$\boxed{1}$　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = 2x^2 + 1 + x\int_0^1 f(t)dt$

【解答】 $f(x) = 2x^2 + \frac{10}{3}x + 1$

(2)　$f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t)dt$

【解答】 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$

(3)　$f(x) = x^2 - \int_0^2 xf(t)dt + 2\int_0^1 f(t)dt$

【解答】 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

(4) $f(x) = \int_0^1 xf(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt + 1$

【解答】 $f(x) = -12x - 6$

(5) $f(x) = 1 + \int_0^1 (x-t)f(t)dt$

【解答】 $f(x) = \frac{12}{13}x + \frac{6}{13}$

a が定数のとき，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$　すなわち，$\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

$\boxed{2}$　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$

【解答】 $f(x) = 4x + 1,\quad a = -3$

(2) $\displaystyle\int_x^a f(t)dt = x^3 - 3x$

【解答】 $f(x) = -3x^2 + 3,\quad a = 0,\ \pm\sqrt{3}$

$\boxed{3}$　次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3t^2 - 2t - 1)dt$

【解答】 $x = -\dfrac{1}{3}$ のとき 極大値 $\dfrac{5}{27}$，　$x = 1$ のとき極小値 -1

(2) $f(x) = \int_x^1 (t^3 - t^2 - 2t)dt$

【解答】 $x = -1$ のとき 極大値 $-\frac{2}{3}$, $x = 2$ のとき 極大値 $\frac{19}{12}$, $x = 0$ のとき極小値 $-\frac{13}{12}$

$\boxed{4}$ 実数係数の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ は次の関係式を満たすとする。このとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x - \int_{-1}^{2} g(t)dt, \quad g(x) = 3 + 2\int_0^x f(t)dt$$

【解答】 $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2 - 6x + 3$

1　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 2x^2 + 1 + x\int_0^1 f(t)dt$

$A = \int_0^1 f(t)dt$ とおくと

$f(x) = 2x^2 + 1 + Ax$

$A = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (2t^2 + 1 + At)dt$

$A = \left[\frac{2}{3}t^3 + t + \frac{A}{2}t^2\right]_0^1$

$A = \left(\frac{2}{3} + 1 + \frac{A}{2}\right) - 0$

$\frac{A}{2} = \frac{5}{3}$

$A = \frac{10}{3}$

よって $f(x) = 2x^2 + 1 + x \times \frac{10}{3}$

$= 2x^2 + \frac{10}{3}x + 1$ //

【解答】 $f(x) = 2x^2 + \frac{10}{3}x + 1$

(2) $f(x) = x^2 + \int_0^1 xf(t)dt = x^2 + x\int_0^1 f(t)dt$

$A = \int_0^1 f(t)dt$ とおくと

$f(x) = x^2 + Ax$

$A = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + At)dt$

$A = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{A}{2}t^2\right]_0^1$

$A = \left(\frac{1}{3} + \frac{A}{2}\right) - 0$

$\frac{A}{2} = \frac{1}{3}$

$A = \frac{2}{3}$

よって $f(x) = x^2 + x \times \frac{2}{3}$

$= x^2 + \frac{2}{3}x$ //

【解答】 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x$

(3) $f(x) = x^2 - \int_0^2 xf(t)dt + 2\int_0^1 f(t)dt = x^2 - x\int_0^2 f(t)dt + 2\int_0^1 f(t)dt$

$A = \int_0^2 f(t)dt$, $B = \int_0^1 f(t)dt$ とおくと

$f(x) = x^2 - Ax + 2B$

$A = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t^2 - At + 2B)dt$

$A = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{A}{2}t^2 + 2Bt\right]_0^2$

$A = \frac{8}{3} - 2A + 4B$

$3A - 4B = \frac{8}{3}$

$9A - 12B = 8 \cdots ①$

$B = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 - At + 2B)dt$

$B = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{A}{2}t^2 + 2Bt\right]_0^1$

$B = \frac{1}{3} - \frac{A}{2} + 2B$

$\frac{A}{2} - B = \frac{1}{3}$

$3A - 6B = 2 \cdots ②$

①, ② を解くと $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^2 - x \times \frac{4}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ //

【解答】 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

(4) $f(x)=\int_0^1 xf(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt+1 = x\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 tf(t)dt+1$

$A=\int_0^1 f(t)dt$, $B=\int_0^1 tf(t)dt$ とおくと

$f(x)=Ax+B+1$

$A=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (At+B+1)dt$

$A=\left[\frac{A}{2}t^2+Bt+t\right]_0^1$

$A=\frac{A}{2}+B+1$

$\frac{A}{2}-B=1$

$A-2B=2$ …①

$B=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(At+B+1)dt$

$B=\int_0^1 (At^2+Bt+t)dt$

$B=\left[\frac{A}{3}t^3+\frac{B}{2}t^2+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$B=\frac{A}{3}+\frac{B}{2}+\frac{1}{2}$

$6B=2A+3B+3$

$2A-3B=-3$ …②

①、②を解くと $A=-12$, $B=-7$.

よって $f(x)=x\times(-12)+(-7)+1=\underline{-12x-6}$ //

【解答】 $f(x)=-12x-6$

(5) $f(x)=1+\int_0^1 (x-t)f(t)dt = 1+\int_0^1 \{xf(t)-tf(t)\}dt = 1+x\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 tf(t)dt$

$A=\int_0^1 f(t)dt$, $B=\int_0^1 tf(t)dt$ とおくと $f(x)=1+Ax-B=Ax-B+1$

$A=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 (At-B+1)dt$

$A=\left[\frac{A}{2}t^2-Bt+t\right]_0^1$

$A=\frac{A}{2}-B+1$

$\frac{A}{2}+B=1$

$A+2B=2$ …①

$B=\int_0^1 tf(t)dt=\int_0^1 t(At-B+1)dt$

$B=\int_0^1 (At^2-Bt+t)dt$

$B=\left[\frac{A}{3}t^3-\frac{B}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right]_0^1$

$B=\frac{A}{3}-\frac{B}{2}+\frac{1}{2}$

$6B=2A-3B+3$

$2A-9B=-3$ …②

①、②を解くと $A=\frac{12}{13}$, $B=\frac{7}{13}$

よって $f(x)=\frac{12}{13}x-\frac{7}{13}+1=\underline{\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}}$ //

【解答】 $f(x)=\frac{12}{13}x+\frac{6}{13}$

a が定数のとき，$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$　すなわち，$\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = 2x^2 + x + a$ ……①

両辺を x について微分して

$\left(\displaystyle\int_1^x f(t)dt\right)' = (2x^2+x+a)'$

$\therefore f(x) = 4x+1$ //

①に $x=1$ 代入して

$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt = 2\times1^2+1+a$

$0 = 3+a$

$\therefore a = -3$ //

【解答】 $f(x) = 4x+1$，　$a = -3$

(2) $\displaystyle\int_x^a f(t)dt = x^3 - 3x$ ……①

$-\displaystyle\int_a^x f(t)dt = x^3-3x$

$\displaystyle\int_a^x f(t)dt = -x^3+3x$

両辺を x について微分して

$\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)' = (-x^3+3x)'$

$f(x) = -3x^2+3$ //

①に $x=a$ を代入して

$\displaystyle\int_a^a f(t)dt = a^3-3a$

$0 = a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$\therefore a = 0, \pm\sqrt{3}$ //

【解答】 $f(x) = -3x^2+3$，　$a = 0,\ \pm\sqrt{3}$

3　次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (3t^2-2t-1)dt$

$f(x) = \left[t^3-t^2-t\right]_0^x$

$= x^3-x^2-x$ だから

$f'(x) = 3x^2-2x-1$

$= (3x+1)(x-1)$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$

$= \frac{-1-3+9}{27} = \frac{5}{27}$

$f(1) = 1^3-1^2-1 = -1$

x	……	$-\frac{1}{3}$	……	1	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{27}$	↘	-1	↗

$x = -\frac{1}{3}$ のとき極大値 $\frac{5}{27}$

$x = 1$ のとき極小値 -1 //

【解答】 $x = -\dfrac{1}{3}$ のとき 極大値 $\dfrac{5}{27}$，　$x = 1$ のとき極小値 -1

(2) $f(x)=\int_x^1 (t^3-t^2-2t)dt$

$$f(x)=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-t^2\right]_x^1$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)$$
$$=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{13}{12}$$
$$f'(x)=-x^3+x^2+2x$$
$$=-x(x+1)(x-2)$$
$$f(-1)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-\frac{13}{12}=-\frac{2}{3}$$
$$f(0)=-\frac{13}{12}$$
$$f(2)=-4+\frac{8}{3}+4-\frac{13}{12}=\frac{19}{12}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$-\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{13}{12}$	↗	$\frac{19}{12}$	↘

$x=-1$ のとき極大値 $-\frac{2}{3}$

$x=2$ のとき極大値 $\frac{19}{12}$

$x=0$ のとき極小値 $-\frac{13}{12}$ //

【解答】 $x=-1$ のとき 極大値 $-\frac{2}{3}$，$x=2$ のとき 極大値 $\frac{19}{12}$，$x=0$ のとき極小値 $-\frac{13}{12}$

4 実数係数の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ は次の関係式を満たすとする。このとき，$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x-\int_{-1}^{2} g(t)dt,\quad g(x)=3+2\int_0^x f(t)dt$$

$\int_{-1}^{2} g(t)dt=A$ とおくと

$f(x)=x-A$ だから

$$g(x)=3+2\int_0^x (t-A)dt$$
$$=3+2\left[\frac{t^2}{2}-At\right]_0^x$$
$$=3+2\left(\frac{x^2}{2}-Ax\right)$$
$$=x^2-2Ax+3$$

$$A=\int_{-1}^{2} g(t)dt=\int_{-1}^{2}(t^2-2At+3)dt$$
$$A=\left[\frac{t^3}{3}-At^2+3t\right]_{-1}^{2}$$
$$A=\left(\frac{8}{3}-4A+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-A-3\right)$$
$$A=\frac{9}{3}-3A+9$$
$$A=-3A+12$$
$$4A=12$$
$$A=3$$

よって $f(x)=x-3$

$g(x)=x^2-6x+3$ //

【解答】 $f(x)=x-3$，$g(x)=x^2-6x+3$