

「漸化式」攻略冊子

基礎となる等差型と等比型

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

(2) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n - 3$

【解答】 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

【解答】 $a_n = -3n + 10$

(3) $a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n - 6$

(4) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 4n - 2$

【解答】 $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$

【解答】 $a_n = 2n^2 - 4n + 5$

(5) $a_1 = 1, 3a_{n+1} = 2a_n + 3$

(6) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$

【解答】 $a_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$

【解答】 $a_n = \frac{2n-1}{n}$

$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型 p^{n+1} で割るか、 q^{n+1} で割るか

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

【解答】 $a_n = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$

(2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

【解答】 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n-1}$

【解答】 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$

$$a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n - r} \text{ 型 (分数型) } \quad \text{逆数で解決}$$

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1}$

【解答】 $a_n = \frac{1}{3 \cdot (-1)^{n-1} + 2}$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$

【解答】 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$

(3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{3a_n}{3 + a_n}$

【解答】 $a_n = \frac{3}{n + 2}$

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[] で示した置き換えを使うこと。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$ $[b_n = \log_2 a_n]$

【解答】 $a_n = 2^{2-2^{2-n}}$

(2) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n^2$ $[b_n = \log_2 a_n]$

【解答】 $a_n = 2^{2^{n-1}-1}$

(3) $a_1 = \frac{1}{2}$, $(n+2)a_{n+1} = na_n$ $[b_n = n(n+1)a_n]$

【解答】 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[] で示した置き換えを使うこと。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4n$ $[b_n = a_{n+1} - a_n]$

【解答】 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$

(2) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3$ $[b_n = a_{n+1} - a_n]$

【解答】 $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1$

(3) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3$ $[b_n = a_n + n - 1]$

【解答】 $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1$

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

【解答】 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

(2) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$

【解答】 $a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$

(3) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

【解答】 $a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) \quad a_1 = 1, b_1 = 1, \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

$$\text{【解答】} \quad a_n = \frac{(-1)^n + 3^n}{2}, b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

$$(2) \quad a_1 = 1, b_1 = 3, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \end{cases}$$

$$\text{【解答】} \quad a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}, b_n = \frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

数列の和と一般項 (S_n と a_n が混じった漸化式)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$n = 1 \text{ のとき } a_1 = S_1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{これを拡張すると } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad (\text{数列の和と一般項の漸化式版})$$

8 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (1) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = -2a_n - 2n + 5$ を満たす数列 $\{a_n\}$

$$\text{【解答】 } a_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2$$

- (2) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2a_n + n$ を満たす数列 $\{a_n\}$

$$\text{【解答】 } a_n = -2^n + 1$$

$$a_{n+1} = a_n + (n \text{ の式}) \rightarrow \text{階差数列で}$$

「漸化式」攻略冊子

基礎となる等差型と等比型

$$a_{n+1} = pa_n + q \rightarrow C = pC + q \text{ (特性方程式) 解くと}$$

$$a_{n+1} - C = p(a_n - C) \text{ と変形}$$

1 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$

数列 $\{a_n\}$ は初項 2, 公比 3
の等比数列だから

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} //$$

【解答】 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(2) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n - 3$

数列 $\{a_n\}$ は初項 7, 公差 -3
の等差数列だから

$$a_n = 7 + (n-1) \cdot (-3)$$

$$\therefore a_n = -3n + 10 //$$

【解答】 $a_n = -3n + 10$

(3) $a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n - 6$

$$\begin{aligned} -) \quad 2 &= 4 \cdot 2 - 6 \\ a_{n+1} - 2 &= 4(a_n - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 4C - 6 \\ \text{解くと} \\ C &= 2 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 5 - 2 = 3$
公比 4 の等比数列だから

$$a_n - 2 = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2 //$$

【解答】 $a_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$

(4) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 4n - 2$

($\{a_n\}$ の階差数列は $b_n = 4n - 2$.)

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 2)$$

$$= 3 + 4 \times \frac{1}{2} (n-1) \cdot n - 2(n-1)$$

$$= 2n^2 - 4n + 5 \dots \text{①}$$

①に $n=1$ を代入すると $a_1 = 2 - 4 + 5 = 3$

$n=1$ のとき成り立つ。

よって

$$a_n = 2n^2 - 4n + 5 //$$

【解答】 $a_n = 2n^2 - 4n + 5$

(5) $a_1 = 1, 3a_{n+1} = 2a_n + 3$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$$

$$\begin{aligned} -) \quad 3 &= \frac{2}{3} \times 3 + 1 \\ a_{n+1} - 3 &= \frac{2}{3}(a_n - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{3}C + 1 \\ \text{解くと} \\ C &= 3 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n - 3\}$ は初項 $a_1 - 3 = 1 - 3 = -2$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから

$$a_n - 3 = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3 //$$

【解答】 $a_n = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 3$

(6) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$

($\{a_n\}$ の階差数列は $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$.)

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \dots \text{①}$$

$$= 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n} \dots \text{②}$$

①に $n=1$ を代入すると $a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = 1$

$n=1$ のとき成り立つ

$$\therefore a_n = \frac{2n-1}{n} //$$

【解答】 $a_n = \frac{2n-1}{n}$

部分分数分解を使う

こっちがよい。

↓

$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型 p^{n+1} で割るか、 q^{n+1} で割るか

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{a_n}{3^n} + 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = b_n \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{3}{3} = 1 \text{ と}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + 1$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}(b_n - 3) \leftarrow \begin{array}{l} C = \frac{2}{3}C + 1 \\ \text{ε 解くと} \\ C = 3 \end{array}$$

数列 $\{b_n - 3\}$ は初項 $b_1 - 3 = 1 - 3 = -2$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから

(2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2 \times 2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \times \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1) \leftarrow \begin{array}{l} C = \frac{3}{2}C + 1 \\ \text{ε 解くと} \\ C = -1 \end{array}$$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列だから

(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 2^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2 \times 2^n} + \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{4} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{4}$$

$\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$ 、公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列だから

$$b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4}$$

$$b_n - 3 = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 3 - 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = 3 - 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$$a_n = 3^n \left(3 - \frac{2^n}{3^{n-1}} \right)$$

$$= 3^n \times 3 - 3^n \times \frac{2^n}{3^{n-1}}$$

$$= 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n //$$

【解答】 $a_n = 3^{n+1} - 3 \cdot 2^n$

$$b_{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} - 1$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{3^{n-1}}{2^{n-2}} - 1$$

$$a_n = 2^n \left(\frac{3^{n-1}}{2^{n-2}} - 1 \right)$$

$$= 2^n \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-2}} - 2^n$$

$$= 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n //$$

【解答】 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2^n$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{n+1}{4}$$

$$a_n = 2^n \times \frac{n+1}{4}$$

$$= (n+1) \cdot 2^{n-2} //$$

【解答】 $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$

$a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n - r}$ 型 (分数型) 逆数で解決

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n - 1}$

逆数をとる $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n - 1}{a_n} = \frac{4a_n}{a_n} - \frac{1}{a_n}$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{a_n} + 4 \dots \textcircled{1}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_n = -b_n + 4$

$\Leftrightarrow b_n - 2 = -(b_n - 2)$

数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 $b_1 - 2 = 5 - 2 = 3$

公比 -1 の等比数列だから

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$

逆数をとる $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{2}{a_n}$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1}} = 2 \times \frac{1}{a_n} + 1 \dots \textcircled{1}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n + 1$

$\Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比 2 の等比数列だから

(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3a_n}{3 + a_n}$

逆数をとる $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3 + a_n}{3a_n} = \frac{3}{3a_n} + \frac{a_n}{3a_n}$

すなわち $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3} \dots \textcircled{1}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{3}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1 、公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列だから

$b_n - 2 = 3 \cdot (-1)^{n-1}$

$b_n = 3 \cdot (-1)^{n-1} + 2$

$\frac{1}{a_n} = 3 \cdot (-1)^{n-1} + 2$

$\therefore a_n = \frac{1}{3 \cdot (-1)^{n-1} + 2}$ //

【解答】 $a_n = \frac{1}{3 \cdot (-1)^{n-1} + 2}$

$b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$

$b_n = 2^n - 1$

$\frac{1}{a_n} = 2^n - 1$

$\therefore a_n = \frac{1}{2^n - 1}$ //

【解答】 $a_n = \frac{1}{2^n - 1}$

$b_n = 1 + (n-1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$

$b_n = \frac{n+2}{3}$

$\frac{1}{a_n} = \frac{n+2}{3}$

$\therefore a_n = \frac{3}{n+2}$ //

【解答】 $a_n = \frac{3}{n+2}$

様々な置き換え

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[] で示した置き換えを使うこと。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \quad [b_n = \log_2 a_n]$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{a_n} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{a_n}$$

$$= 1 + \log_2 a_n^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 a_n$$

すなわち

$$\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} \log_2 a_n + 1 \dots \textcircled{1}$$

$b_n = \log_2 a_n$ とおくと $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (b_n - 2)$$

数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 $b_1 - 2 = 0 - 2 = -2$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$b_n - 2 = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = 2 - 2 \times (2^{-1})^{n-1}$$

$$= 2 - 2^1 \times 2^{-n+1}$$

$$= 2 - 2^{-n+2}$$

$$\log_2 a_n = 2 - 2^{-n+2}$$

$$a_n = 2^{2-2^{-n+2}} = 2^{2-2^{2-n}}$$

【解答】 $a_n = 2^{2-2^{2-n}}$

(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n^2 \quad [b_n = \log_2 a_n]$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n^2 = \log_2 2 + \log_2 a_n^2$$

$$= 1 + 2\log_2 a_n$$

すなわち

$$\log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 1 \dots \textcircled{1}$$

$b_n = \log_2 a_n$ とおくと $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$b_n + 1 = 2(b_n + 1)$$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 0 + 1 = 1$

公比 2 の等比数列だから

$$b_{n+1} + 1 = 1 \times 2^{n-1}$$

$$b_n = 2^{n-1} - 1$$

$$\log_2 a_n = 2^{n-1} - 1$$

$$\therefore a_n = 2^{2^{n-1} - 1}$$

【解答】 $a_n = 2^{2^{n-1} - 1}$

(3) $a_1 = \frac{1}{2}, (n+2)a_{n+1} = na_n \quad [b_n = n(n+1)a_n]$

両辺を $n+1$ 倍して

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n \dots \textcircled{1}$$

$b_n = n(n+1)a_n$ とおくと $b_1 = 1 \times (1+1)a_1 = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n \quad \text{よって} \quad b_n = 1$$

$$n(n+1)a_n = 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

point $b_{n+1} = b_n$ とは?

「すべての項が等しい数列」です。

「公差 0 の等差数列」としても OK

「公比 1 の等比数列」としても OK

よくよく考えれば「すごく易しい数列」ですよ

【解答】 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

5 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。[] で示した置き換えを使うこと。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4n$ [$b_n = a_{n+1} - a_n$]

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 4(n+1)$$

$$\rightarrow a_{n+1} = 3a_n + 4n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 4 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと } a_2 = 3a_1 + 4 \times 1 = 3 \times 1 + 4 = 7 \text{ より}$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6 \text{ であり}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 4$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} + 2 = 3(b_n + 2)$$

数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

公比 3 の等比数列だから

$$b_n + 2 = 8 \cdot 3^{n-1}$$

(2) $a_1 = -2, a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3$ [$b_n = a_{n+1} - a_n$]

$$a_{n+2} = -3a_{n+1} - 4(n+1) + 3$$

$$\rightarrow a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -3(a_{n+1} - a_n) - 4 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおくと}$$

$$a_2 = -3a_1 - 4 \times 1 + 3 = -3 \times (-2) - 1 = 5 \text{ より}$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = 5 - (-2) = 7 \text{ であり}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow b_{n+1} = -3b_n - 4$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = -3(b_n + 1)$$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 7 + 1 = 8$

公比 -3 の等比数列だから

$$b_n + 1 = 8 \cdot (-3)^{n-1}$$

(3) $a_1 = -2, a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3$ [$b_n = a_n + n - 1$]

$$a_{n+1} = -3a_n - 4n + 3 \dots\dots\dots \textcircled{1} \text{ とする}$$

$$b_n = a_n + n - 1 \text{ より } a_n = b_n - n + 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} + (n+1) - 1 \text{ より } a_{n+1} = b_{n+1} - n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$b_{n+1} - n = -3(b_n - n + 1) - 4n + 3$$

$$b_{n+1} - n = -3b_n + 3n - 3 - 4n + 3 \quad \downarrow \text{整理}$$

$$b_{n+1} = -3b_n$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_1 + 1 - 1 = -2$

公比 -3 の等比数列だから

$$b_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入して } a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1 \quad \#$$

$$b_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ より

$$a_{n+1} - a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 2$$

$$\rightarrow a_{n+1} - 3a_n = +4n$$

$$2a_n = 8 \cdot 3^{n-1} - 4n - 2$$

$$\therefore a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1 \quad \#$$

【解答】 $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2n - 1$

$$b_n = 8 \cdot (-3)^{n-1} - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 8 \cdot (-3)^{n-1} - 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ より

$$a_{n+1} + 3a_n = -4n + 3$$

$$\rightarrow a_{n+1} - a_n = 8 \cdot (-3)^{n-1} - 1$$

$$4a_n = -8 \cdot (-3)^{n-1} - 4n + 4$$

$$\therefore a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1 \quad \#$$

【解答】 $a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1$

どうして $b_n = a_n + n - 1$ とおいたのか？

$\textcircled{1}$ と $b_{n+1} = -3b_n$ の形にすればよいから

$$a_{n+1} + p(n+1) + q = -3(a_n + pn + q) \dots\dots\dots \textcircled{*}$$

となるような p と q を求めればよい $\textcircled{*}$ を展開して整理すると

$$a_{n+1} = -3a_n - 4pn + (-p - 4q) \dots\dots\dots \textcircled{**}$$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{**}$ が同じ式になればよいから (1項等式)

$$\begin{cases} -4p = -4 \\ -p - 4q = 3 \end{cases} \quad \text{を解くと} \quad \begin{cases} p = 1 \\ q = -1 \end{cases}$$

よって $\textcircled{*}$ は

$$a_{n+1} + (n+1) - 1 = -3(a_n + n - 1) \text{ となるので}$$

$$b_n = a_n + n - 1 \text{ とおけば【解答】 } a_n = -2 \cdot (-3)^{n-1} - n + 1$$

5 $b_{n+1} = -3b_n$ を作ることができる

隣接3項間の漸化式 2次方程式からの $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ 等比型

6 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \text{ を解くと } t = 2, 3$$

(1) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \dots \textcircled{1} \text{ とする}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 4 - 2 \times 1 = 2$

公比 3 の等比数列だから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

また $\textcircled{1} \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n)$

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 4 - 3 \times 1 = 1$

公比 2 の等比数列だから

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{3}$$

(2) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \dots \textcircled{1} \text{ とする}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 1 - 2 \times 0 = 1$

公比 5 の等比数列だから

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \cdot 5^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

また $\textcircled{1} \Leftrightarrow a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は初項 $a_2 - 5a_1 = 1 - 5 \times 0 = 1$

公比 2 の等比数列だから

$$a_{n+1} - 5a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{3}$ とする

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$-) \quad a_{n+1} - 3a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} //$$

【解答】 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \text{ を解くと } t = 2, 5$$

$\textcircled{2} - \textcircled{3}$ とする

$$a_{n+1} - 2a_n = 1 \cdot 5^{n-1}$$

$$-) \quad a_{n+1} - 5a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$3a_n = 1 \cdot 5^{n-1} - 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} //$$

【解答】 $a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$

(3) $a_1 = 0, a_2 = 2, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \text{ より}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 2 - 2 \times 0 = 2$

公比 2 の等比数列だから

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n$$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n}{2 \times 2^n} + \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \text{ を解くと } t = 2$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$$

数列 $\{b_n\}$ は初項 0 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列

だから $b_n = 0 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{n-1}{2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{2} \times 2^n$$

$$\therefore a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} //$$

【解答】 $a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1}$

連立漸化式 $a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n)$ 等比型からの恒等式.

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$(1) \begin{cases} a_1 = 1, b_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + 4b_n \cdots \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + b_n \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n) \cdots \cdots (*)$$

の左辺に ① と ② を代入すると

$$(a_n + 4b_n) - \alpha(a_n + b_n) = \beta(a_n - \alpha b_n)$$

すなわち

$$(1-\alpha)a_n + (4-\alpha)b_n = \beta a_n - \alpha\beta b_n$$

a_n と b_n の恒等式となるから

※計算用紙にやる

$$\begin{cases} 1-\alpha = \beta \cdots \cdots ③ \\ 4-\alpha = -\alpha\beta \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ を解くと

$$(\alpha, \beta) = (2, -1), (-2, 3)$$

$$\begin{array}{l} ③ \text{ ④ に代入 (β消去)} \\ 4 - \alpha = -\alpha(1 - \alpha) \\ \alpha^2 = 4 \\ \alpha = \pm 2 \\ \alpha = 2 \text{ ③ に代入 } \beta = 1 - 2 = -1 \\ \alpha = -2 \text{ ③ に代入 } \beta = 1 - (-2) = 3 \end{array}$$

$$(\alpha, \beta) = (2, -1) \text{ のとき}$$

$$(*) \Leftrightarrow a_{n+1} - 2b_{n+1} = (-1)(a_n - 2b_n)$$

数列 $\{a_n - 2b_n\}$ は初項 $a_1 - 2b_1 = 1 - 2 \times 1 = -1$

公比 -1 の等比数列だから

$$a_n - 2b_n = -1 \times (-1)^{n-1}$$

$$\therefore a_n - 2b_n = (-1)^n \cdots \cdots ⑤$$

$$(2) \begin{cases} a_1 = 1, b_1 = 3, \\ a_{n+1} = 3a_n + b_n \cdots \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$a_{n+1} - \alpha b_{n+1} = \beta(a_n - \alpha b_n) \cdots \cdots (*)$$

の左辺に ① と ② を代入すると

$$(3a_n + b_n) - \alpha(2a_n + 4b_n) = \beta(a_n - \alpha b_n)$$

すなわち

$$(3-2\alpha)a_n + (1-4\alpha)b_n = \beta a_n - \alpha\beta b_n$$

a_n と b_n の恒等式なので

$$\begin{cases} 3-2\alpha = \beta \cdots \cdots ③ \\ 1-4\alpha = -\alpha\beta \cdots \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ を解くと

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, 2\right), (-1, 5)$$

$$\begin{array}{l} ③ \text{ ④ に代入 (β消去)} \\ 1 - 4\alpha = -\alpha(3 - 2\alpha) \\ 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \\ (2\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2}, -1 \\ \alpha = \frac{1}{2} \text{ ③ に代入 } \beta = 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \alpha = -1 \text{ ③ に代入 } \beta = 3 - 2 \times (-1) = 5 \end{array}$$

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ のとき}$$

$$(*) \Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$$

数列 $\{a_n - \frac{1}{2}b_n\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{2}b_1 = 1 - \frac{1}{2} \times 3 = -\frac{1}{2}$

公比 2 の等比数列だから

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdots \cdots ⑤$$

$$(\alpha, \beta) = (-2, 3) \text{ のとき}$$

$$(*) \Leftrightarrow a_{n+1} + 2b_{n+1} = 3(a_n + 2b_n)$$

数列 $\{a_n + 2b_n\}$ は初項 $a_1 + 2b_1 = 1 + 2 \times 1 = 3$

公比 3 の等比数列だから

$$a_n + 2b_n = 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n + 2b_n = 3^n \cdots \cdots ⑥$$

③, ⑥ より

$$a_n + 2b_n = 3^n$$

$$-) \quad a_n - 2b_n = (-1)^n$$

$$4b_n = 3^n - (-1)^n$$

$$b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

$$a_n + 2b_n = 3^n$$

$$+) \quad a_n - 2b_n = (-1)^n$$

$$2a_n = 3^n + (-1)^n$$

$$a_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$$

$$\text{【解答】 } a_n = \frac{(-1)^n + 3^n}{2}, b_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

$$(\alpha, \beta) = (-1, 5) \text{ のとき}$$

$$(*) \Leftrightarrow a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$.

公比 5 の等比数列だから

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdots \cdots ⑥$$

③, ⑥ より

$$a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

$$-) \quad a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

$$\frac{3}{2}b_n = 4 \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

$$b_n = \frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

$$③ \quad a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1}$$

$$+) \quad ⑥ \cdot 2 \quad 2a_n - b_n = -2^{n-1}$$

$$3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

$$\text{【解答】 } a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}, b_n = \frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

数列の和と一般項 (S_n と a_n が混じった漸化式)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = S_1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{これを拡張すると } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad (\text{数列の和と一般項の漸化式版})$$

8 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = -2a_n - 2n + 5$ を満たす数列 $\{a_n\}$

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = S_1 \text{ より}$$

$$a_1 = -2a_1 - 2 \times 1 + 5$$

$$3a_1 = 3$$

$$a_1 = 1$$

$$\text{また } S_{n+1} = -2a_{n+1} - 2(n+1) + 5$$

$$\text{---) } S_n = -2a_n - 2n + 5$$

$$S_{n+1} - S_n = -2a_{n+1} + 2a_n - 2 \quad \leftarrow$$

$$\text{---) } a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ の左辺に}$$

$$a_{n+1} = -2a_{n+1} + 2a_n - 2$$

$$3a_{n+1} = 2a_n - 2$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 2 = \frac{2}{3}(a_n + 2)$$

$$\text{数列 } \{a_n + 2\} \text{ は初項 } a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから

$$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 //$$

$$\text{【解答】 } a_n = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2$$

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2a_n + n$ を満たす数列 $\{a_n\}$

$$n=1 \text{ のとき } a_1 = S_1 \text{ より}$$

$$a_1 = 2a_1 + 1$$

$$-a_1 = 1$$

$$a_1 = -1$$

$$\text{また } S_{n+1} = 2a_{n+1} + (n+1)$$

$$\text{---) } S_n = 2a_n + n$$

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n + 1$$

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 1$$

$$-a_{n+1} = -2a_n + 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n - 1$$

$$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$$

$$\text{数列 } \{a_n - 1\} \text{ は初項 } a_1 - 1 = -1 - 1 = -2$$

公比 2 の等比数列だから

$$a_n - 1 = -2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = -2^n + 1 //$$

$$\text{【解答】 } a_n = -2^n + 1$$