【問題】　a を定数とする。次の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|$ を x について微分せよ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx$ を求めよ。

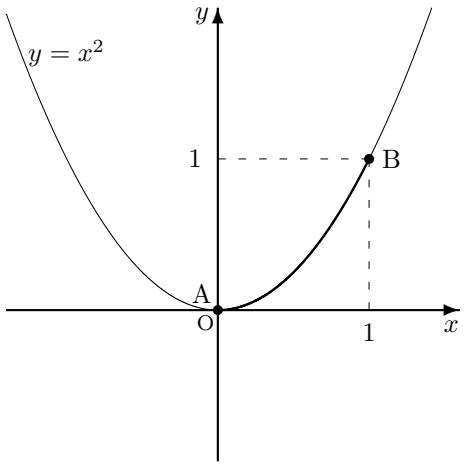
(3) 放物線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の曲線の長さ s を求めよ。

【解答例】

(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2+a})' &= ((x^2+a)^{\frac{1}{2}})'\\ &= \frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2+a)'\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\cdot 2x\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}y' &= (\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|)'\\ &= \frac{(x+\sqrt{x^2+a}\,)'}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\quad\leftarrow ①\text{ を使う}\\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\ /\!/\end{aligned}$$



※ A から B までの曲線の長さを計算しています。

(2) (1) より $(\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ だから，C を積分定数とすると

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx=\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|+C\quad\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+a}\,dx &= x\sqrt{x^2+a}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx\quad\leftarrow\text{部分積分}\\ &= x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}\,dx\\ &= x\sqrt{x^2+a}-\int\left(\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}-\frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = x\sqrt{x^2+a}-\int\left(\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx\\ &= x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx\quad\leftarrow ②\text{ を使う}\\ &= x\sqrt{x^2+a}-\underbrace{\int\sqrt{x^2+a}\,dx}+a\cdot\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|\quad\leftarrow\ \text{〰 は最初の式だから左辺に移項}\end{aligned}$$

$$2\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}+a\cdot\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|\quad\text{ここで } C' \text{ を積分定数とすると}$$

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a}+a\log|\,x+\sqrt{x^2+a}\,|\right)+C'\ /\!/$$

(3) $y=x^2$ を微分して，$y'=2x$ だから求める曲線の長さ s は

$$\begin{aligned}s &= \int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx\qquad\leftarrow (2)\text{ で } a=\frac{1}{4}\\ &= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\right]_0^1=\left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_0^1\\ &= \left\{1\cdot\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left(1+\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}\right)\right\}-\left\{0\cdot\sqrt{0^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left(0+\sqrt{0^2+\frac{1}{4}}\right)\right\}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{2+\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\left(\log\frac{2+\sqrt{5}}{2}-\log\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})\ /\!/\end{aligned}$$

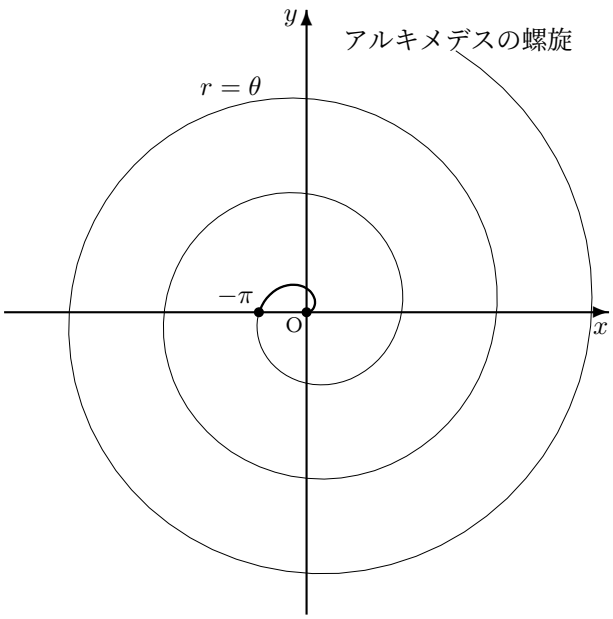
参考までに電卓によると $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})=1.478\cdots$ でした。

$r=\theta$ の曲線の長さ

2002 年京都大学理系第 4 問

(1) $x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 極方程式 $r=\theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。



(1) $(\sqrt{1+x^2})' = \{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\}' = \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)'$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

すなわち，$(\sqrt{1+x^2})' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ……①

$f'(x) = \{\log(x+\sqrt{1+x^2})\}' = \dfrac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ←分子で ①

$$= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ /\!/$$

(1) 極方程式 $r=\theta$ を媒介変数表示すると（直交座標にすると）

$$x=\theta\cos\theta,\ y=\theta\cos\theta$$

（※ 極座標を直交座標に直す公式 $x=r\cos\theta$，$y=r\cos\theta$ に $r=\theta$ を代入しました。）

$$\frac{dx}{d\theta} = (\theta\cos\theta)' = (\theta)'\cos\theta + \theta(\cos\theta)' = 1\cdot\cos\theta + \theta\cdot(-\sin\theta) = \cos\theta - \theta\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (\theta\sin\theta)' = (\theta)'\sin\theta + \theta(\sin\theta)' = 1\cdot\sin\theta + \theta\cdot\cos\theta = \sin\theta + \theta\cos\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2$$

$$= (\cos^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta) + (\sin^2\theta + 2\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\cos^2\theta)$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \theta^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1 + \theta^2$$

求める曲線の長さを s とすると

$$s = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2}\cdot 1\,d\theta$$

$$= \Big[(\sqrt{1+\theta^2})\cdot\theta\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}\cdot\theta\,d\theta$$ ←部分積分。 $\sqrt{1+\theta^2}$ を微分するので，ここでも ① が使える。

$$= \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$= \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{1+\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right)d\theta = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right)d\theta$$

$$= \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta}_{②} + \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$ ← ② は s

$$s = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - s + \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$2s = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta}_{③}$$ ← ③ は (1) の微分の結果を使うと

$\{\log(x+\sqrt{1+x^2})\}' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \iff \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \log(x+\sqrt{1+x^2}) + C$ （C は積分定数）だから

$$2s = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi + \Big[\log(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_0^\pi = \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}\left\{\pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})\right\} \ /\!/$$