2021年　新潟大学　（理系）　前期

※文系1と同じ問題（文系は(3)まで）

No.

Date

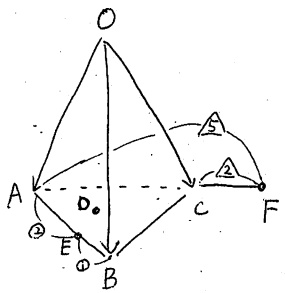
1　正四面体OABCにおいて三角形ABCの重心をD，線分ABを2：1に内分する点をE，線分ACを5：2に外分する点をFとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{OD}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{OE}$および$\overrightarrow{OF}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(3) 点Gは点Eを通り$\overrightarrow{OA}$に平行な直線上にある。点Hは点Fを通り$\overrightarrow{OB}$に平行な直線上にある。3点D，G，Hが一直線上にあるとき，ベクトル$\overrightarrow{OG}$および$\overrightarrow{OH}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(4) (3)で求めた$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OH}$に対して，$\dfrac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2}$を求めよ。



(1) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ //

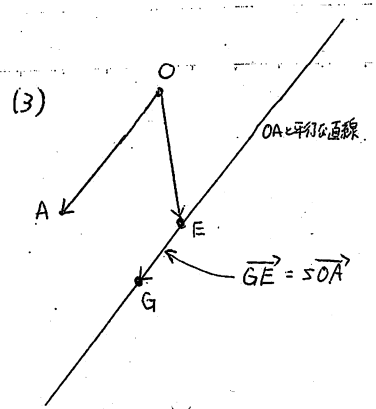
(2) $\overrightarrow{OE}=\dfrac{1\times\overrightarrow{OA}+2\times\overrightarrow{OB}}{2+1}$

$=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$ //

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{-2\times\overrightarrow{OA}+5\times\overrightarrow{OC}}{5-2}$

$=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{c}$ //

(3)



s，t，kを実数とする

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EG}$

$=\overrightarrow{OE}+s\overrightarrow{OA}$

$=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+s\vec{a}$

$=\left(\dfrac{1}{3}+s\right)\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$ ……①

同様に

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{OF}+t\overrightarrow{OB}$

$=\left(-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{c}\right)+t\vec{b}$

$=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\dfrac{5}{3}\vec{c}$ ……②

また $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OD}$

$=\left(\dfrac{1}{3}+s\right)\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=s\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}$ ……③

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}$

$=\left(-\dfrac{2}{3}\vec{a}+t\vec{b}+\dfrac{5}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=-\vec{a}+\left(t+\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}+\dfrac{4}{3}\vec{c}$ ……④

D，G，Hが一直線上にあるから

$\overrightarrow{DH}=k\overrightarrow{DG}$

③，④より

$-\vec{a}+\left(t+\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}+\dfrac{4}{3}\vec{c}$

$=sk\vec{a}+\dfrac{1}{3}k\vec{b}-\dfrac{1}{3}k\vec{c}$

ここで$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は一次独立なので

$$\begin{cases} sk=-1 & \cdots⑤ \\ \dfrac{1}{3}k=t+\dfrac{1}{3} & \cdots⑥ \\ -\dfrac{1}{3}k=\dfrac{4}{3} & \cdots⑦ \end{cases}$$

⑦より $k=-4$　⑤より $s=\dfrac{1}{4}$

⑥より $t=-1$

よって①，②より

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{7}{12}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$ //

$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\dfrac{5}{3}\vec{c}$ //

(4) 正四面体の1辺の長さをaとすると

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=a\times a\times\cos 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}a^2$

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{12}(7\vec{a}+8\vec{b})$ として両辺2乗

$|\overrightarrow{OG}|^2=\left(\dfrac{1}{12}\right)^2|7\vec{a}+8\vec{b}|^2$

$=\dfrac{1}{144}(49|\vec{a}|^2+116\vec{a}\cdot\vec{b}+64|\vec{b}|^2)$

$=\dfrac{1}{144}\left(49\cdot a^2+116\cdot\dfrac{1}{2}a^2+64\cdot a^2\right)$

$=\dfrac{169}{144}a^2$

また

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{3}(-2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c})$ として両辺2乗

$|\overrightarrow{OH}|^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2|-2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}|^2$

$=\dfrac{1}{9}(4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+25|\vec{c}|^2$

$+12\vec{a}\cdot\vec{b}-30\vec{b}\cdot\vec{c}-20\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{9}\left(4a^2+9a^2+25a^2\right.$

$\left.+12\cdot\dfrac{1}{2}a^2-30\cdot\dfrac{1}{2}a^2-20\cdot\dfrac{1}{2}a^2\right)$

$=\dfrac{1}{9}(4+9+25+6-15-10)a^2$

$=\dfrac{19}{9}a^2$

よって

$\dfrac{|\overrightarrow{OH}|^2}{|\overrightarrow{OG}|^2}=\dfrac{\frac{19}{9}a^2}{\frac{169}{144}a^2}=\dfrac{304}{169}$ //

2021年

※文系3と同じ問題です

2 座標平面上の2点 A(0, −1), B(1, 2) を通る直線を ℓ とする。また，中心 (3, −2)，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) ℓ と C は共有点を持たないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3) で求めた図形 T 上の点 (x, y) に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y-(-1)=\dfrac{2-(-1)}{1-0}(x-0)$

ℓ は $y=3x-1$ //

(2) (proof) ℓ から C の中心 $(3,-2)$ まで距離を d とすると，ℓ は $3x-y-1=0$ だから

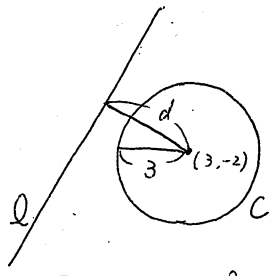
$$d=\frac{|3\times3-(-2)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$9<10$ より $\sqrt{9}<\sqrt{10}$

$3<\sqrt{10}$

よって C の半径 3 よりも d が大きいから



上の図のようになり、ℓ と C は共有点をもたない ▨

(3) $P(s, t)$ とすると P は C 上の点なので

$(s-3)^2+(t+2)^2=9$ …①

をみたす。

△ABP の重心を (x, y) とすると

$$(x,y)=\left(\frac{0+1+s}{3},\frac{-1+2+t}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{s+1}{3},\frac{t+1}{3}\right)$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{s+1}{3}\\ y=\dfrac{t+1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=3x-1\\ t=3y-1\end{cases}$$

これを①に代入して

$$\{(3x-1)-3\}^2+\{(3y-1)+2\}^2=9$$

$$(3x-4)^2+(3y+1)^2=9$$

$$\left\{3\left(x-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\left\{3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2\right\}=9$$

$$3^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+3^2\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=9$$

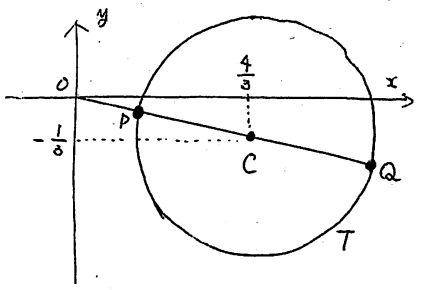
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=1 \quad \cdots②$$

逆にこの円②上の点 (x, y) 条件をみたす。

したがって求める軌跡は，

点 $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ を中心とする半径 1 の円である //

(4)



$\sqrt{x^2+y^2}$ は原点 O からの距離であるから

$C\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$ とすると直線 OC と T の共有点を P, Q とおくと

(ただし (P の x 座標) < (Q の x 座標))

求める最大値は OQ の長さであり，

最小値は OP の長さである

ここで $OC=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$ で

$OP=\frac{\sqrt{17}}{3}-1$，$OQ=\frac{\sqrt{17}}{3}+1$

だから

最大値 $\frac{\sqrt{17}}{3}+1$，最小値 $\frac{\sqrt{17}}{3}-1$ //

(求めなくてもいいと思いますが…)

直線 OC の方程式は $y=-\frac{1}{4}x$ だから

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{4}x\\ \left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=1\end{cases}$$

y 消去して

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left\{\left(-\frac{1}{4}x\right)+\frac{1}{3}\right\}^2=1$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left\{-\frac{1}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)\right\}^2=1$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{1}{16}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=1$$

$$\frac{17}{16}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=1$$

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{17}$$

$$x-\frac{4}{3}=\frac{\pm4\sqrt{17}}{17}$$

$$x=\frac{4}{3}\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$=\frac{28\pm12\sqrt{17}}{51}$$

$$y=-\frac{1}{4}\left(\frac{28\pm12\sqrt{17}}{51}\right)$$

$$=\frac{-7\mp3\sqrt{17}}{51}\quad(\text{複号同順})$$

$x=\frac{28+12\sqrt{17}}{51}$，$y=\frac{-7-3\sqrt{17}}{51}$ のとき

最大値 $\frac{\sqrt{17}}{3}+1$

$x=\frac{28-12\sqrt{17}}{51}$，$y=\frac{-7+3\sqrt{17}}{51}$ のとき

最小値 $\frac{\sqrt{17}}{3}-1$ //

2021年

No.

Date

3 平面上に正五角形ABCDEがあり，頂点A，B，C，D，Eは時計回りに配置されている。点Pをまず頂点Aの位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数nだけ動かす。たとえば，$n=2$ならば点Pは頂点Cの位置にあり，$n=6$ならば点Pは頂点Bの位置にある。次の問いに答えよ。

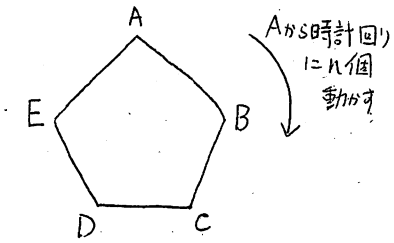
(1) さいころを2回投げて出た目の積でnを与えるとき，点Pが頂点Aの位置にある確率および点Pが頂点Bの位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころをk回投げて出た目の積でnを与えるとき，点Pが頂点Aの位置にある確率を求めよ。

(3) さいころをk回投げて出た目の積でnを与えるとき，点Pが頂点Bの位置にある確率をb_kとする。b_{k+1}をb_kを用いて表せ。

(4) (3)で与えたb_kに対して，$f_k=6^k b_k$とおく。数列$\{f_k\}$と$\{b_k\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

(1)



点PがAのとき nは5の倍数.

(1, 5), (2, 5) (3, 5), (4, 5) (5, 5) (6, 5)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 6)
の11通りなので
点PがAにある確率は $\frac{11}{36}$ //

点PがBのとき $n=5l+1$ (lは整数)
(nは5で割ると余り1の数)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

1, 6, 11, 16
21, 26, 31
36をさがすと

そのような組は7通りなので
点PがBにある確率は $\frac{7}{36}$ //

(2) さいころを投げて少なくとも1回5の目が出るとnは5の倍数となり，点PはAの位置にある.

求める確率は

$$\begin{pmatrix}k\text{回投げて}\\ \text{少なくとも}\\ \text{1回5の目}\end{pmatrix} = (\text{全体}) - \begin{pmatrix}k\text{回投げて}\\ \text{すべて5以外}\\ \text{の目}\end{pmatrix}$$

$$= 1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$= \frac{6^k-5^k}{6^k}$$ //

(3) さいころをk回投げて点PがBにある確率がb_kなので，点PがAまたはCまたはDまたはEにある確率は $1-b_k$ である. (2)より点PがAにある確率は $1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$ だから点PがCまたはDまたはEにある確率は.

$$(1-b_k)-\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\} = -b_k+\left(\frac{5}{6}\right)^k$$

点PがCの位置のとき $n=5l+2$ (lは整数)
と表れるので $k+1$回目に3が出たとき

$n=(5l+2)\times 3 = 15l+6$
$= 3(5l+1)+1$ であるから.
CからBに動く確率は $\frac{1}{6}$ である

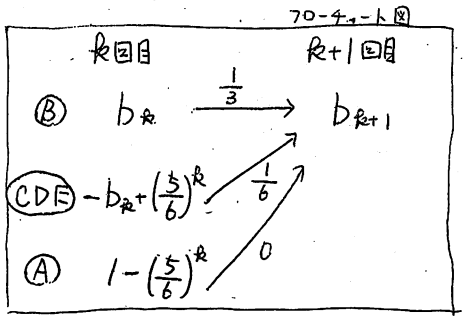
(※ 左の表をみるとあきらかですよ.)

同様に点PがDのときは $k+1$回目に 2
Eのときは 〃 4
が出るとBに動くので. その確率は $\frac{1}{6}$.

点PがBのときは $k+1$回目に 1か6が出るとBに動くので その確率は $\frac{1}{3}$

点PがAのときは. $k+1$回目に何が出てもA.
Bに動く確率は 0.

フローチャート図



よって

$$b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k + \frac{1}{6}\left\{-b_k+\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\} + 0\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\}$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{3}b_k - \frac{1}{6}b_k + \frac{1}{6}\cdot\frac{5^k}{6^k}$$

$$\therefore\ b_{k+1} = \frac{1}{6}b_k + \frac{5^k}{6^{k+1}} \quad \cdots\cdots ①$$ //

(4) さいころを1回投げて 1か6が出ると
点PはBに動くから

$$b_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

よって $f_1 = 6^1\times b_1 = 6\times\frac{1}{3} = 2$.

①の両辺を 6^{k+1}倍すると

$$6^{k+1}b_{k+1} = 6^{k+1}\cdot\frac{1}{6}b_k + 6^{k+1}\times\frac{5^k}{6^{k+1}}$$

$$6^{k+1}b_{k+1} = 6^k b_k + 5^k$$

$$f_{k+1} = f_k + 5^k$$

$\{f_k\}$の階差数列が5^kだから

$n\geqq 2$ のとき

$$f_k = f_1 + \sum_{i=1}^{k-1} 5^i$$

$$= 2 + \sum_{i=1}^{k-1} 5\cdot 5^{i-1}$$

$$= 2 + \frac{5(5^{k-1}-1)}{5-1}$$

$$= 2 + \frac{5^k-5}{4}$$

$$= \frac{5^k+3}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

②に$k=1$を代入すると
$f_1 = \frac{5^1+3}{4} = 2$ で $k=1$のとき成り立つ.

よって $f_k = \frac{5^k+3}{4}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) //

よって $6^k\cdot b_k = \frac{5^k+3}{4}$ だから

$$b_k = \frac{5^k+3}{4\cdot 6^k}$$ //

2021年

No.

Date

4 実数 a と b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$，$\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=4+\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx=\frac{4}{3}(4+\pi)$$

を満たすとき，a と b の値を求めよ。

(4) (3) で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して，$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx=\Big[x\sin x-1\cdot(-\cos x)\Big]_0^{2\pi}$

$=\Big[x\sin x+\cos x\Big]_0^{2\pi}$

$=(2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi)$

$\quad-(0\cdot\sin 0+\cos 0)$

$=(0+1)-(0+1)=\underline{0}$ //

「ブンブン」を使っています。

$\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx=\Big[x(-\cos x)-1\cdot(-\sin x)\Big]_0^{2\pi}$

$=\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{2\pi}$

$=(-2\pi\cos 2\pi+\sin 2\pi)$

$\quad-(-0\cdot\cos 0+\sin 0)$

$=(-2\pi+0)-(0+0)=\underline{-2\pi}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$

$=\Big[x^2\sin x-2x(-\cos x)+2(-\sin x)\Big]_0^{2\pi}$

$=\Big[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\Big]_0^{2\pi}$

$=(4\pi^2\sin 2\pi+4\pi\cos 2\pi-2\sin 2\pi)$

$\quad-(0\cdot\sin 0+2\cdot 0\cos 0-2\sin 0)$

$=(0+4\pi-0)-(0+0-0)=\underline{4\pi}$ //

$\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$

$=\Big[x^2(-\cos x)-2x(-\sin x)+2\cos x\Big]_0^{2\pi}$

$=\Big[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_0^{2\pi}$

$=(-4\pi^2\cos 2\pi+4\pi\sin 2\pi+2\cos 2\pi)$

$\quad-(-0\cos 0+2\cdot 0\sin 0+2\cos 0)$

$=(-4\pi^2+0+2)-(0+0+2)=\underline{-4\pi^2}$ //

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\left(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right)\cos x\,dx$

$\displaystyle=a\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx+b\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx+\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx$

$\displaystyle\quad+2\int_0^{2\pi}\cos x\cos\frac{x}{2}\,dx=4+\pi\ \cdots\cdots①$

ここで $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{2\pi}$

$=\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$

また $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\cos\frac{x}{2}\,dx$ について

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x+2\sin\frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}\sin 3\pi+2\sin\pi\right)\right.$

$\quad\left.-\left(\frac{2}{3}\sin 0+2\sin 0\right)\right\}=0$

であるから

① $\Leftrightarrow$ $a\times\overset{(2)}{4\pi}+b\times\overset{(1)}{0}+\pi+2\times 0=4+\pi$

$4\pi a=4$

$\therefore a=\underline{\frac{1}{\pi}}$ //

また $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\left(ax^2+bx+\cos x+2\cos\frac{x}{2}\right)\sin x\,dx$

$\displaystyle=a\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx+b\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx+\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx$

$\displaystyle\quad+2\int_0^{2\pi}\sin x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{4}{3}(4+\pi)\ \cdots\cdots②$

ここで $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{2\pi}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi\right)-\left(-\frac{1}{2}\cos 0\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=0$

また $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\cos\frac{x}{2}\,dx$ について

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ より

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{3}{2}x+\sin\frac{x}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[-\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}x-2\cos\frac{x}{2}\Big]_0^{2\pi}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{2}{3}\cos 3\pi-2\cos\pi\right)\right.$

$\displaystyle\quad\left.-\left(-\frac{2}{3}\cos 0-2\cos 0\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{3}+2\right)-\left(-\frac{2}{3}-2\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+4\right)=\frac{8}{3}$

であるから

② $\Leftrightarrow$ $a\times\overset{(2)}{(-4\pi^2)}+b\times\overset{(1)}{(-2\pi)}+0+2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\pi$

$\frac{1}{\pi}\times(-4\pi^2)-2\pi b=\frac{4}{3}\pi$

$-4\pi-2\pi b=\frac{4}{3}\pi$

$-2\pi b=\frac{16}{3}\pi$

$\therefore b=\underline{-\frac{8}{3}}$ //

(4) (3) より

$\displaystyle f(x)=\frac{1}{\pi}x^2-\frac{8}{3}x+\cos x+2\cos\frac{x}{2}$

$\displaystyle=\frac{1}{\pi}\left(x^2-\frac{8}{3}\pi x\right)+2\cos^2\frac{x}{2}-1+2\cos\frac{x}{2}$

$\displaystyle=\frac{1}{\pi}\left\{\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)^2-\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\right\}$

$\displaystyle\quad+2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)-1$

$\displaystyle=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)^2-\frac{16}{9}\pi$

$\displaystyle\quad+2\left\{\left(\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-1$

$\displaystyle=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{4}{3}\pi\right)^2+2\left(\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{16}{9}\pi-\frac{3}{2}$

$\begin{cases} x-\frac{4}{3}\pi=0 \\ \cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} x=\frac{4}{3}\pi \\ \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases}$

の解は $x=\frac{4}{3}\pi$ である

よって

$x=\frac{4}{3}\pi$ のとき最小値 $\underline{-\frac{16}{9}\pi-\frac{3}{2}}$ //

2021年

5 複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の4点 z_1, z_2, z_3, z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\quad \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\quad \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

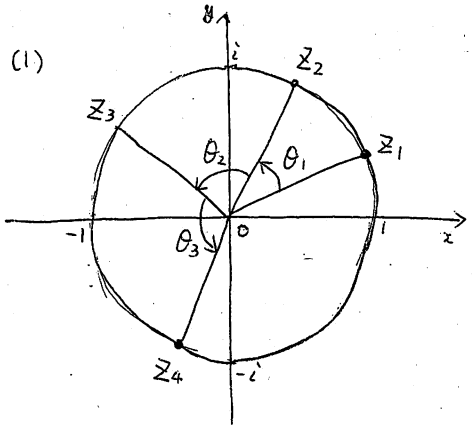
を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $|z_2-z_1|$ を θ_1 を用いて表せ。

(2) $|z_3-z_1|$, $|z_4-z_1|$ を θ_1, θ_2, θ_3 を用いて表せ。

(3) $\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。

(1)



題意より

$z_2=z_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ だから

$$|z_2-z_1|=|z_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)-z_1|$$
$$=|z_1\{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)-1\}|$$
$$=|z_1|\,|(\cos\theta_1-1)+i\sin\theta_1|$$
$$=1\times\sqrt{(\cos\theta_1-1)^2+(\sin\theta_1)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^2\theta_1-2\cos\theta_1+1+\sin^2\theta_1}$$
$$=\sqrt{2-2\cos\theta_1}=\sqrt{2(1-\cos\theta_1)}$$

ここで $1-2\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$ より

$1-2\sin^2\frac{\theta_1}{2}=\cos\theta_1$ (2倍角) (半角)

$\Leftrightarrow$ $1-\cos\theta_1=2\sin^2\frac{\theta_1}{2}$

だから

$$|z_2-z_1|=\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{\theta_1}{2}}$$
$$=\sqrt{\left(2\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^2}$$
$$=\left|2\sin\frac{\theta_1}{2}\right|$$

ここで $\theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$ より

$0<\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}<\pi$ だから

$0<\frac{\theta_1}{2}<\pi$ となり

$\sin\frac{\theta_1}{2}>0$ であるから

$$|z_2-z_1|=2\sin\frac{\theta_1}{2}$$

(2) 題意より. ((1)の図より)

$z_3=z_1\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

なので(1)と同様に

$$|z_3-z_1|=2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$z_4=z_1\{\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}$

なので(1)と同様に

$$|z_4-z_1|=2\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}$$

(3) (proof) 三角関数の積和公式, 和積公式を導く.

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$
$$-)\quad \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\quad\cdots①$$
$$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\quad\cdots②$$

① で $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=B$ とおくと $\alpha=\frac{A+B}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$ だから

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\quad\cdots③$$

(1)(2)より

$$(\text{左辺})=\frac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\cdot\cancel{2}\sin\frac{\theta_1}{2}+\cancel{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cancel{2}\sin\frac{\theta_3}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\cancel{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\cancel{2}\sin\frac{\theta_3}{2}\cdot\cancel{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}}$$

約分してから ②を使う

$$=\frac{-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

分子分子を −2倍.

$$=\frac{\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}+\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}$$ ← ここで③を使う

約分

$$=\frac{-2\sin\frac{\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}+\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}{2}\sin\frac{\frac{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\frac{\theta_2-\theta_3}{2}}{2}}{-2\sin\frac{\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}+\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}{2}-\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}}{2\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{2\sin\frac{\theta_2+\theta_3}{2}}\underset{(1)(2)}{=}\frac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}=(\text{左辺})$$

よって題意は示された ▨

2021年

6 $a \geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$$

を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$

とおく。$\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

(1) (proof)

$f(x)=\frac{x}{1+a}-\log\frac{1+a+x}{1+a}$ とおくと

$f(x)=\frac{x}{1+a}-\{\log(1+a+x)-\log(1+a)\}$

$f'(x)=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+a+x}$

$=\frac{x}{(1+a)(1+a+x)}>0$

$f(0)=\frac{0}{1+a}-\log\frac{1+a+0}{1+a}=0$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	↗

増減表より $f(x)>0$ だから

$\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$ ……①

が成り立つ

$g(x)=\log\frac{1+a+x}{1+a}-\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)$ とおくと

$g(x)=\log(1+a+x)-\log(1+a)-\frac{x}{1+a}+\frac{x^2}{2(1+a)^2}$

$g'(x)=\frac{1}{1+a+x}-\frac{1}{1+a}+\frac{x}{(1+a)^2}$

$=\frac{(1+a)^2-(1+a)(1+a+x)+x(1+a+x)}{(1+a)^2(1+a+x)}$

$=\frac{(1+a)^2-(1+a)^2-(1+a)x+(1+a)x+x^2}{(1+a)^2(1+a+x)}$

$=\frac{x^2}{(1+a)^2(1+a+x)}>0$

$g(0)=\log\frac{1+a+0}{1+a}-\frac{0}{1+a}\left(1-\frac{0}{2(1+a)}\right)=0$

x	0	$\cdots$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	0	↗

増減表より $g(x)>0$ だから

$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}$ ……②

が成り立つ。

①，②より

$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$ ……③

が成り立つ ▨

(2) $\log I_n(a)$

$=\log\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$

$=\log\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n^2(1+a)+k}{n^2(1+a)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1+a+\frac{k}{n^2}}{1+a}$ ……④

point 対数の中を③と同じ形にしてみよう

ここで③の不等式に $x=\frac{k}{n^2}$ を代入して

$\frac{\frac{k}{n^2}}{1+a}\left(1-\frac{\frac{k}{n^2}}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+\frac{k}{n^2}}{1+a}<\frac{\frac{k}{n^2}}{1+a}$

$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+a}\left(1-\frac{\frac{k}{n^2}}{2(1+a)}\right)}_{Ⓐ\text{とおく}}<\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1+a+\frac{k}{n^2}}{1+a}<\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+a}}_{Ⓑ\text{とおく}}$ ……⑤

④より $\log I_n(a)$ です。

Ⓐ $=\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2(1+a)}\cdot\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{1+a}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2(1+a)}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right)$

$=\frac{1}{1+a}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2(1+a)n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$

$=\frac{1}{1+a}\left\{\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{2(1+a)n^4}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$

$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1+a}\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2(1+a)}$

Ⓑ $=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{1+a}\cdot\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$\longrightarrow\frac{1}{1+a}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2(1+a)}$

⑤で はさみうちの原理により

$\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)=\frac{1}{2(1+a)}$ ……⑥ //

(3) $a_n=\frac{{}_{3n^2+n}C_n}{{}_{2n^2+n}C_n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ とおく。

$a_n=\frac{(3n^2+n)!}{n!(3n^2)!}\times\frac{n!(2n^2)!}{(2n^2+n)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{(3n^2+n)!}{(3n^2)!}\frac{(2n^2)!}{(2n^2+n)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{(3n^2+n)!}{(3n^2)!}}{\frac{(2n^2+n)!}{(2n^2)!}}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{(3n^2+n)(3n^2+n-1)(3n^2+n-2)\cdots(3n^2+1)}{(2n^2+n)(2n^2+n-1)(2n^2+n-2)\cdots(2n^2+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

かけ算の前後いれかえる。

$=\frac{(3n^2+1)(3n^2+2)\cdots(3n^2+n-1)(3n^2+n)}{(2n^2+1)(2n^2+2)\cdots(2n^2+n-1)(2n^2+n)}\cdot\frac{2^n}{3^n}$

「分母分子を n^2 で割る」を n 回行う。

$=\frac{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(3+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(3+\frac{n}{n^2}\right)}{\left(2+\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(2+\frac{n-1}{n^2}\right)\left(2+\frac{n}{n^2}\right)}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

「分子の( )に $\frac{1}{3}$ をかける」を n 回分，同様に分母は $\frac{1}{2}$ をかける

$=\frac{\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)\left(1+\frac{2}{3n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{3n^2}\right)\left(1+\frac{n}{3n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{2n^2}\right)\left(1+\frac{n}{2n^2}\right)}$

$=\frac{I_n(2)}{I_n(1)}$

よって $\log a_n=\log\frac{I_n(2)}{I_n(1)}$

$=\log I_n(2)-\log_n(1)$

⑥より $\lim_{n\to\infty}\log I_n(2)=\frac{1}{2(1+2)}=\frac{1}{6}$

$\lim_{n\to\infty}\log I_n(1)=\frac{1}{2(1+1)}=\frac{1}{4}$

だから

$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$

$=\log_e e^{-\frac{1}{12}}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-\frac{1}{12}}$ //

(1) 別解みたいなことですが $f(x)=\log x$ とおいて $x>0$ で連続 $[1+a,\ 1+a+x]$ で微分可能なので平均値の定理より $f'(x)=\frac{1}{x}$

$\frac{\log(1+a+x)-\log(1+a)}{(1+a+x)-(1+a)}=f'(c)$，$1+a<c<1+a+x$

をみたす c が存在し，$\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$ の方だけは示すことができます。反対側は……

新潟大学 文系 農学部 前期試験 2021年

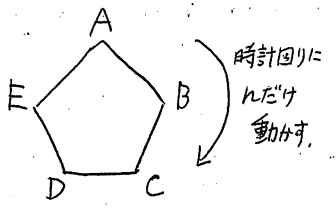
文系 1 は理系 1 と同じ問題です。(文系は(3)まで)
文系 3 は理系 2 と同じ問題です。

2 平面上に正五角形ABCDEがあり，頂点A，B，C，D，Eは時計回りに配置されている。点Pをまず頂点Aの位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点Pは頂点Cの位置にあり，$n=6$ ならば点Pは頂点Bの位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを2回投げて出た目の和で n を与えるとき，点Pが頂点A，B，C，D，Eの位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを3回投げて出た目の和で n を与えるとき，点Pが頂点Dの位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを5回投げて出た目の和で n を与えるとき，点Pが頂点Aの位置にある確率を求めよ。



(1) さいころを k 回投げて点Pが頂点A, B, C, D, Eにある確率を，それぞれ $P_k(A)$, $P_k(B)$, $P_k(C)$, $P_k(D)$, $P_k(E)$ とする。

$k=2$ のとき 下の表のように n の値が決まる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

点Pは

$n=5, 10$ のとき頂点Aにくるから

$$P_2(A)=\frac{4+3}{36}=\frac{7}{36}$$

$n=6, 11$ のとき頂点Bにくるから

$$P_2(B)=\frac{5+2}{36}=\frac{7}{36}$$

$n=2, 7, 12$ のとき頂点Cにくるから

$$P_2(C)=\frac{1+7+1}{36}=\frac{2}{9}$$

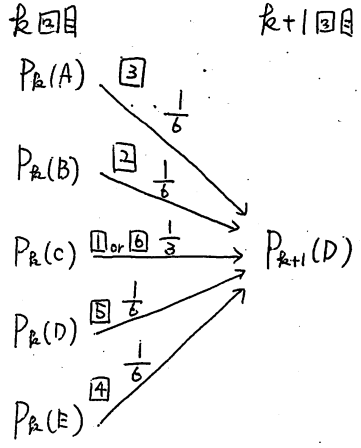
$n=3, 8$ のとき頂点Dにくるから

$$P_2(D)=\frac{2+5}{36}=\frac{7}{36}$$

$n=4, 9$ のとき 頂点Eにくるから

$$P_2(E)=\frac{3+4}{36}=\frac{7}{36}$$

(2) フローチャート図をかくと



$$P_{k+1}(D)=\frac{1}{6}P_k(A)+\frac{1}{6}P_k(B)+\frac{1}{3}P_k(C)+\frac{1}{6}P_k(D)+\frac{1}{6}P_k(E)$$

これに $k=1$ を代入すると

$$P_3(D)=\frac{1}{6}P_2(A)+\frac{1}{6}P_2(B)+\frac{1}{3}P_2(C)+\frac{1}{6}P_2(D)+\frac{1}{6}P_2(E)$$

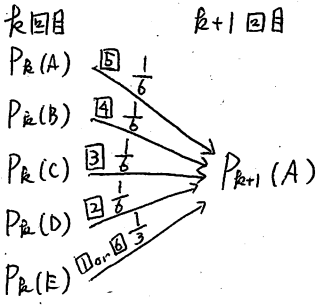
(1)の結果を代入すると

$$P_3(D)=\frac{1}{6}\times\frac{7}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{36}+\frac{1}{3}\times\frac{8}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{36}+\frac{1}{6}\times\frac{7}{36}$$

$$=\frac{1}{216}(7+7+16+7+7)$$

$$=\frac{44}{216}=\frac{11}{54}$$

(3)



$$P_{k+1}(A)=\frac{1}{6}P_k(A)+\frac{1}{6}P_k(B)+\frac{1}{6}P_k(C)+\frac{1}{6}P_k(D)+\frac{1}{3}P_k(E)$$

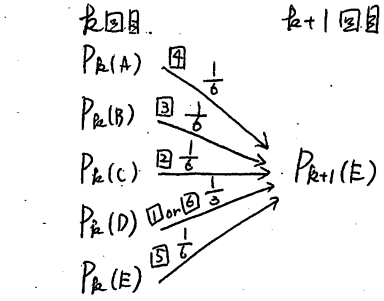
$$=\frac{1}{6}(P_k(A)+P_k(B)+P_k(C)+P_k(D)+P_k(E))+\frac{1}{6}P_k(E)$$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ とばらした

ここで

$P_k(A)+P_k(B)+P_k(C)+P_k(D)+P_k(E)=1$ より

$$P_{k+1}(A)=\frac{1}{6}P_k(E)+\frac{1}{6}\quad\cdots\cdots①$$



$$P_{k+1}(E)=\frac{1}{6}P_k(A)+\frac{1}{6}P_k(B)+\frac{1}{6}P_k(C)+\frac{1}{3}P_k(D)+\frac{1}{6}P_k(E)$$

$$=\frac{1}{6}(P_k(A)+P_k(B)+P_k(C)+P_k(D)+P_k(E))+\frac{1}{6}P_k(D)$$

$$\therefore P_{k+1}(E)=\frac{1}{6}P_k(D)+\frac{1}{6}\quad\cdots②$$

②より $P_4(E)=\frac{1}{6}P_3(D)+\frac{1}{6}$ ← (2)を使う

$$=\frac{1}{6}\times\frac{11}{54}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{65}{324}\quad\cdots③$$

よって①より

$P_5(A)=\frac{1}{6}P_4(E)+\frac{1}{6}$ ← ③代入する

$$=\frac{1}{6}\times\frac{65}{324}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{389}{1944}$$

2021年

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x\,|\,x-1\,| - 3x + 3$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax + 3$ で囲まれた図形の面積 S を a を用いて表せ。

(3) (2) で与えられた S に対して，a の値が $-3 \leqq a \leqq -2$ の範囲で動くとき，S の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

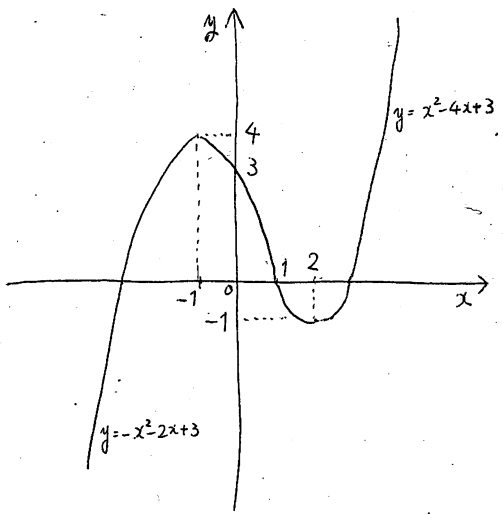
(1)

(i) $x \geqq 0$ のとき

$$f(x) = x(x-1) - 3x + 3$$
$$= x^2 - 4x + 3$$
$$= (x-2)^2 - 1$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$f(x) = x\{-(x-1)\} - 3x + 3$$
$$= -x^2 + x - 3x + 3$$
$$= -x^2 - 2x + 3$$
$$= -(x-1)^2 + 4$$



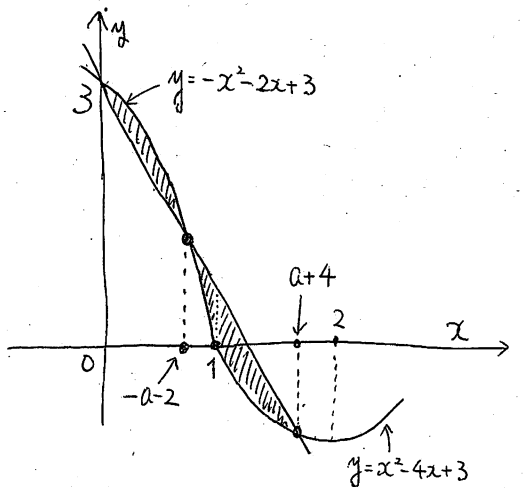
(2) $-3 \leqq a \leqq -2$ のとき

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = ax + 3 \end{cases}$$ で y 消去して

$$-x^2 - 2x + 3 = ax + 3$$
$$x(x + a + 2) = 0$$
$$x = 0,\ -a-2$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = ax + 3 \end{cases}$$ で y 消去して

$$x^2 - 4x + 3 = ax + 3$$
$$x(x - a - 4) = 0$$
$$x = 0,\ a+4$$



求める面積 S は

$$S = \int_0^{-a-2} \{(-x^2-2x+3) - (ax+3)\}\,dx$$
$$+ \int_{-a-2}^{1} \{(ax+3) - (-x^2-2x+3)\}\,dx$$
$$+ \int_1^{a+4} \{(ax+3) - (x^2-4x+3)\}\,dx$$

$$S = -\int_0^{-a-2} x(x+a+2)\,dx$$
$$+ \int_{-a-2}^{1} \{x^2 + (a+2)x\}\,dx$$
$$+ \int_1^{a+4} \{-x^2 + (a+4)x\}\,dx$$

$$= -\left\{-\frac{1}{6}(-a-2-0)^3\right\}$$
$$+ \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+2}{2}x^2\right]_{-a-2}^{1}$$
$$+ \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+4}{2}x^2\right]_1^{a+4}$$

$$= -\frac{1}{6}(a+2)^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{a+2}{2}\right)$$
$$-\left\{\frac{1}{3}(-a-2)^3 + \frac{(a+2)}{2}(-a-2)^2\right\}$$
$$+\left\{-\frac{1}{3}(a+4)^3 + \frac{(a+4)}{2}\cdot(a+4)^2\right\}$$
$$-\left(-\frac{1}{3} + \frac{a+4}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}(a+2)^3 + \frac{1}{3} + \frac{a+2}{2} + \frac{1}{3}(a+2)^3$$
$$-\frac{1}{2}(a+2)^3 - \frac{1}{3}(a+4)^3 + \frac{1}{2}(a+4)^3$$
$$+\frac{1}{3} - \frac{a+4}{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)(a+2)^3 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)(a+4)^3$$
$$+\frac{1}{3} + \frac{a+2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-a-4}{2}$$

$$= -\frac{1}{3}(a+2)^3 + \frac{1}{6}(a+4)^3 - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(a^3 + 6a^2 + 12a + 8)$$
$$+ \frac{1}{6}(a^3 + 12a^2 + 48a + 64) - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 - 2a^2 - 4a - \frac{8}{3}$$
$$+ \frac{1}{6}a^3 + 2a^2 + 8a + \frac{32}{3} - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{6}a^3 + 4a + \frac{23}{3}$$

(3) $S(a) = -\frac{1}{6}a^3 + 4a + \frac{23}{3}$ $(-3 \leqq a \leqq -2)$ とおく。

$$S'(a) = -\frac{1}{2}a^2 + 4 = -\frac{1}{2}(a^2 - 8)$$
$$= -\frac{1}{2}(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2})$$

$$S(-3) = -\frac{1}{6}(-3)^3 + 4(-3) + \frac{23}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S(-2) = -\frac{1}{6}(-2)^3 + 4(-2) + \frac{23}{3} = 1$$

$$S(-2\sqrt{2}) = -\frac{1}{6}(-2\sqrt{2})^3 + 4(-2\sqrt{2}) + \frac{23}{3}$$
$$= \frac{23 - 16\sqrt{2}}{3}$$

a	-3	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	↘	$\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$	↗	1

増減表より

$a = -2$ のとき 最大値 1

$a = -2\sqrt{2}$ のとき 最小値 $\frac{23 - 16\sqrt{2}}{3}$