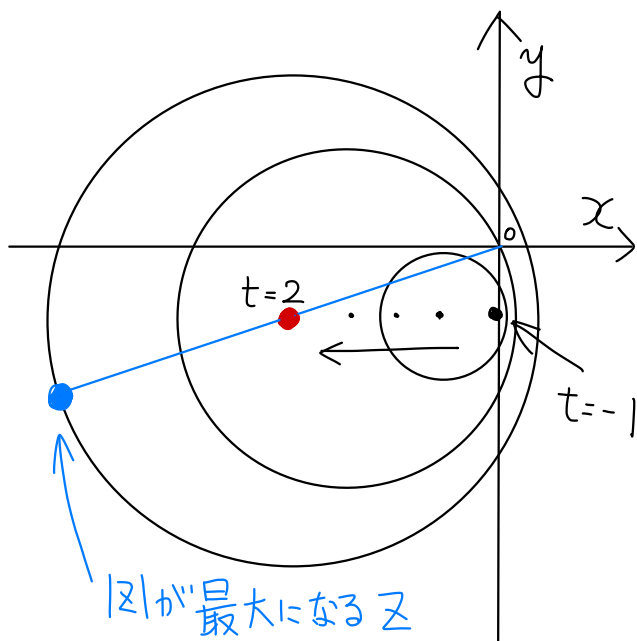
z は点 $-t-1-i$ を中心とする

半径 $\sqrt{t^2 + 3t + 2}$ の円がある。

(i) $t = -2$ のとき ①は $|z - (1 - i)| = 0$
 $z = 1 - i$ より
 $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

(ii) $-1 \leq t \leq 2$ のとき

円の中心は $t = -1$ から $t = 2$ にかけて
 原点から遠くなり、半径も $t = -1$ から
 $t = 2$ にかけて増加するの z 。
 $t = 2$ のとき $|z|$ は最大になる。



$t = 2$ のとき中心が点 $-3 - i$ 半径 $2\sqrt{3}$
 の円となるから、このとき

$$|z| = |-3 - i| + 2\sqrt{3}$$

(0から-3-iまでの距離) + (円の半径)

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} + 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{10} + 2\sqrt{3} \leftarrow \text{これが}|z|\text{の最大値.}$$

z について 直交座標で考えると

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x & \dots\dots\dots ② \\ (x+3)^2 + (y+1)^2 = 12 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

②を③に代入

$$(x+3)^2 + \left(\frac{1}{3}x+1\right)^2 = 12$$

$$(x+3)^2 + \frac{1}{9}(x+3)^2 = 12$$

$$\frac{10}{9}(x+3)^2 = 12$$

$$(x+3)^2 = \frac{54}{5} \quad \text{より } x+3 = \pm \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

$$x+3 = \pm \frac{3\sqrt{30}}{5} \quad \therefore x = -3 \pm \frac{3\sqrt{30}}{5} = \frac{-15 \pm 3\sqrt{30}}{5}$$

②より $y = \frac{1}{3}\left(-3 \pm \frac{3\sqrt{30}}{5}\right) = -1 \pm \frac{\sqrt{30}}{5} = \frac{-5 \pm \sqrt{30}}{5}$

よって $x = \frac{-15 \pm 3\sqrt{30}}{5}, y = \frac{-5 \pm \sqrt{30}}{5}$
 (複号同順)

であるが図より $x < 0, y < 0$ なの z 。

$$z = \frac{-15 - 3\sqrt{30}}{5} + \frac{-5 - \sqrt{30}}{5}i$$

β については $t = 2$ より $\beta = 2$ 。

以上 (i) (ii) より $|z|$ は
 最大値 $\sqrt{10} + 2\sqrt{3}$

このとき

$$\beta = 2 //$$

$$z = \frac{-15 - 3\sqrt{30}}{5} + \frac{-5 - \sqrt{30}}{5}i //$$

6 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x) = x^2$ とし、 $a_1 = 10$ とする。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a_n, f(a_n))$ における法線と曲線 $y = f(x)$ の2つの

交点を $(a_n, f(a_n))$, $(-a_{n+1}, f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) すべての $n \geq 1$ に対して

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 \text{ より } f'(x) = 2x$$

$(a_n, f(a_n))$ すなわち (a_n, a_n^2) における

法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2a_n}(x - a_n) + a_n^2$$

$$\text{すなわち } y = -\frac{1}{2a_n}x + \frac{1}{2} + a_n^2$$

$$y = x^2 \text{ より } y \text{ 消去して}$$

$$x^2 = -\frac{1}{2a_n}x + \frac{1}{2} + a_n^2$$

$$x^2 + \frac{1}{2a_n}x - a_n^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} a_n & 1 & \frac{1}{2a_n} & -a_n^2 - \frac{1}{2} & \\ & & a_n & a_n^2 + \frac{1}{2} & \\ \hline & 1 & a_n + \frac{1}{2a_n} & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (x - a_n)(x + a_n + \frac{1}{2a_n}) = 0$$

$$\therefore x = a_n, -a_n - \frac{1}{2a_n}$$

$$\text{題意より } -a_{n+1} = -a_n - \frac{1}{2a_n}$$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n} \dots \dots \textcircled{1}$$

(2) (proof)

(i) $n = 1$ のとき.

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= |a_1 - \sqrt{1+99}| = |10 - 10| \\ &= 0 \leq 1 \end{aligned}$$

よって $n = 1$ のとき成り立つ

(ii) $n = k$ のとき. すなわち

$$|a_k - \sqrt{k+99}| \leq 1 \text{ より}$$

$$-1 \leq a_k - \sqrt{k+99} \leq 1 \text{ だから}$$

$$\begin{cases} -1 \leq a_k - \sqrt{k+99} \dots \dots \textcircled{2} \\ a_k - \sqrt{k+99} \leq 1 \dots \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つと仮定.

$n = k+1$ のとき. すなわち

$$|a_{k+1} - \sqrt{(k+1)+99}| \leq 1 \text{ を示せばよい.}$$

これは

$$-1 \leq a_{k+1} - \sqrt{k+100} \leq 1 \text{ となるのを}$$

$$\begin{cases} 1 - (a_{k+1} - \sqrt{k+100}) \geq 0 \dots \dots \textcircled{4} \\ (a_k - \sqrt{k+100} - (-1)) \geq 0 \dots \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

を証明すればよい

まず④については

$$1 - a_{k+1} + \sqrt{k+100} \geq 0$$

$$\sqrt{k+100} \geq a_{k+1} - 1$$

$a_1 = 10$ で②より $a_n \geq 10$ はあきらかなので

$a_{k+1} - 1 > 0$ で両辺が正なので

$$(\sqrt{k+100})^2 \geq (a_{k+1} - 1)^2 \dots \dots \textcircled{6}$$

を証明すればよい

$$(\textcircled{6} \text{ の左辺}) - (\textcircled{6} \text{ の右辺})$$

$$= (\sqrt{k+100})^2 - (a_{k+1} - 1)^2 \leftarrow \textcircled{1} \text{ 代入}$$

$$= k+100 - (a_k + \frac{1}{2a_k} - 1)^2$$

$$= k+100 - (a_k^2 + \frac{1}{4a_k^2} + 1 + 1 - \frac{1}{a_k} - 2a_k)$$

$$= k+100 - (a_k^2 - 2a_k + 1) - \frac{1}{4a_k^2} - 1 + \frac{1}{a_k}$$

$$= k+99 - (a_k - 1)^2 + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2}$$

$$= (\sqrt{k+99})^2 - (a_k - 1)^2 + \frac{4a_k - 1}{4a_k^2} \dots \dots \textcircled{7}$$

ここで③(仮定)より

$$a_k - 1 \leq \sqrt{k+99} \text{ だから}$$

$$\text{両辺2乗して } (a_k - 1)^2 \leq (\sqrt{k+99})^2 \text{ より}$$

$$(\sqrt{k+99})^2 - (a_k - 1)^2 \geq 0 \text{ であり}$$

$$\frac{4a_k - 1}{4a_k^2} > 0 \text{ だから } ⑦ > 0 \text{ である}$$

⑥ が成り立つので ④ も成り立つ.

次に⑤ については, $a_{k+1} + 1 \geq \sqrt{k+100}$ として

$$\text{両辺が正だから } (a_{k+1} + 1)^2 \geq (\sqrt{k+100})^2, \dots \text{ ⑧}$$

を証明すればよい.

$$\begin{aligned} & (\text{⑧の左辺}) - (\text{⑧の右辺}) \\ &= (a_{k+1} + 1)^2 - (\sqrt{k+100})^2 \leftarrow \text{①代入} \end{aligned}$$

$$= \left(a_k + \frac{1}{2a_k} + 1\right)^2 - (k+100)$$

$$= \left(a_k^2 + \frac{1}{4a_k^2} + 1 + 1 + \frac{1}{a_k} + 2a_k\right) - k - 100$$

$$= (a_k^2 + 2a_k + 1) + \frac{1}{4a_k^2} + 1 + \frac{1}{a_k} - k - 100$$

$$= (a_k + 1)^2 - k - 99 + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{4a_k^2}$$

$$= (a_k + 1)^2 - (k+99) + \frac{4a_k + 1}{4a_k^2}$$

$$= \underbrace{(a_k + 1)^2 - (\sqrt{k+99})^2}_{>0} + \underbrace{\frac{4a_k + 1}{4a_k^2}}_{>0} \dots \dots \text{ ⑨}$$

よって②(仮定)より $\sqrt{k+99} \leq a_k + 1$ だから

両辺2乗し $(\sqrt{k+99})^2 \leq (a_k + 1)^2$ より

$$\underbrace{(a_k + 1)^2 - (\sqrt{k+99})^2}_{>0} \geq 0 \text{ であり}$$

$$\frac{4a_k + 1}{4a_k^2} > 0 \text{ より } ⑨ > 0 \text{ である}$$

⑧ が成り立つので ⑤ が成り立つ

④, ⑤ より $|a_{k+1} - \sqrt{(k+1)+99}| \leq 1$ である
よって $n=k \Rightarrow n=k+1$ が成り立つ.

(i) (ii) より あらゆる自然数 n について

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1 \text{ が示された}$$



(3) (2)より

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1$$

$$-1 \leq a_n - \sqrt{n+99} \leq 1$$

$$-1 + \sqrt{n+99} \leq a_n \leq 1 + \sqrt{n+99}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+99}}{\sqrt{n}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+99}}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{99}{n}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{99}{n}} \dots \text{ ⑩}$$

⑩より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{99}{n}} \right) = 0 + \sqrt{1+0} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{99}{n}} \right) = 0 + \sqrt{1+0} = 1$$

だから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1 \quad \#$$

1 座標平面の原点を O とし、2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり、

単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。

ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

2 座標空間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。

線分 AB を $3:1$ に内分する点を D , 線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、
次の問いに答えよ。

(1) 2 点 D , E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、
点 F の座標を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = na_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2) (1) で図示した領域のうち $1 \leq x \leq 4$ を満たす部分の面積を求めよ。

- 1 座標平面の原点を O とし、2点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり、

単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。

ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

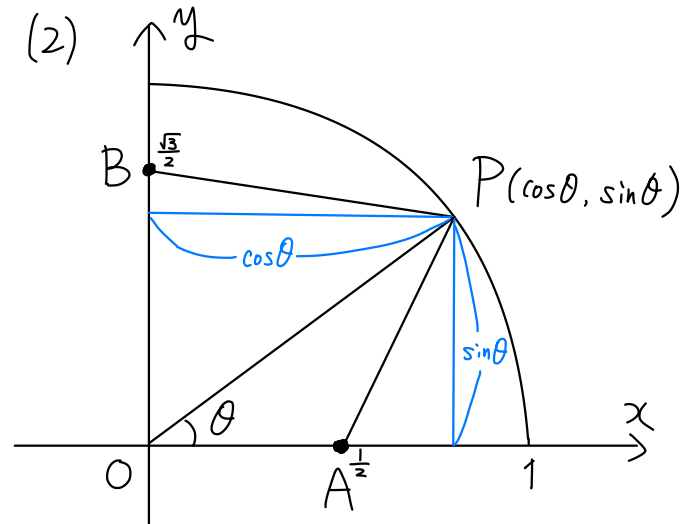
- (1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。
 (3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき、 S の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

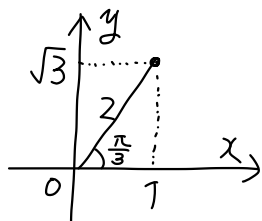


$$\begin{aligned} S &= \triangle OAP + \triangle OBP \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \\ &= \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta \end{aligned}$$

$$(2) S = \frac{1}{4} (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$



$$\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ より}$$

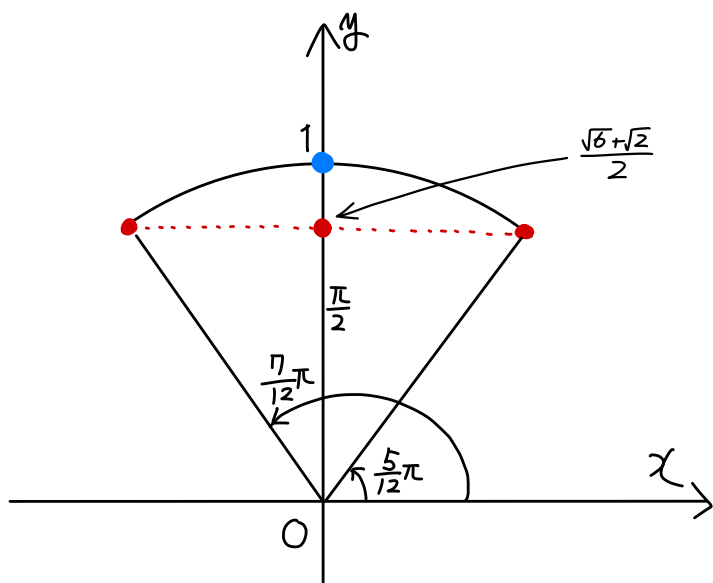
$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5}{12}\pi \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{12}\pi$$

$$(1) \text{より} \sin \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{また} \sin \frac{7}{12}\pi = \sin \left(\pi - \frac{5}{12}\pi \right)$$

$$= \sin \frac{5}{12}\pi = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$



$$\text{④} \text{より} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{1}{2} \times 1$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \leq S \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{(Max)} \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ より } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{(min)} \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi, \frac{7}{12}\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$$

以上より

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき最大値 } \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

2 座標空間の原点を O とし、3 点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。

線分 AB を $3:1$ に内分する点を D , 線分 AC を $3:1$ に外分する点を E とするとき、
次の問いに答えよ。

理系 2 と同じ

(1) 2 点 D, E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし、 $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき、
点 F の座標を求めよ。

(1) D について

① 2

$$\textcircled{2} \frac{1 \times 2 + 3 \times (-2)}{3+1} = -1$$

$$\textcircled{3} \frac{1 \times (-2) + 3 \times 2}{3+1} = 1$$

$$\underline{D(2, -1, 1) \#}$$

E について

$$\textcircled{1} \frac{-1 \times 2 + 3 \times (-2)}{3-1} = -4$$

② 2

$$\textcircled{3} \frac{-1 \times (-2) + 3 \times 2}{3-1} = 4$$

$$\underline{E(-4, 2, 4) \#}$$

(2) 点 F は直線 DE 上なのを

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= (1-t)\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} \\ &= (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-6t \\ -1+3t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

大きさについて

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OF}|^2 &= (2-6t)^2 + (-1+3t)^2 + (1+3t)^2 \\ &= 4 - 24t + 36t^2 \\ &\quad + 1 - 6t + 9t^2 \\ &\quad + 1 + 6t + 9t^2 \end{aligned}$$

$$= 6 - 24t + 54t^2$$

$$= 6(1 - 4t + 9t^2)$$

ここで $9t^2 - 4t + 1 = 0$ とするとき $\cup$

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 9 \times 1 = -5 < 0 \quad \xrightarrow{t}$$

任意の実数 t について $9t^2 - 4t + 1 > 0$.

$$\therefore |\overrightarrow{OF}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - 4t + 9t^2}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0} = 4\sqrt{2}$$

内積について

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-6t \\ -1+3t \\ 1+3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4(2-6t) + 4(-1+3t) + 0$$

$$= 4(-2+6t-1+3t)$$

$$= 4(9t-3)$$

$$= 12(3t-1)$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{BC}| \cos \theta \text{ により}$$

$$\text{題意より } \cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \text{ だから}$$

$$\cancel{2}(3t-1) = \cancel{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{1-4t+9t^2} \times \frac{\cancel{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$3t-1 = \sqrt{12} \cdot \sqrt{1-4t+9t^2} \times \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\cancel{2}\sqrt{7}(3t-1) = \cancel{2}\sqrt{3} \sqrt{1-4t^2+9t^2}$$

$$\sqrt{7}(3t-1) = \sqrt{3} \sqrt{1-4t^2+9t^2} \dots \textcircled{1}$$

両辺2乗して

$$7(9t^2-6t+1) = 3(1-4t^2+9t^2)$$

$$36t^2-30t+4=0$$

$$18t^2-15t+2=0 \quad \begin{array}{r} 3 \times -2 \rightarrow -12 \\ 6 \times -1 \rightarrow -3 \\ \hline 18 \quad 2 \quad -15 \end{array}$$

$$(3t-2)(6t-1)=0$$

$$t = \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$$

①の左辺は正だから

$$3t-1 > 0 \text{ より } t > \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{1}{6} \text{ は不適}$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2-6 \times \frac{2}{3} \\ -1+3 \times \frac{2}{3} \\ 1+3 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以上より求める点Fの座標は

$$\underline{\underline{(-2, 1, 3)}}$$

3 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = na_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ の値をそれぞれ求めよ。
- (2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

$$(1) a_{n+1} = \frac{3n}{n+1}a_n - 10 \dots\dots ① \text{ とする}$$

$$① \text{ に } n=1 \text{ 代入}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{2}a_1 - 10 \\ &= \frac{3}{2} \times 3 - 10 = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$① \text{ に } n=2 \text{ 代入}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{3 \times 2}{3}a_2 - 10 \\ &= 2 \times \left(-\frac{11}{2}\right) - 10 = -21 \end{aligned}$$

$$b_n = na_n \dots\dots\dots ② \text{ とする}$$

$$② \text{ に } n=1 \text{ 代入}$$

$$b_1 = 1 \times a_1 = 1 \times 3 = 3$$

$$② \text{ に } n=2 \text{ 代入}$$

$$b_2 = 2 \times a_2 = 2 \times \left(-\frac{11}{2}\right) = -11$$

$$② \text{ に } n=3 \text{ 代入}$$

$$b_3 = 3 \times a_3 = 3 \times (-21) = -63$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \dots\dots\dots ③ \text{ とする}$$

$$③ \text{ に } n=1 \text{ 代入}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_1 \\ &= -11 - 3 = -14 \end{aligned}$$

$$③ \text{ に } n=2 \text{ 代入}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= b_3 - b_2 \\ &= -63 - (-11) = -52 \end{aligned}$$

以上より

$$a_2 = -\frac{11}{2}, a_3 = -21$$

$$b_1 = 3, b_2 = -11, b_3 = -63$$

$$c_1 = -14, c_2 = -52$$

$$(2) \textcircled{1} a_{n+1} = \frac{3n}{n+1} a_n - 10 \text{ より}$$

$$(n+1)a_{n+1} = 3na_n - 10(n+1)$$

$$\therefore \text{ここで } b_n = na_n, b_{n+1} = (n+1)a_{n+1} \text{ ならば}$$

$$b_{n+1} = 3b_n - 10(n+1) \dots \textcircled{4}$$

$$(3) C_n = b_{n+1} - b_n \text{ より}$$

$$C_{n+1} = b_{n+2} - b_{n+1} \text{ なる } C \text{ がある}$$

④より

$$b_{n+2} = 3b_{n+1} - 10(n+2)$$

$$\text{--- } b_{n+1} = 3b_n - 10(n+1)$$

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 3(b_{n+1} - b_n) - 10$$

$$\therefore C_{n+1} = 3C_n - 10 \dots \textcircled{5}$$

(4) ⑤より

$$C_{n+1} - 5 = 3(C_n - 5)$$

数列 $\{C_n - 5\}$ は初項 $C_1 - 5 = -14 - 5 = -19$
公比 3 の等比数列なので

$$C_n - 5 = -19 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore C_n = -19 \cdot 3^{n-1} + 5$$

$$\textcircled{3} \text{より } b_{n+1} - b_n = -19 \cdot 3^{n-1} + 5$$

となるので

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-19 \cdot 3^{k-1} + 5)$$

$$= 3 + \frac{-19(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} + 5(n-1)$$

$$= 3 - \frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{19}{2} + 5n - 5$$

$$= -\frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + 5n + \frac{15}{2} \dots \textcircled{6}$$

⑥に $n=1$ を代入すると $b_1 = 3$ より

$n=1$ のときも成り立つ。

$$\text{よって } b_n = -\frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + 5n + \frac{15}{2}$$

$$b_n = na_n \text{ より } a_n = \frac{b_n}{n} \text{ ならば}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \left(-\frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + 5n + \frac{15}{2} \right)$$

$$= -\frac{19}{2n} \cdot 3^{n-1} + 5 + \frac{15}{2n}$$

以上より

$$a_n = -\frac{19}{2n} \cdot 3^{n-1} + 5 + \frac{15}{2n}$$

$$b_n = -\frac{19}{2} \cdot 3^{n-1} + 5n + \frac{15}{2}$$

$$C_n = -19 \cdot 3^{n-1} + 5$$

4 次の問いに答えよ。

(1) 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2) (1) で図示した領域のうち $1 \leq x \leq 4$ を満たす部分の面積を求めよ。

(1)

$$\begin{cases} 0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) \dots\dots ① \\ 0 < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5) \dots\dots ② \\ -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5) \dots\dots ③ \end{cases}$$

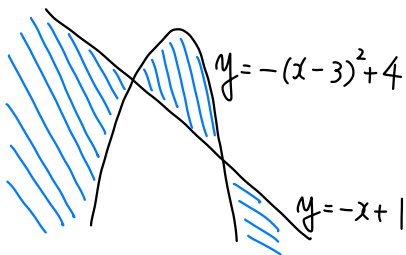
① について

$$(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-1 > 0 \\ y+x^2-6x+5 < 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y+x-1 < 0 \\ y+x^2-6x+5 > 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y > -x+1 \\ y < -x^2+6x-5 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y < -x+1 \\ y > -x^2+6x-5 \end{cases} \dots\dots ①'$$



② について

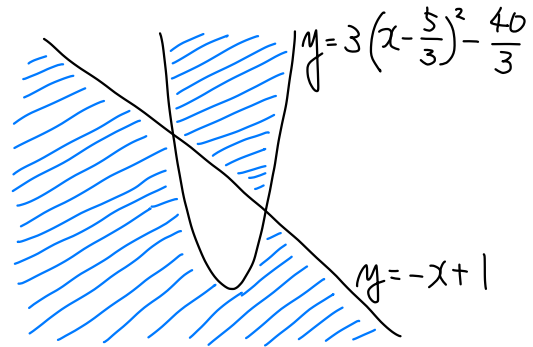
$$(y+x-1)(y-3x^2+10x+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-1 > 0 \\ y-3x^2+10x+5 > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y+x-1 < 0 \\ y-3x^2+10x+5 < 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} y > -x+1 \\ y > 3x^2-10x-5 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y < -x+1 \\ y < 3x^2-10x-5 \end{cases}$$

$\dots\dots ②'$



③ について

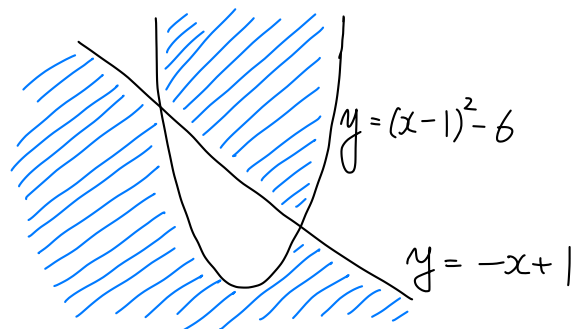
$$(y+x-1)(y-3x^2+10x+5) > (y+x-1)(-y-x^2+6x-5)$$

$$(y+x-1)(2y-2x^2+4x+10) > 0$$

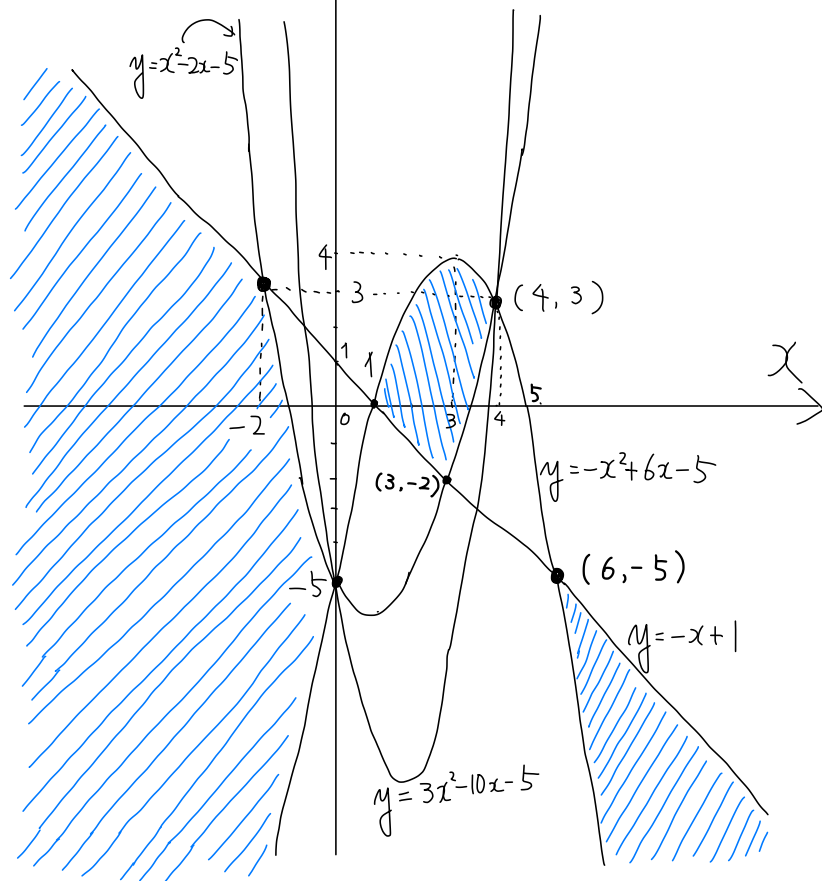
$$(y+x-1)(y-x^2+2x+5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x-1 > 0 \\ y-x^2+2x+5 > 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y+x-1 < 0 \\ y-x^2+2x+5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > -x+1 \\ y > x^2-2x-5 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y < -x+1 \\ y < x^2-2x-5 \end{cases} \dots\dots ③'$$



①'から②'から③'
を区別すると



求める領域は図の斜線部分
ただし、境界線を含まない。

(2) $1 \leq x \leq 4$ の部分は下図の斜線部分である。求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^3 \{(-x^2 + 6x - 5) - (-x + 1)\} dx \\
 &\quad + \int_3^4 \{(-x^2 + 6x - 5) - (x^2 - 2x - 5)\} dx \\
 &= \int_1^3 (-x^2 + 7x - 6) dx + \int_3^4 (-2x^2 + 8x) dx \\
 &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 6x \right]_1^3 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_3^4 = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

7'から2'を
計算すると

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= - \int_1^3 (x-6)(x-1) dx = - \left[(x-6) \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 \right]_1^3 \\
 &= - \left\{ (-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 \right\} = \frac{22}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} &= -2 \int_3^4 x(x-4) dx = 2 \int_4^3 x(x-4) dx \\
 &= 2 \left[x \cdot \frac{1}{2}(x-4)^2 - \frac{1}{6}(x-4)^3 \right]_4^3 \\
 &= 2 \left\{ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 \right\} = \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{22}{3} + \frac{10}{3} = \frac{32}{3}$$