不定積分演習　1

（ショートトライアルです。裏面もがんばれ。）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \sin 4x dx$

(2) $\displaystyle\int \cos 3x dx$

(3) $\displaystyle\int e^{5x} dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1} dx$

(5) $\displaystyle\int x \sin x dx$

(6) $\displaystyle\int x \cos 2x dx$

(7) $\displaystyle\int x e^{-x} dx$

(8) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

(9) $\displaystyle\int (x+1) e^{-x} dx$

(10) $\displaystyle\int (2x-1) \cos x dx$

不定積分演習　1

1　次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分定数とする。

(1) $\int \sin 4x dx$　(与式) $= -\frac{1}{4}\cos 4x + C$

(2) $\int \cos 3x dx$　(与式) $= \frac{1}{3}\sin 3x + C$

(3) $\int e^{5x} dx$　(与式) $= \frac{1}{5}e^{5x} + C$

(4) $\int \frac{1}{2x-1} dx$　(与式) $= \frac{1}{2}\log|2x-1| + C$

(5) $\int x \sin x dx$

(与式) $= x(-\cos x) - 1\cdot(-\sin x) + C$

$= -x\cos x + \sin x + C$

	㋑	㋺
		$\sin x$
+	x	$-\cos x$
−	1	$-\sin x$

(6) $\int x \cos 2x dx$

(与式) $= x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) + C$

$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

	㋑	㋺
		$\cos 2x$
+	x	$\frac{1}{2}\sin 2x$
−	1	$-\frac{1}{4}\cos 2x$

(7) $\int xe^{-x} dx$

(与式) $= x(-e^{-x}) - 1\cdot e^{-x} + C$

$= (-x-1)e^{-x} + C$

$= -(x+1)e^{-x} + C$

	㋑	㋺
		e^{-x}
+	x	$-e^{-x}$
−	1	e^{-x}

(8) $\int x^2 \sin x dx$

(与式) $= x^2(-\cos x) - 2x(-\sin x) + 2\cdot\cos x + C$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

	㋑	㋺
		$\sin x$
+	x^2	$-\cos x$
−	$2x$	$-\sin x$
+	2	$\cos x$

(9) $\int (x+1)e^{-x} dx$

(与式) $= (x+1)\cdot(-e^{-x}) - 1\cdot e^{-x} + C$

$= (-x-1-1)e^{-x} + C$

$= (-x-2)e^{-x} + C$

$= -(x+2)e^{-x} + C$

	㋑	㋺
		e^{-x}
+	$x+1$	$-e^{-x}$
−	1	e^{-x}

(10) $\int (2x-1)\cos x dx$

(与式) $= (2x-1)\cdot\sin x - 2\cdot(-\cos x) + C$

$= (2x-1)\sin x + 2\cos x + C$

	㋑	㋺
		$\cos x$
+	$2x-1$	$\sin x$
−	2	$-\cos x$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int (3x-1)^6 dx$

(2) $\displaystyle\int \log x dx$

(3) $\displaystyle\int x^2 \sin 2x dx$

(4) $\displaystyle\int x^2 \cos 3x dx$

(5) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$

(6) $\displaystyle\int x^2 e^{-3x} dx$

(7) $\displaystyle\int x^3 \sin 4x dx$

(8) $\displaystyle\int x^3 e^{2x} dx$

(9) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2} dx$

(10) $\displaystyle\int \log(x+2) dx$

2 次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分定数とする。

(1) $\int (3x-1)^6 dx$

$(与式) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}(3x-1)^7 + C$

$= \frac{1}{21}(3x-1)^7 + C$ //

(2) $\int \log x dx$

$(与式) = (\log x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx$

$= x\log x - x + C$ //

(3) $\int x^2 \sin 2x dx$

$(与式) = x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - 2x\cdot\left(-\frac{1}{4}\sin 2x\right)$

$+ 2\cdot\left(\frac{1}{8}\cos 2x\right) + C$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ //

(4) $\int x^2 \cos 3x dx$

$(与式) = x^2\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right) - 2x\cdot\left(-\frac{1}{9}\cos 3x\right)$

$+ 2\cdot\left(-\frac{1}{27}\sin 3x\right) + C$

$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$ //

(5) $\int x^2 e^{2x} dx$

$(与式) = x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - 2x\cdot\frac{1}{4}e^{2x} + 2\cdot\frac{1}{8}e^{2x} + C$

$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$ //

(6) $\int x^2 e^{-3x} dx$

$(与式) = x^2\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - 2x\cdot\frac{1}{9}e^{-3x} + 2\cdot\left(-\frac{1}{27}e^{-3x}\right) + C$

$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$ //

(7) $\int x^3 \sin 4x dx$

$(与式) = x^3\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - 3x^2\left(-\frac{1}{16}\sin 4x\right)$

$+ 6x\cdot\left(\frac{1}{64}\cos 4x\right) - 6\cdot\left(\frac{1}{256}\sin 4x\right) + C$

$= -\frac{1}{4}x^3\cos 4x + \frac{3}{16}x^2\sin 4x$

$+ \frac{3}{32}x\cos 4x - \frac{3}{128}\sin 4x + C$ //

(8) $\int x^3 e^{2x} dx$

$(与式) = x^3\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - 3x^2\cdot\frac{1}{4}e^{2x} + 6x\cdot\frac{1}{8}e^{2x} - 6\cdot\frac{1}{16}e^{2x} + C$

$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$ //

(9) $\int x\sqrt{x+2} dx$ ← $\int x\cdot(x+2)^{\frac{1}{2}} dx$ と見る

$(与式) = x\cdot\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} - 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} + C$

$= (x+2)^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{2}{3}x - \frac{4}{15}(x+2)^1\right\} + C$

$= \frac{10x-4x-8}{15}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{15}(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2} + C$ //

(10) $\int \log(x+2) dx$

point 真数と同じものを書く.

$(与式) = \{\log(x+2)\}\cdot(x+2) - \int \frac{1}{x+2}\times(x+2) dx$

$= (x+2)\log(x+2) - x + C$ //

約分できるようになる!

別解

$(与式) = \{\log(x+2)\}\cdot x - \int \frac{1}{x+2}\cdot x\, dx$

$= x\log(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2} dx$

$= x\log(x+2) - \int\left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx$

約分できないと少し苦戦する…

$= x\log(x+2) - \{x - 2\log(x+2)\} + C$

$= (x+2)\log(x+2) - x + C$ //

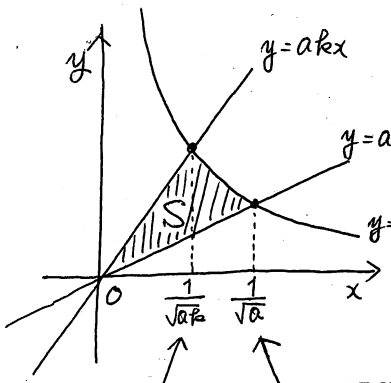
$\boxed{1}$ 曲線 $xy = 1\ (x > 0)$ と 2 直線 $y = ax$，$y = akx\ (a > 0,\ k > 1)$ で囲まれた図形の面積が $\dfrac{1}{2}\log 3$ であるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 2 曲線 $C_1 : y = \sin x$，$y = 2\sin 2x$ について次の問いに答えよ。

(1) 2 曲線の概形を 1 つの xy 平面上にかけ。

(2) 2 曲線で囲まれた図形のうち，区間 $[0,\ \pi]$ の部分の面積を求めよ。

1　曲線 $xy=1\ (x>0)$ と 2 直線 $y=ax$，$y=akx\ (a>0,\ k>1)$ で囲まれた図形の面積が $\frac{1}{2}\log 3$ であるとき，k の値を求めよ。



$xy=1$ に $y=akx$ 代入

$x\times akx=1$

$x^2=\frac{1}{ak}$

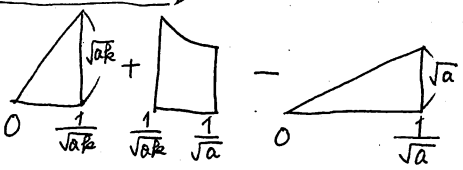
$x>0$ より $x=\frac{1}{\sqrt{ak}}$

$xy=1$ に $y=ax$ 代入

$x\times ax=1$

$x^2=\frac{1}{a}$

$x>0$ より $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$S=$ 

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{ak}}\times\sqrt{ak}+\int_{\frac{1}{\sqrt{ak}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{a}}\times\sqrt{a}$$

$$=\frac{1}{2}+\Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{\sqrt{ak}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}-\frac{1}{2}$$

$$=\log\frac{1}{\sqrt{a}}-\log\frac{1}{\sqrt{ak}}=\log\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{ak}}}$$

$$=\log\sqrt{k}=\frac{1}{2}\log k$$

ここで $S=\frac{1}{2}\log 3$ なので

$\frac{1}{2}\log k=\frac{1}{2}\log 3$ より

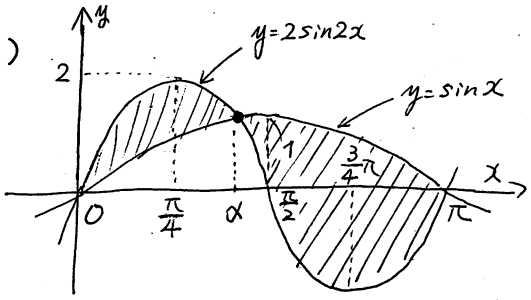
$k=3$ //

2　2 曲線 $C_1: y=\sin x$，$y=2\sin 2x$ について次の問いに答えよ。

(1)　2 曲線の概形を 1 つの xy 平面上にかけ。

(2)　2 曲線で囲まれた図形のうち，区間 $[0,\ \pi]$ の部分の面積を求めよ。

(1)



(2)　$0<x<\pi$ における C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とおくと

$2\sin 2\alpha=\sin\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha$

$0<\alpha<\pi$ より $\sin\alpha\neq 0$ だから

$4\cos\alpha=1$

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{4}$ …… (*)

求める面積を S とおくと

$$S=\int_0^{\alpha}(2\sin 2x-\sin x)\,dx+\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-2\sin 2x)\,dx$$

$$=\Big[-\cos 2x+\cos x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x+\cos 2x\Big]_{\alpha}^{\pi}$$

$$=(-\cos 2\alpha+\cos\alpha)-(-\underset{①}{\cos 0}+\underset{①}{\cos 0})$$

$$+(-\underset{-1}{\cos\pi}+\underset{①}{\cos 2\pi})-(-\cos\alpha+\cos 2\alpha)$$

$$=-\cos 2\alpha+\cos\alpha-0+2+\cos\alpha-\cos 2\alpha$$

$$=-2\cos 2\alpha+2\cos\alpha+2$$

$$=-2(2\cos^2\alpha-1)+2\cos\alpha+2$$

$\downarrow$(*)　$\downarrow$(*)

$$=-2\left\{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1\right\}+2\times\frac{1}{4}+2$$

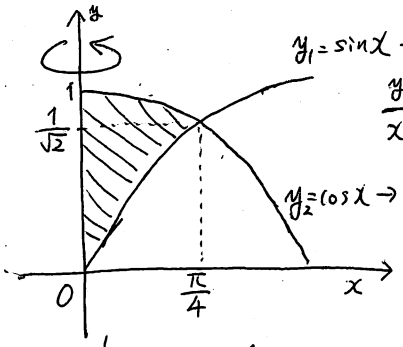
$$=-2\times\left(-\frac{7}{8}\right)+\frac{1}{2}+2=\frac{7}{4}+\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{17}{4}$$ //

$\boxed{3}$ $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，2 つの曲線 $y = \sin x$，$y = \cos x$ および y 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{4}$ xy 平面において 2 曲線 $y = e^x + e^{-x}$，$y = e^x - e^{-x}$ と 2 直線 $x = 0$，$x = 1$ で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

3 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき，2つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ および y 軸で囲まれる部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



$y_1=\sin x \to dy_1=\cos x\,dx$

y_1	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$
x	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$y_2=\cos x \to dy_2=-\sin x\,dx$

y_2	$\frac{1}{\sqrt{2}} \to 1$
x	$\frac{\pi}{4} \to 0$

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi x^2\,dy_1+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi x^2\,dy_2$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}x^2(-\sin x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos x\,dx+\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$

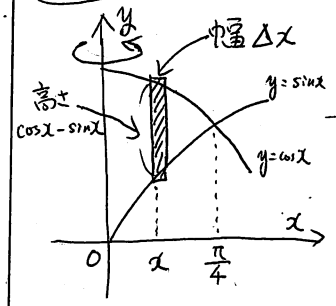
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2(\cos x+\sin x)\,dx$$

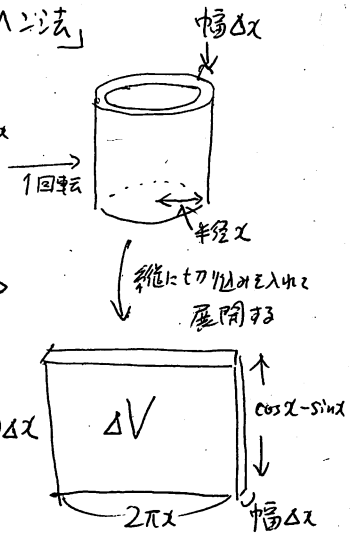
$$=\pi\Big[x^2(\sin x-\cos x)-2x(-\cos x-\sin x)+2(-\sin x+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{\pi^2}{16}\times 0-\frac{\pi}{2}\cdot(-\sqrt{2})+2\cdot 0\right)-(0-0+2\times 1)\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-2\right)=\frac{\pi(\sqrt{2}\pi-4)}{2}$$

別解 「バームクーヘン法」





$\Delta V=2\pi x(\cos x-\sin x)\Delta x$

これを0から $\frac{\pi}{4}$ までたすと

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\pi x(\cos x-\sin x)\,dx$$

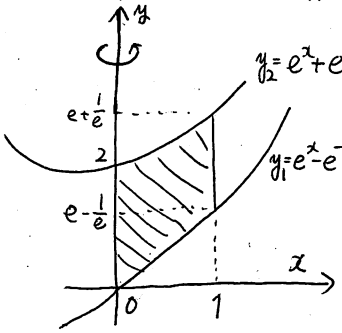
$$=2\pi\Big[x(\sin x+\cos x)-1\cdot(-\cos x+\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\pi\left\{\left(\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}-0\right)-(0+1)\right\}$$

$$=2\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-1\right)$$

$$=\frac{\pi(\sqrt{2}\pi-4)}{2}$$

4 xy 平面において2曲線 $y=e^x+e^{-x}$，$y=e^x-e^{-x}$ と2直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

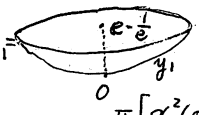


$y_2=e^x+e^{-x} \to dy_2=(e^x-e^{-x})dx$

y_2	$2 \to e+\frac{1}{e}$
x	$0 \to 1$

$y_1=e^x-e^{-x} \to dy_1=(e^x+e^{-x})dx$

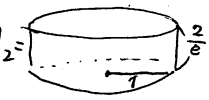
y_1	$0 \to e-\frac{1}{e}$
x	$0 \to 1$

$V_1=$ 

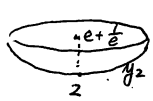
$$=\pi\int_0^{e-\frac{1}{e}}x^2\,dy_1=\pi\int_0^1 x^2(e^x+e^{-x})\,dx$$

$$=\pi\Big[x^2(e^x-e^{-x})-2x(e^x+e^{-x})+2(e^x-e^{-x})\Big]_0^1$$

$$=\cdots=\pi(e-5e^{-1})$$

$V_2=$ 

$$=\pi\times 1^2\times\frac{2}{e}=\frac{2\pi}{e}$$

$V_3=$ 

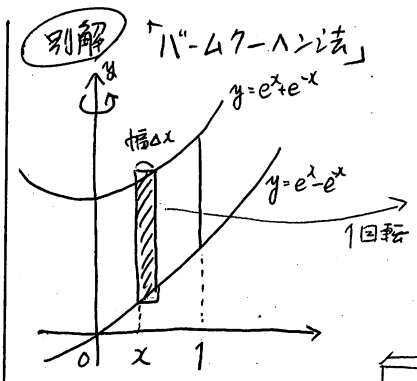
$$=\pi\int_2^{e+\frac{1}{e}}x^2\,dy_2=\pi\int_0^1 x^2(e^x-e^{-x})\,dx$$

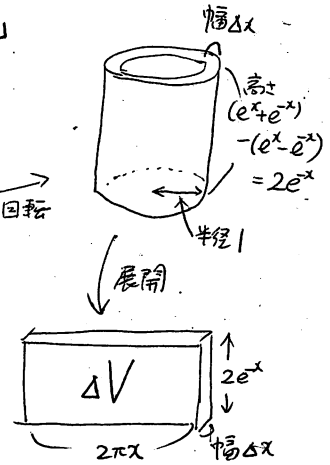
$$=\cdots=\pi(e+5e^{-1}-4)$$

$$V=V_1+V_2-V_3=\cdots=\pi(-8e^{-1}+4)$$

$$=\pi\left(4-\frac{8}{e}\right)=4\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

別解 「バームクーヘン法」





$\Delta V=2\pi x\cdot 2e^{-x}\cdot\Delta x$

これを0から1までたすと

$$V=\int_0^1 4\pi x e^{-x}\,dx$$

$$=4\pi\Big[x\cdot(-e^{-x})-1\cdot e^{-x}\Big]_0^1$$

$$=4\pi\left\{(-e^{-1}-e^{-1})-(0-1)\right\}$$

$$=4\pi\left(1-\frac{2}{e}\right)$$