数学III　微分法の応用　演習問題1　『有名どころのグラフ』

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = xe^{-x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，漸近線』

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^2e^{-x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，漸近線』

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = x\log x$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，$\lim_{x\to+0} f(x)$』

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，$\lim_{x\to+0} f(x)$』

数学III　微分法の応用　演習問題１　『有名どころのグラフ』

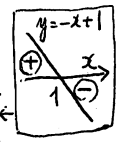
1　関数 $f(x)=xe^{-x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，漸近線』

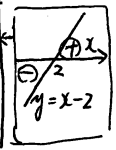
定義域はすべての実数.

$f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(-x+1)e^{-x}$

$f''(x)=(-1)\cdot e^{-x}+(-x+1)\cdot(-e^{-x})$

$=(x-2)e^{-x}$





x	……	1	……	2	……
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{2}{e^2}$	↘

$f(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$　$f(2)=2\cdot e^{-2}=\frac{2}{e^2}$

$x=1$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$

変曲点 $\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)$

y 切片は $f(0)=0$.

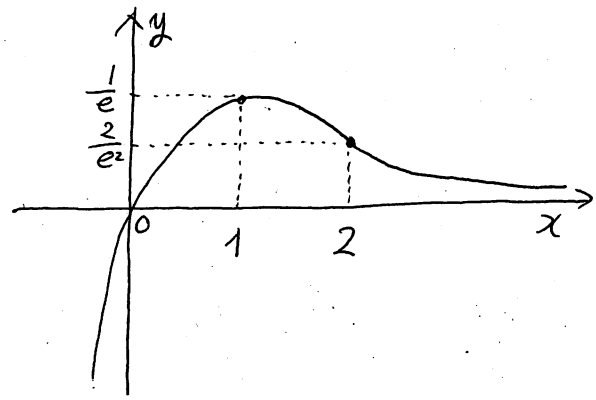
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ← $x \ll e^x$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^{-t}}$

($x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$)

$=\lim_{t\to\infty}(-te^t)=-\infty$

x 軸を漸近線にもつ



2　関数 $f(x)=x^2e^{-x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，漸近線』

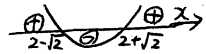
定義域はすべての実数

$f'(x)=2x\cdot e^{-x}+x^2(-e^{-x})=(-x^2+2x)e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$

$f''(x)=(-2x+2)e^{-x}+(-x^2+2x)\cdot(-e^{-x})$

$=(x^2-4x+2)e^{-x}$



x	……	0	……	$2-\sqrt{2}$	……	2	……	$2+\sqrt{2}$	……
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{6-\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{6+\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$	↘

$f(0)=0$, $f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$

$f(2-\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})^2e^{-(2-\sqrt{2})}=\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$

$f(2+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2e^{-(2+\sqrt{2})}=\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$

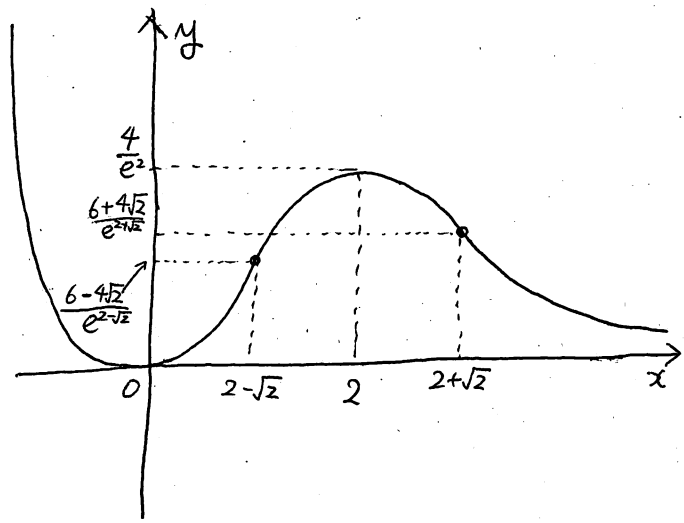
$x=0$ のとき極小値 0 , $x=2$ のとき極大値 $\frac{4}{e^2}$

変曲点 $\left(2-\sqrt{2},\ \frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$ と $\left(2+\sqrt{2},\ \frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ ← $x^2 \ll e^x$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{t\to\infty}\frac{(-t)^2}{e^{-t}}=\lim_{t\to\infty}t^2e^t=\infty$

x 軸を漸近線にもつ



3 関数 $f(x)=x\log x$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，$\lim_{x\to+0} f(x)$』

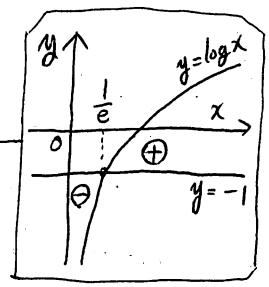
定義域は $x>0$.

$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1=\log x-(-1)$

$f'(x)=0$ を解く $\log_e x=-1$ より $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$ $(\because x>0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f''(x)$	/	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	/	↳	$-\frac{1}{e}$	⤴



$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\log\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\log_e e^{-1}=-\frac{1}{e}$

$x=\frac{1}{e}$ のとき極小値 $-\frac{1}{e}$

変曲点なし.

x切片は $x\log x=0$ と $x>0$ で解く.

$\log_e x=0$ より $x=e^0=1$

$(1,0)$ で x軸と交わる.

point

$x=\frac{1}{y}$ とおくと $y=\frac{1}{x}$ で

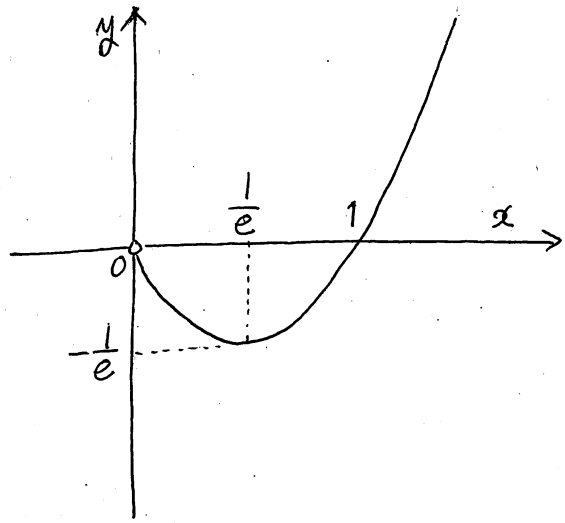
$x\to+0$ のとき $y\to\infty$

$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0} x\log x$

$=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\log\frac{1}{y}=\lim_{y\to\infty}\frac{-\log y}{y}=0$

$(\log y \ll y)$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$



4 関数 $f(x)=\frac{\log x}{x}$ のグラフをかけ。『定義域，増減，凹凸，変曲点，$\lim_{x\to+0} f(x)$』

定義域は $x>0$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$

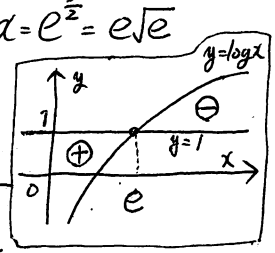
$f'(x)=0$ を解くと $1-\log x=0$ より $\log_e x=1$

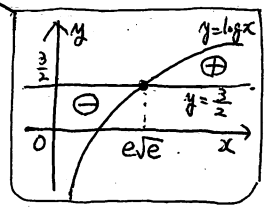
$x=e^1=e$

$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\log x-3}{x^3}$

$f''(x)=0$ を解くと $\log_e x=\frac{3}{2}$ より $x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↱	$\frac{1}{e}$	⤵	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↳





$f(e)=\frac{\log e}{e}=\frac{1}{e}$

$f(e\sqrt{e})=\frac{\log e\sqrt{e}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}$

$x=e$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$，変曲点 $\left(e\sqrt{e},\frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

point

$x=\frac{1}{y}$ とおくと $y=\frac{1}{x}$ で

$x\to+0$ のとき $y\to\infty$

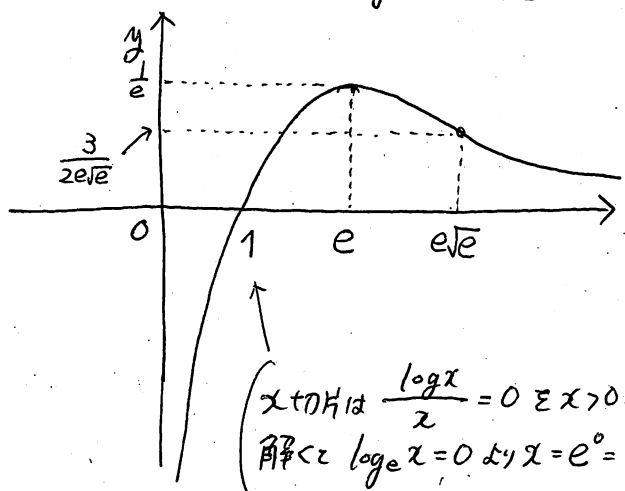
$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}$

$=\lim_{y\to\infty}\frac{\log\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to\infty}(-y\log y)=-\infty$

[これは $\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\log x\cdot\frac{1}{x}=(-\infty\times\infty)=-\infty$ と考えても OK]

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ $(\log x \ll x)$

x軸と y軸を漸近線にもつ



(x切片は $\frac{\log x}{x}=0$ と $x>0$ で解くと $\log_e x=0$ より $x=e^0=1$)

数学III　微分法の応用　演習問題２　『媒介変数表示された関数のグラフ』

$\boxed{5}$ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。『増減，概形』　　（サイクロイド）

$\boxed{6}$ $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかけ。『増減，概形』

$\boxed{7}$ $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = -t^2 + 4t \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ のグラフをかけ。『増減，概形』

＜チャレンジ問題＞

$\boxed{8}$ $\begin{cases} x = (1 + \cos t)\cos t \\ y = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。『増減，概形』 （カージオイド）

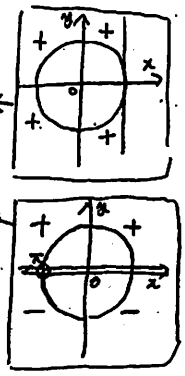
数学III　微分法の応用　演習問題２　『媒介変数表示された関数のグラフ』

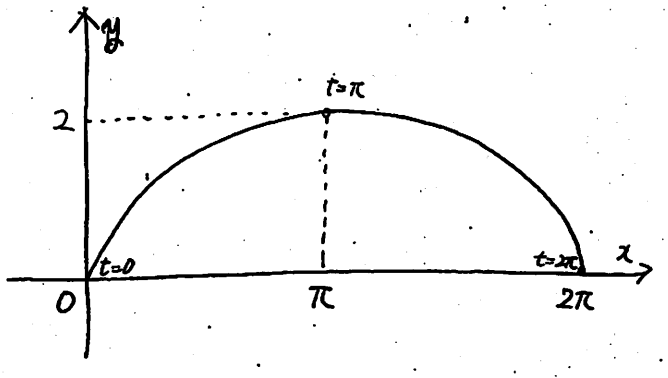
5　$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。『増減，概形』　　（サイクロイド）

$\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ ，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ を解くと　$\cos t = 1$ より　$t = 0, 2\pi$.

$\dfrac{dy}{dt} = \sin t$ ，$\dfrac{dy}{dt} = 0$ を解くと　$\sin t = 0$ より　$t = 0, \pi, 2\pi$

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0
x	0	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	2π
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\uparrow$	2	$\downarrow$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\nearrow$	$(\pi, 2)$	$\searrow$	$(2\pi, 0)$





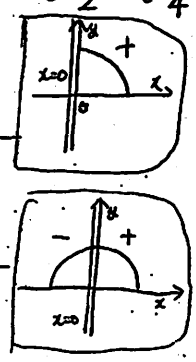
6　$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかけ。『増減，概形』

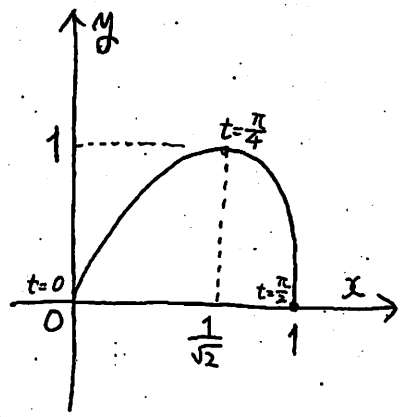
$\dfrac{dx}{dt} = \cos t \geqq 0 \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$　$\dfrac{dx}{dt} = 0$ を解くと　$t = \dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dy}{dt} = 2\cos 2t$　$\dfrac{dy}{dt} = 0$ を解く　$0 \leqq 2t \leqq \pi$ で

$\cos 2t = 0$ を解くと　$2t = \dfrac{\pi}{2}$ より $t = \dfrac{\pi}{4}$

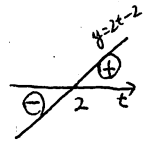
t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
x	0	$\rightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow$	1
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$	$\searrow$	$(1, 0)$



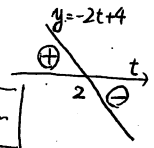


7 $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = -t^2 + 4t \end{cases}$ $(t \geqq 0)$ のグラフをかけ。『増減，概形』

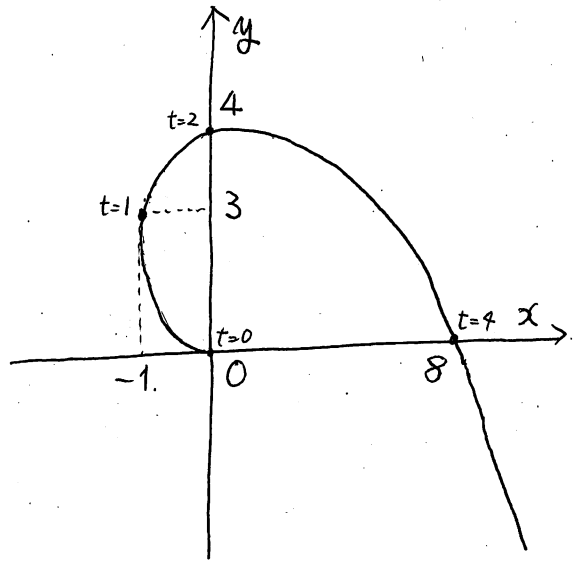
$\dfrac{dx}{dt} = 2t - 2$, $\dfrac{dx}{dt} = 0$ を解くと $t = 1$



$\dfrac{dy}{dt} = -2t + 4$, $\dfrac{dy}{dt} = 0$ を解くと $t = 2$



t	0	…	1	…	2	…
$\dfrac{dx}{dt}$	−	−	0	+	+	+
x	0	←	−1	→	0	→
$\dfrac{dy}{dt}$	+	+	+	+	0	−
y	0	↑	3	↑	4	↓
(x, y)	(0,0)	↖	(−1,3)	↗	(0,4)	↘



また $\lim_{t \to \infty} x = \infty$

$\lim_{t \to \infty} y = -\infty$

どうせ x 軸と交わりそうなので.

$y = 0$ を解くと $-t^2 + 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 0, 4.$

$t = 4$ のとき $x = 4^2 - 2 \times 4 = 8$

よって $(8, 0)$ で x 軸と交わる

8 $\begin{cases} x = (1 + \cos t)\cos t \\ y = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。『増減，概形』 （カージオイド）

$\dfrac{dx}{dt} = -\sin t \cdot \cos t + (1 + \cos t) \cdot (-\sin t) = -\sin t - 2\sin t \cos t$

$= -\sin t(1 + 2\cos t)$

$\dfrac{dx}{dt} = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{2}{3}\pi, \pi, \dfrac{4}{3}\pi, 2\pi$

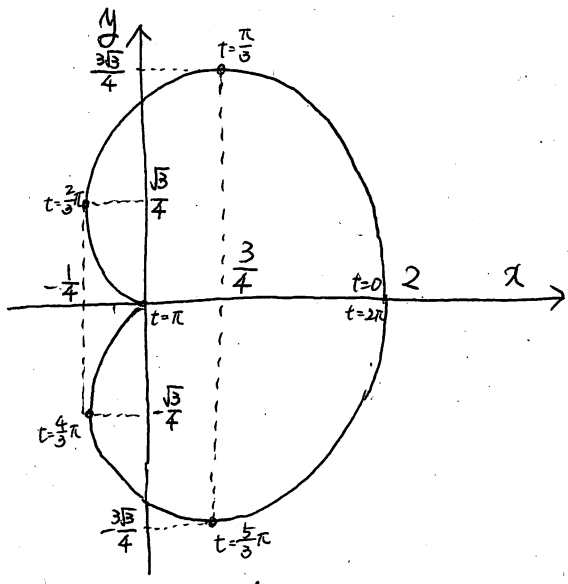
$\dfrac{dy}{dt} = -\sin t \cdot \sin t + (1 + \cos t) \cdot \cos t$

$= -\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t = -(1 - \cos^2 t) + \cos t + \cos^2 t$

$= 2\cos^2 t + \cos t - 1 = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ を解くと $t = \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5}{3}\pi$.

t	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$		π		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$		2π
$\frac{dx}{dt}$	0	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+	0
x	2	←	$\frac{3}{4}$	←	$-\frac{1}{4}$	→	0	←	$-\frac{1}{4}$	→	$\frac{3}{4}$	→	2
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−	−	0	−	−	−	0	+	+
y	0	↑	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0	↓	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↓	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↑	0
(x, y)	(2,0)	↖	$(\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$	↙	$(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$	↘	(0,0)	↙	$(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$	↘	$(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$	↗	(2,0)



（$\dfrac{dx}{dt} = 0$ と $\dfrac{dy}{dt} = 0$ の後は
＋ − と矢印は (x, y) を計算してから
入れた方が楽な気がする…）

数学III　微分法の応用　演習問題3　『方程式・不等式』

$\boxed{9}$　$x > 0$ のとき，不等式 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ を証明せよ。

$\boxed{10}$　$x > 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ を証明せよ。

$\boxed{11}$ a を定数とする。方程式 $2x-1=ae^{-x}$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$\boxed{12}$ 次の問いに答えよ。

(1) $y=\log(\sqrt{2}\sin x)$ $(0<x<\pi)$ の増減と凹凸を調べて，そのグラフをかけ。

(2) a を定数とする。方程式 $\log(\sqrt{2}\sin x)=a$ $(0<x<\pi)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

数学III　微分法の応用　演習問題３　『方程式・不等式』

9　$x>0$ のとき，不等式 $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ を証明せよ。

(proof)　$f(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ とおく

$f'(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$

$f''(x) = -\sin x - (0 - x)$

$f'''(x) = -\cos x - (-1)$

$= -\cos x + 1 \geqq 0.$

よって

x	0	$\cdots$
$f'''(x)$	0	$+$
$f''(x)$	0	$\nearrow$

$f''(x)$ は単調増加

$f''(0) = -\sin 0 - (0 - 0) = 0$

よって $x>0$ で $f''(x)>0$ であるから

x	0	$\cdots$
$f''(x)$	0	$+$
$f'(x)$	0	$\nearrow$

$f'(x)$ は単調増加

$f'(0) = \cos 0 - \left(1 - \dfrac{0^2}{2}\right) = 0$

よって $x>0$ で $f'(x)>0$ であるから

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

$f(x)$ は単調増加

$f(0) = \sin 0 - \left(0 - \dfrac{0^3}{6}\right) = 0.$

よって $x>0$ で $f(x)>0$

すなわち $x>0$ で $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$ である ▨

10　$x>0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ を証明せよ。

(proof)

$f(x) = x - \log(1+x)$ とおく

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$　($\because x>0$)

$f(0) = 0 - \log(1+0) = 0.$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

よって $x>0$ のとき $f(x)>0$

すなわち $\log(1+x) < x$ …①

$g(x) = \log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおく

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - (1-x) = \dfrac{x^2}{1+x} > 0$

($\because x>0$)

$g(0) = \log(1+0) - \left(0 - \dfrac{0^2}{2}\right)$

x	0	$\cdots$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$

よって $x>0$ のとき $g(x)>0$

すなわち

$x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x)$ …②

①，②より　$x>0$ で

$x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ である

▨

11 a を定数とする。方程式 $2x-1=ae^{-x}$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$$2x-1=\frac{a}{e^x}$$

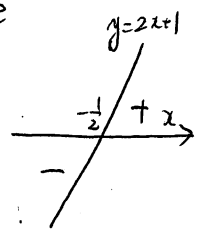
$$(2x-1)e^x=a \cdots ①$$

$$\begin{cases} y=a \cdots\cdots ② \\ y=(2x-1)e^x \cdots ③ \end{cases}$$

③について

$$y'=2\cdot e^x+(2x-1)\cdot e^x$$
$$=(2x+1)e^x$$

$y'=0$ を解くと $x=-\frac{1}{2}$



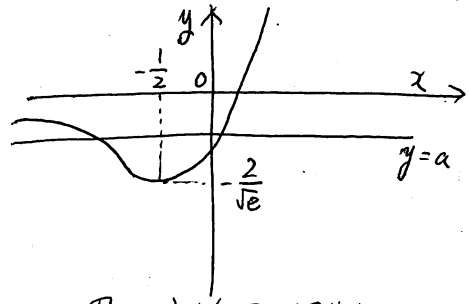
x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	↗

$t=-\frac{1}{2}$ のとき $y=\{2\times(-\frac{1}{2})-1\}e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{e}}$

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2x-1)e^x=\infty$$

$x=-t$ とおくと
$x\to-\infty$ のとき
$t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=\lim_{t\to\infty}\{2(-t)-1\}e^{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t-1}{e^t}=0$$



①の異なる実数解の個数は
②と③の共有点の個数と一致するから

$-\frac{2}{\sqrt{e}}<a<0$ のとき 2個

$a=-\frac{2}{\sqrt{e}}$, $a\geqq 0$ のとき 1個

$a<-\frac{2}{\sqrt{e}}$ のとき 0個 //

12 次の問いに答えよ。

(1) $y=\log(\sqrt{2}\sin x)$ $(0<x<\pi)$ の増減と凹凸を調べて，そのグラフをかけ。

(2) a を定数とする。方程式 $\log(\sqrt{2}\sin x)=a$ $(0<x<\pi)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(1) $y=\log(\sqrt{2}\sin x)=\log\sqrt{2}+\log(\sin x)$

$$y'=0+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$$

$$y''=-\frac{1}{\sin^2 x}<0$$

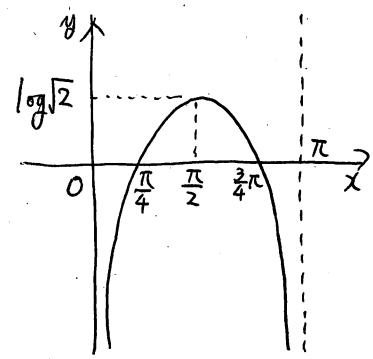
$0<x<\pi$ で $y'=0$ を解くと $\cos x=0$ より
$x=\frac{\pi}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y		↗	$\log\sqrt{2}$	↘	

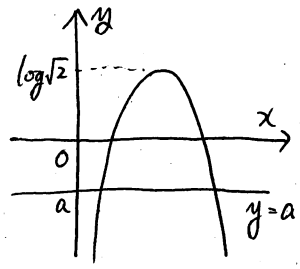
$$\lim_{x\to+0} y=\lim_{x\to+0}\log(\sqrt{2}\sin x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pi-0} y=\lim_{x\to\pi-0}\log(\sqrt{2}\sin x)=-\infty$$

$\log(\sqrt{2}\sin x)=0$ を $0<x<\pi$ で解くと
$\sqrt{2}\sin x=1$
$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$



(2)



(1)より

$a<\log\sqrt{2}$ のとき 2個

$a=\log\sqrt{2}$ のとき 1個

$a>\log\sqrt{2}$ のとき 0個 //

数学III　微分法の応用　演習問題４　『総合問題』

$\boxed{13}$ 関数 $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

$\boxed{14}$ 平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x) = 2x + (1 - a^2)\log(x^2 + 1)$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

<チャレンジ問題>

$\boxed{16}$ a を実数とする。関数 $f(x) = ax + \cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

数学III　微分法の応用　演習問題4　『総合問題』

$$\begin{array}{r} x \\ x-1\,\overline{)\,x^2-x+1} \\ \underline{x^2-x} \\ 1 \end{array}$$

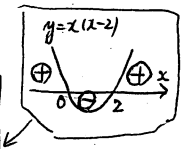
13 関数 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

定義域は $x \neq 1$.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$ ……①

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f''(x) = 0 + \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(x-1)^3}$



x	…	0	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	/	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	/	+	+	+
$f(x)$	↱	−1	⤵	/	↳		⤴

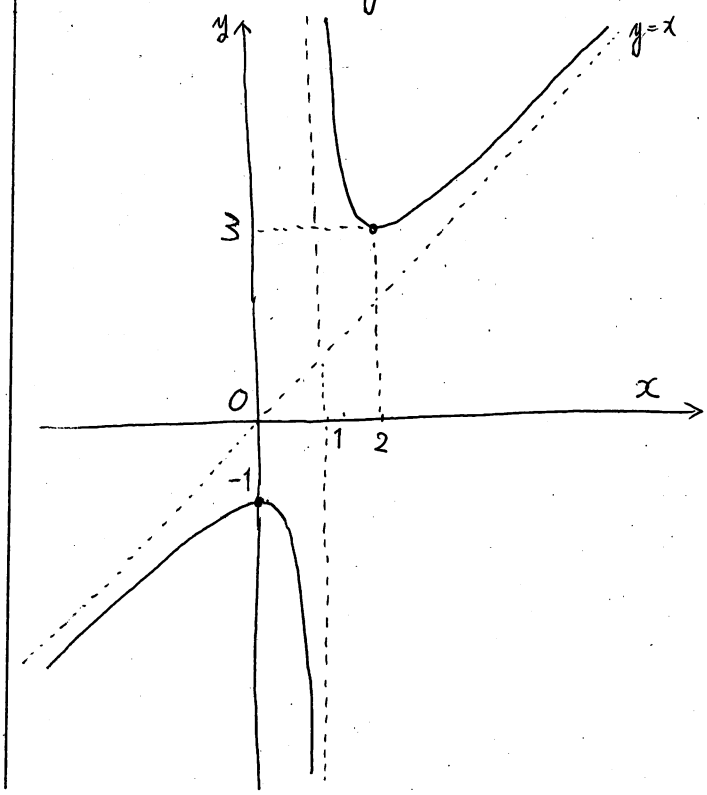
$f(0) = -1$　$f(2) = 4-2+1 = 3$

$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$.

また①より $f(x) - x = \dfrac{1}{x-1}$ だから

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\} = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$

よって $x=1$ と $y=x$ を漸近線にもつ



14 平均値の定理を用いて，次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

$f(x) = e^x$ とおくと $f(x)$ はすべての実数で連続かつ微分可能なので $f'(x) = e^x$

平均値の定理により

$\dfrac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c) = e^c$ ……①

をみたす c が x と $\sin x$ の間に存在する

$x \to +0$ のとき $\sin x \to +0$ であるから

はさみうちの原理により $c \to +0$.

よって①により

$\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c\to+0} e^c = e^0 = 1$ //

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$

$f(x) = \sin x$ とおくと $f(x)$ はすべての実数で連続かつ微分可能なので $f'(x) = \cos x$

平均値の定理により

$\dfrac{f(x) - f(x^2)}{x - x^2} = f'(c) = \sin c$ ……①

をみたす c が x と x^2 の間に存在する

$x \to +0$ のとき $x^2 \to +0$ であるから

はさみうちの原理により $c \to +0$.

よって①により

$\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2} = \lim_{c\to+0}\cos c = \cos 0 = 1$ //

15 関数 $f(x)=2x+(1-a^2)\log(x^2+1)$ が極値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$f'(x)=2+(1-a^2)\times\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}$$
$$=2+(1-a^2)\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$
$$=\frac{2(x^2+1)+(1-a^2)\cdot 2x}{x^2+1}$$
$$=\frac{2\{x^2+(1-a^2)x+1\}}{x^2+1}$$

$f(x)$が極値をもつための条件は $f'(x)=0$が実数解をもつ。その実数解の前後で$f'(x)$の符号が変わることである。

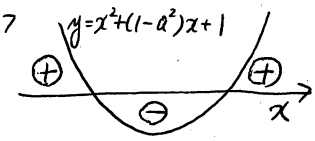
$f'(x)$は分母について$x^2+1>0$だから

$x^2+(1-a^2)x+1=0$ ……①

が異なる2個の実数解をもつ

①の判別式をDとすると

$D>0$ である



$$D=(1-a^2)^2-4\cdot1\cdot1>0$$
$$a^4-2a^2-3>0$$
$$(a^2+1)(a^2-3)>0$$

$a^2+1>0$ より

$$a^2-3>0$$
$$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$$
$$\therefore\ a<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<a$$

16 aを実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。

$$f'(x)=a-\sin x+\cos 2x$$
$$=a-\sin x+(1-2\sin^2 x)$$
$$=-2\sin^2 x-\sin x+a+1$$

ここがpoint

$f(x)$が極値をもたない条件は，すべての実数で$f(x)$が単調増加，または単調減少であればよいから，

$f'(x)\geqq 0$ または $f'(x)\leqq 0$ である。

すなわち，すべてのxについて

$$-2\sin^2 x-\sin x+a+1\geqq 0$$

または

$$-2\sin^2 x-\sin x+a+1\leqq 0.$$

だから

$$2\sin^2 x+\sin x-1\leqq a$$

または ……①

$$2\sin^2 x+\sin x-1\geqq a$$

である。

$g(x)=2\sin^2 x+\sin x-1$ とおくと

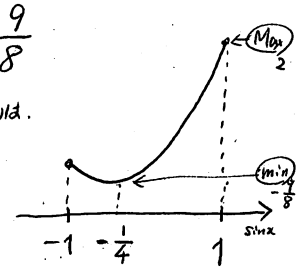
$$g(x)=2\left(\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin x\right)-1$$
$$=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ だから$g(x)$は，

$\sin x=-\frac{1}{4}$のとき最小値$-\frac{9}{8}$

$\sin x=1$のとき最大値

$2\times1^2+1-1=2$.



よって $-\frac{9}{8}\leqq g(x)\leqq 2$.

①より求めるaの値の範囲は

$$a\leqq-\frac{9}{8},\ 2\leqq a$$