

共通接線 ①（接点がずれる編）

- 1 2つの曲線 $y = x^2$, $y = -(x-2)^2$ の共通な接線の方程式を求めよ。

【解答】 $y = 0$, $y = 4x - 4$

- 2 2つの曲線 $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 + 2x + 5$ の共通な接線の方程式を求めよ。

【解答】 $y = -2x + 1$

共通接線②（接点が共通編）

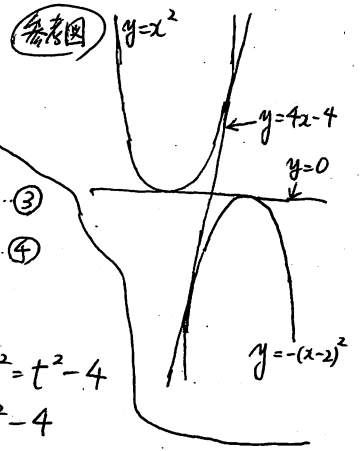
- 3 2 曲線 $y = x^3 + a$, $y = x^2 + bx + c$ が点 $(-1, 0)$ で接するように定数 a , b , c の値を定めよ。

【解答】 $a = 1$, $b = 5$, $c = 4$

- 4 曲線 $y = x^3 + ax + 1$ が直線 $y = 2x - 1$ に接するとき、定数 a の値を求めよ。

【解答】 $a = -1$

共通接線① (接点がずれる編) 実は「接点を設定せよ!」の発展問題



1 2つの曲線 $y = x^2$, $y = -(x-2)^2$ の共通な接線の方程式を求めよ。

$y = x^2$ 上の点 $S(s, s^2)$ とおき $y' = 2x$ より
接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - s^2 &= 2s(x - s) \\ y &= 2sx - 2s^2 + s^2 \\ \therefore y &= 2sx - s^2 \dots\dots ① \end{aligned}$$

$y = -(x-2)^2 = -x^2 + 4x - 4$ 上の点 $T(t, -t^2 + 4t - 4)$ とおき $y' = -2x + 4$ より
接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (-t^2 + 4t - 4) &= (-2t + 4)(x - t) \\ y - (-t^2 + 4t - 4) &= (-2t + 4)x - t(-2t + 4) \\ y - (-t^2 + 4t - 4) &= (-2t + 4)x + 2t^2 - 4t \\ y &= (-2t + 4)x + 2t^2 - 4t + (-t^2 + 4t - 4) \\ \therefore y &= (-2t + 4)x + t^2 - 4 \dots\dots ② \end{aligned}$$

①と②は一致するから (傾きと y 切片が等しい)

$$\begin{cases} 2s = -2t + 4 \dots\dots ③ \\ -s^2 = t^2 - 4 \dots\dots ④ \end{cases}$$

③より $s = -t + 2 \dots\dots ⑤$

⑤を④に代入 $-(-t+2)^2 = t^2 - 4$

$$-t^2 + 4t - 4 = t^2 - 4$$

$$-2t^2 + 4t = 0$$

$$t(t-2) = 0$$

$$t = 0, 2$$

⑤より

$t = 0$ のとき $s = -0 + 2 = 2 \dots\dots ⑥$

$t = 2$ のとき $s = -2 + 2 = 0 \dots\dots ⑦$

⑥の s, t を①, ②に代入すると両方とも

$$y = 4x - 4$$

⑦の s, t を①, ②に代入すると両方とも

$$y = 0$$

以上より求める接線は

$$y = 0 \text{ と } y = 4x - 4 //$$

【解答】 $y = 0, y = 4x - 4$

2 2つの曲線 $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 + 2x + 5$ の共通な接線の方程式を求めよ。

$y = x^2 - 4x + 2$ 上の点 $S(s, s^2 - 4s + 2)$ とおき $y' = 2x - 4$ より 接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (s^2 - 4s + 2) &= (2s - 4)(x - s) \\ y - (s^2 - 4s + 2) &= (2s - 4)x - s(2s - 4) \\ y &= (2s - 4)x - 2s^2 + 4s + (s^2 - 4s + 2) \\ \therefore y &= (2s - 4)x - s^2 + 2 \dots\dots ① \end{aligned}$$

$y = x^2 + 2x + 5$ 上の点 $T(t, t^2 + 2t + 5)$ とおき $y' = 2x + 2$ より 接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - (t^2 + 2t + 5) &= (2t + 2)(x - t) \\ y - (t^2 + 2t + 5) &= (2t + 2)x - t(2t + 2) \\ y &= (2t + 2)x - 2t^2 - 2t + (t^2 + 2t + 5) \\ \therefore y &= (2t + 2)x - t^2 + 5 \dots\dots ② \end{aligned}$$

①と②は一致するから (傾きと y 切片が等しい)

$$\begin{cases} 2s - 4 = 2t + 2 \dots\dots ③ \\ -s^2 + 2 = -t^2 + 5 \dots\dots ④ \end{cases}$$

③より $2s = 2t + 6$

$$s = t + 3 \dots\dots ⑤$$

⑤を④に代入して

$$-(t+3)^2 + 2 = -t^2 + 5$$

$$-t^2 - 6t - 9 + 2 = -t^2 + 5$$

$$-6t = 12$$

$$t = -2$$

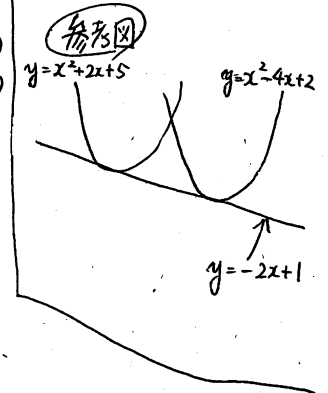
⑤より $s = -2 + 3 = 1$

$s = 1, t = -2$ を①, ②に代入すると

両方とも $y = -2x + 1$

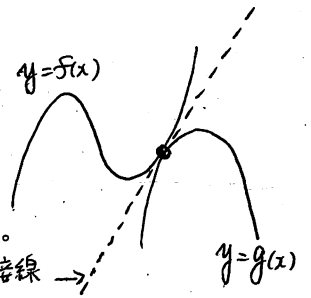
以上より求める接線は

$$y = -2x + 1 //$$



【解答】 $y = -2x + 1$

共通接線 ② (接点が共通編)



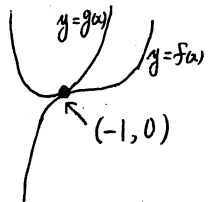
- 3 2曲線 $y = x^3 + a$, $y = x^2 + bx + c$ が点 $(-1, 0)$ で接するように定数 a, b, c の値を定めよ。

$$f(x) = x^3 + a, \quad g(x) = x^2 + bx + c \text{ とする}$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad g'(x) = 2x + b$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が点 $(-1, 0)$ で接するから

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) = 0 \cdots \cdots ① \\ f'(-1) = g'(-1) \cdots \cdots ② \end{cases}$$



①より

$$(-1)^3 + a = (-1)^2 + b(-1) + c = 0$$

$$-1 + a = 0 \text{ より } a = 1$$

$$-1 - b + c = 0 \text{ より } b - c = -1 \cdots \cdots ③$$

②より

$$3 \times (-1)^2 = 2 \cdot (-1) + b$$

$$3 = -2 + b$$

$$\therefore b = 5$$

$$b = 5 \text{ を } ③ \text{ に代入 } 5 - c = -1$$

$$\therefore c = 4$$

以上より

$$a = 1, b = 5, c = 4 //$$

point

接点が共通な共通接線について

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が

1点で接するような場合

その接点の x 座標を t と設定し

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \leftarrow \text{接点の } y \text{ 座標が等しい} \\ f'(t) = g'(t) \leftarrow \text{接線の傾きが等しい} \end{cases}$$

の連立を解く。

(下の式の方が次数が低いので下式を整理して、上の式に代入してたまための式にすれば、だいたい解ける)

* ③では $t = -1$ で ①、② の式を作った。

【解答】 $a = 1, b = 5, c = 4$

- 4 曲線 $y = x^3 + ax + 1$ が直線 $y = 2x - 1$ に接するとき、定数 a の値を求めよ。

$$f(x) = x^3 + ax + 1, \quad g(x) = 2x - 1 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3x^2 + a, \quad g'(x) = 2$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が接するのて

接点の x 座標を t とおくと

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} t^3 + at + 1 = 2t - 1 \cdots \cdots ① \\ 3t^2 + a = 2 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^3 + at + 1 = 2t - 1 \cdots \cdots ① \\ 3t^2 + a = 2 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$② \text{ より } a = -3t^2 + 2 \cdots \cdots ③$$

③を①に代入すると

$$t^3 + (-3t^2 + 2)t + 1 = 2t - 1$$

$$t^3 - 3t^3 + 2t + 1 = 2t - 1$$

$$-2t^3 + 2 = 0$$

$$t^3 - 1 = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+1) = 0$$

$t^2+t+1=0$ についての判別式 D とすると

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

t は実数であるから $t = 1$ 。

$$③ \text{ に代入して } a = -3 \times 1^2 + 2 = -1 //$$

接点の y 座標は $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

だから接点は $(1, 1)$ である

【解答】 $a = -1$

変曲点と箱入り娘

1 $C: y = x^3 - 4x$ 上の点 $P(1, -3)$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

【解答】 $y = -x - 2$

(2) C と ℓ の共有点のうち、点 P 以外の点の座標を求めよ。

【解答】 $(-2, 0)$

(3) $y = x^3 - 4x$ を x について 2 回微分して y'' を求めよ。

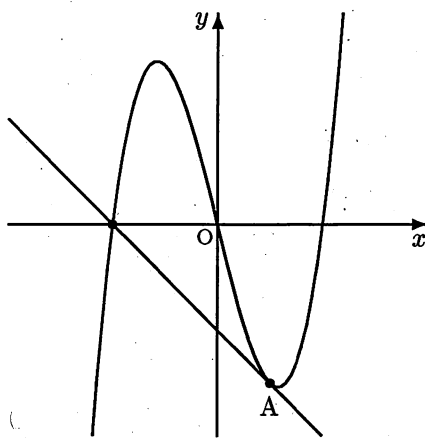
【解答】 $y'' = 6x$

(4) (3) で $y'' = 0$ を解け。

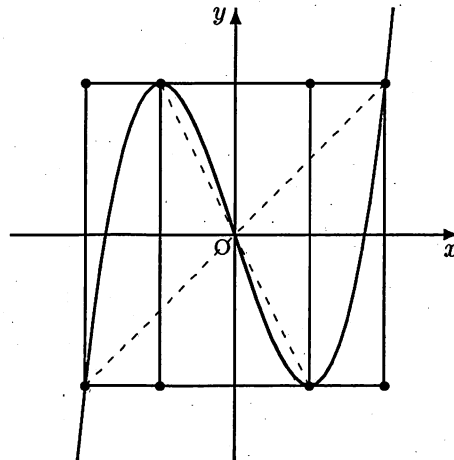
※ 3 次関数で $y'' = 0$ を満たす点を変曲点という。
変曲点は極大になる点と極小になる点の midpoint である。

【解答】 $x = 0$

(5) まとめると実は



は



箱入り娘
と同じ
なのです。

x 座標だけ見ると、接点と交点を 1:2 に内分する点を変曲点となります。

- 2 $C: y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $P(1, 5)$ における接線 ℓ とする。
 C と ℓ の交点のうち、 P でない方の点の x 座標を求めよ。

【解答】 -3

- 3 $C: y = 3x^3 + 3x^2$ 上の点 $P(-1, 0)$ における接線 ℓ とする。
 C と ℓ の交点のうち、 P でない方の点の x 座標を求めよ。

【解答】 1

<チャレンジ問題>

- 4 k を定数とし、 $f(x) = x^3 - kx$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる。
点 P を通り、曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち、傾きが大きい方を ℓ_1 、小さい方を ℓ_2 とする。さらに、 C と ℓ_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 、 C と ℓ_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。 ℓ_1 および ℓ_2 の方程式と、 Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。

【解答】 $\ell_1: y = (3a^2 - k)x - 2a^3$, $Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka)$
 $\ell_2: y = \left(\frac{3}{4}a^2 - k\right)x + \frac{a^3}{4}$, $Q_2\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2}\right)$

変曲点と箱入り娘

1 $C: y = x^3 - 4x$ 上の点 $P(1, -3)$ における接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

$$y' = 3x^2 - 4 \text{ より 接線の傾きは } 3 \times 1^2 - 4 = -1.$$

$$\text{接線の方程式は } y - (-3) = (-1)(x - 1)$$

$$\therefore y = -x - 2$$

【解答】 $y = -x - 2$

(2) C と l の共有点のうち、点 P 以外の点の座標を求めよ。

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -x - 2 \end{cases} \quad \text{2. } y \text{ 消去して } x^3 - 4x = -x - 2$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)^2(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

点 $P(1, -3)$ 以外の方は $x = -2$.

このとき

$$y = (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = 0$$

よって $(-2, 0)$

【解答】 $(-2, 0)$

(3) $y = x^3 - 4x$ を x について2回微分して y'' を求めよ。

$$y' = 3x^2 - 4 \text{ より } y'' = 6x$$

【解答】 $y'' = 6x$

(4) (3) で $y'' = 0$ を解け。

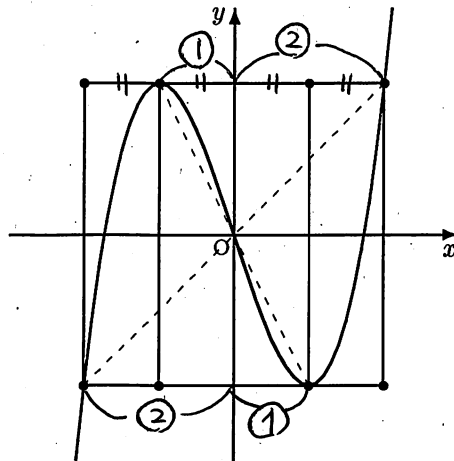
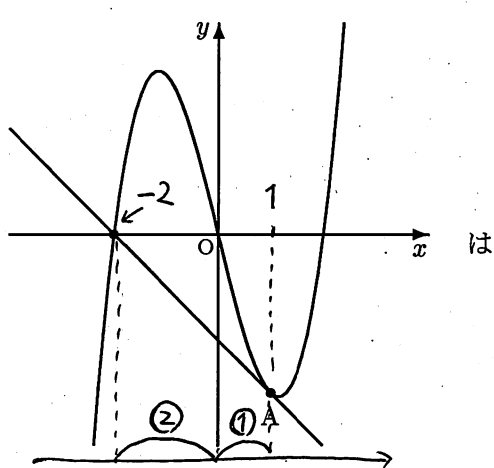
$$6x = 0 \text{ より } x = 0$$

※ 3次関数で $y'' = 0$ を満たす点を変曲点という。

変曲点は極大になる点と極小になる点の midpoint である。

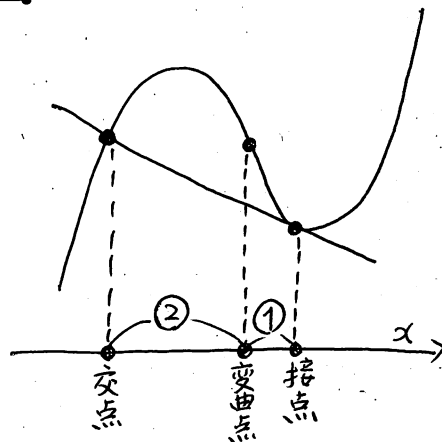
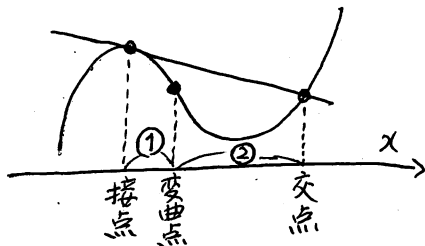
【解答】 $x = 0$

(5) まとめると実は



箱入り娘
と同じ
なのです。

x 座標だけ見ると、接点と交点を1:2に内分する点に変曲点となります。



- 2 $C: y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $P(1, 5)$ における接線 l とする。

C と l の交点のうち、 P でない方の点の x 座標を求めよ。

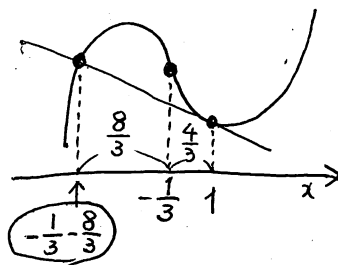
$$y' = 3x^2 + 2x - 3$$

$$y'' = 6x + 2$$

$$y'' = 0 \text{ を解くと}$$

$$6x + 2 = 0 \text{ より}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$



$$-\frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -3 \text{ \#}$$

【解答】 -3

- 3 $C: y = 3x^3 + 3x^2$ 上の点 $P(-1, 0)$ における接線 l とする。

C と l の交点のうち、 P でない方の点の x 座標を求めよ。

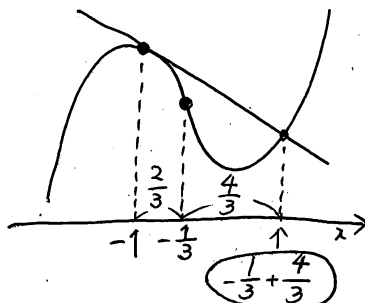
$$y' = 9x^2 + 6x$$

$$y'' = 18x + 6$$

$$y'' = 0 \text{ を解くと}$$

$$18x + 6 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$



$$-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \text{ \#}$$

【解答】 1

<チャレンジ問題>

- 4 k を定数とし、 $f(x) = x^3 - kx$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上に原点と異なる点 $P(a, f(a))$ をとる。

点 P を通り、曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち、傾きが大きい方を l_1 、小さい方を l_2 とする。さらに、 C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1 、 C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。 l_1 および l_2 の方程式と、 Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。(2020年千葉大学文系)

$$y = x^3 - kx$$

$$y' = 3x^2 - k$$

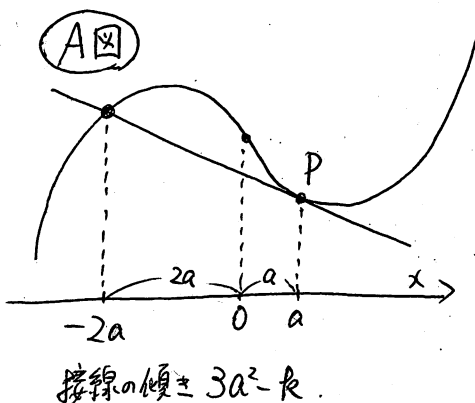
$$y'' = 6x$$

$$y'' = 0 \text{ を解くと}$$

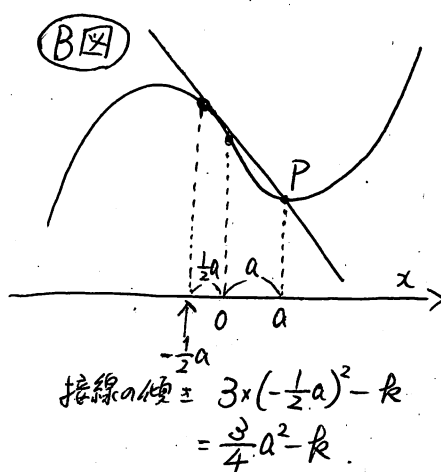
$$6x = 0$$

$$x = 0$$

$$P(a, a^3 - ka)$$



接線の傾き $3a^2 - k$



接線の傾き $3 \times (-\frac{1}{2}a)^2 - k = \frac{3}{4}a^2 - k$

$$3a^2 > \frac{3}{4}a^2 \text{ より } 3a^2 - k > \frac{3}{4}a^2 - k \text{ なので}$$

A図が l_1 と Q_1 のもの。 B図が l_2 と Q_2 のものとする。

$$\text{A図より } l_1 \text{ は } y - (a^3 - ka) = (3a^2 - k)(x - a) \text{ となる } y = (3a^2 - k)x - 2a^3$$

$$x = -2a \text{ のとき } y = (-2a)^3 - k(-2a) = -8a^3 + 2ka \text{ だから } Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka)$$

$$\text{B図より } l_2 \text{ は } y - (a^3 - ka) = (\frac{3}{4}a^2 - k)(x - a) \text{ となる } y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2}a \text{ のとき } y = (-\frac{1}{2}a)^3 - k(-\frac{1}{2}a) = -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2} \text{ だから } Q_2(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2})$$

point

「 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線」なので
A図 B図のような。1つは接点、もう1つは交点。
となるような図がかければ、後は「箱入り娘」
すこ〜簡単。

【解答】 $l_1: y = (3a^2 - k)x - 2a^3$, $Q_1(-2a, -8a^3 + 2ka)$

$l_2: y = (\frac{3}{4}a^2 - k)x + \frac{a^3}{4}$, $Q_2(-\frac{a}{2}, -\frac{a^3}{8} + \frac{ka}{2})$

異なる3個の実数解 変数定数を分離できない場合

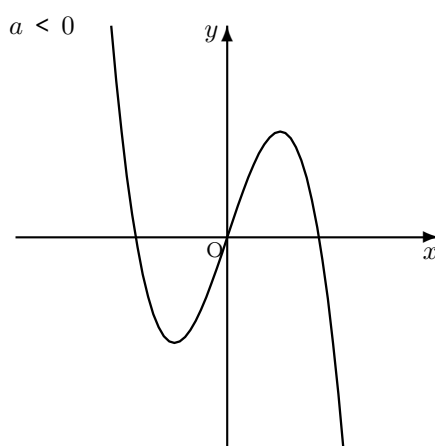
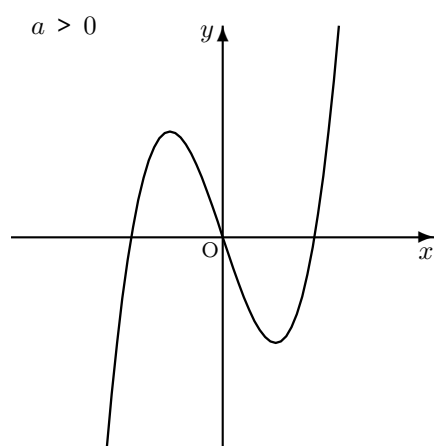
3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ……① の解の個数について、次のようにまとめられる。

3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ の判別式を D とすると

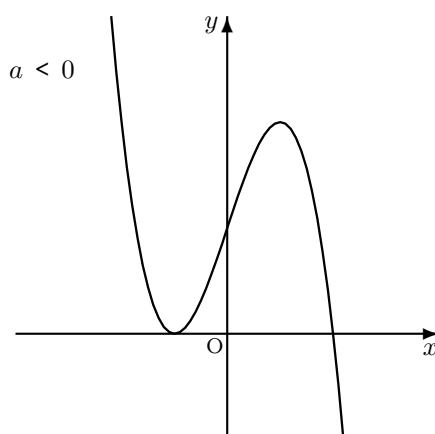
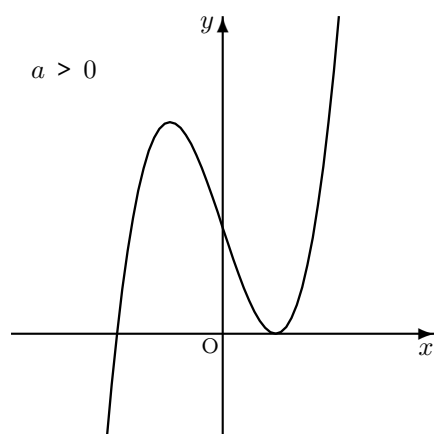
(i) $D = 0$ のとき、方程式①の解の個数は () 個

(ii) $D > 0$ なら、極大値と極小値をもつ。

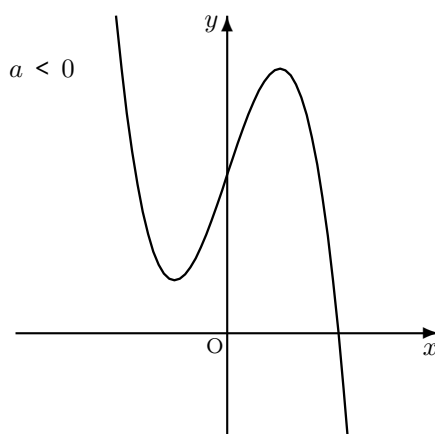
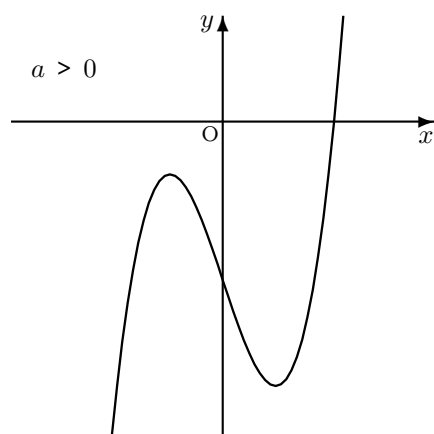
2次方程式 $f'(x) = 0$ の解を α, β とおくと極大値と極小値は $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ のどちらかである。



解が3個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
極大値と極小値
の積が



解が2個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0$
極大値と極小値
の積が



解が1個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$
極大値と極小値
の積が

1 方程式 $x^3 - 3ax + a = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

【解答】 $a > \frac{1}{4}$

2 a を正の定数とする。方程式 $x^3 - 12a^2x + 16a = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

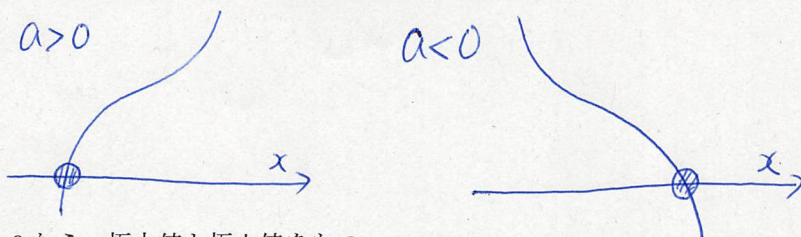
【解答】 $a > 1$

異なる3個の実数解 変数定数を分離できない場合

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ……① の解の個数について、次のようにまとめられる。

3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対して、 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ の判別式を D とすると

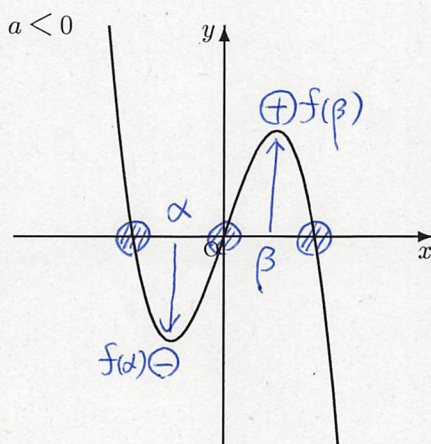
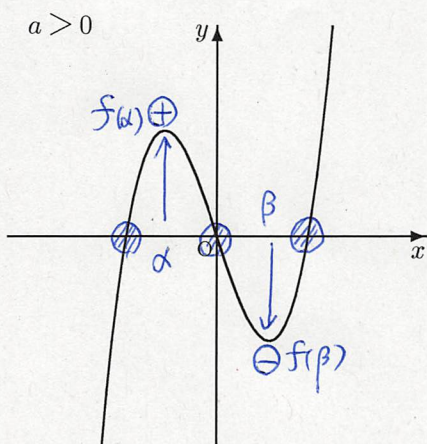
(i) $D \leq 0$ のとき、方程式①の解の個数は (1) 個



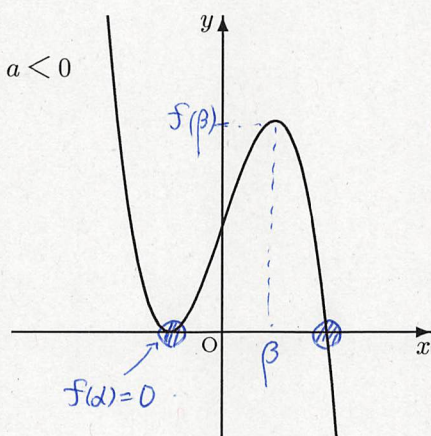
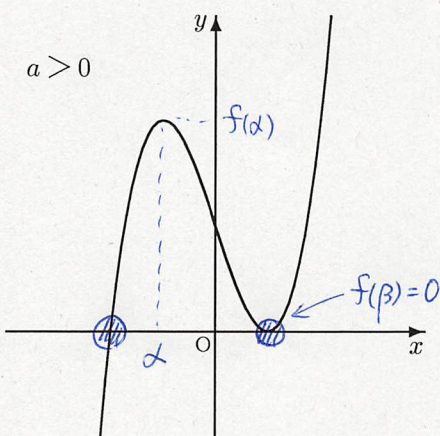
(ii) $D > 0$ なら、極大値と極小値をもつ。

2次方程式 $f'(x) = 0$ の解を α, β とおくと極大値と極小値は $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ のどちらかである。

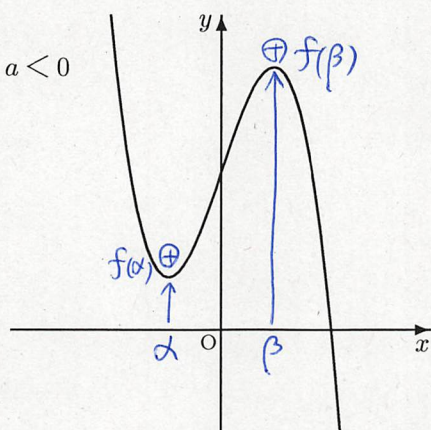
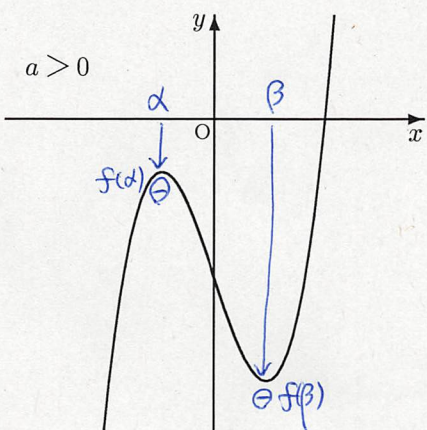
$\alpha < \beta$ とする



よく使うのはこれですよ。
解が3個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
極大値と極小値
の積が負



解が2個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) = 0$
極大値と極小値
の積がゼロ



解が1個のとき
 $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$
極大値と極小値
の積が正

← 変数と定数を分離できないのよ...

1 方程式 $x^3 - 3ax + a = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$f(x) = x^3 - 3ax + a \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a$$

(i) $a \leq 0$ のとき $f'(x)$ は単調増加なので異なる3個の実数解をもたない。

$$(ii) a > 0 \text{ のとき } f'(x) = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

x	...	$-\sqrt{a}$	...	$\sqrt{a}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-\sqrt{a})$	$\searrow$	$f(\sqrt{a})$	$\nearrow$

$f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつには $f(-\sqrt{a}) \times f(\sqrt{a}) < 0$ が必要。

$$f(-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^3 - 3a(-\sqrt{a}) + a = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} + a = 2a\sqrt{a} + a = a(2\sqrt{a} + 1)$$

$$f(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^3 - 3a\sqrt{a} + a = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + a = -2a\sqrt{a} + a = a(-2\sqrt{a} + 1)$$

$$f(-\sqrt{a}) \times f(\sqrt{a}) < 0 \text{ より } a(2\sqrt{a} + 1) \times a(-2\sqrt{a} + 1) < 0$$

$$a^2(-4a + 1) < 0$$

$$-4a + 1 < 0$$

$$a > \frac{1}{4}$$

これは $a > 0$ をみたす。

$$(i) (ii) \text{ より } \underline{a > \frac{1}{4}}$$

【解答】 $a > \frac{1}{4}$

2 a を正の定数とする。方程式 $x^3 - 12a^2x + 16a = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

$$f(x) = x^3 - 12a^2x + 16a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12a^2 = 3(x + 2a)(x - 2a)$$

$$a > 0 \text{ より } -2a < 2a \text{ だから}$$

x	...	$-2a$	...	$2a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-2a)$	$\searrow$	$f(2a)$	$\nearrow$

$f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつには $f(-2a) \times f(2a) < 0$ が必要。...①

$$f(-2a) = (-2a)^3 - 12a^2(-2a) + 16a = -8a^3 + 24a^3 + 16a = 16a^3 + 16a = 16a(a^2 + 1)$$

$$f(2a) = (2a)^3 - 12a^2 \times 2a + 16a = 8a^3 - 24a^3 + 16a = -16a^3 + 16a = -16a(a^2 - 1)$$

$$\textcircled{1} \text{ より } 16a(a^2 + 1) \times \{-16a(a^2 - 1)\} < 0 \text{ . } \rightarrow a > 0, a^2 + 1 > 0 \text{ より}$$

$$-16(a^2 - 1) < 0$$

$$a^2 - 1 > 0$$

$$(a+1)(a-1) > 0$$

$$a-1 > 0$$

$$\underline{a > 1}$$

【解答】 $a > 1$