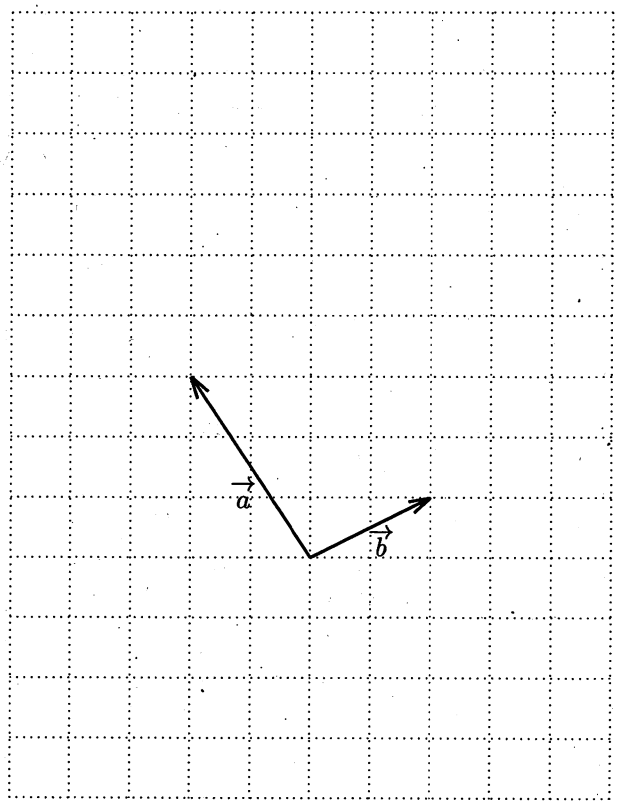
ショートトライアル　ベクトル　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

1　下の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\vec{b}$

(3)　$2\vec{a}+\vec{b}$　　(4)　$\vec{b}-\vec{a}$



2　次の計算をせよ。

(1)　$2\vec{a}-7\vec{a}+3\vec{a}$

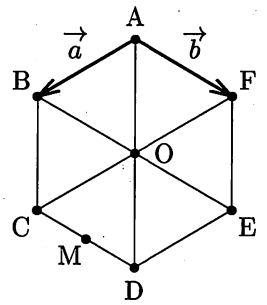
(2)　$4(\vec{a}-\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

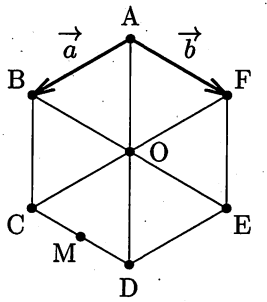
3　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが1のベクトルを求めよ。

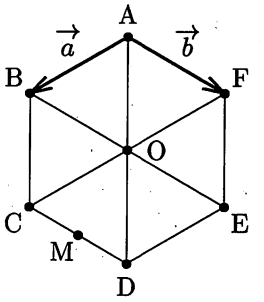
4　下の図の正六角形ABCDEFにおいて，辺CDの中点をMとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

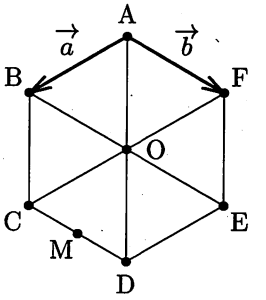
(1)　$\overrightarrow{CE}$　　(2) $\overrightarrow{AE}$

(3)　$\overrightarrow{EM}$　　(4) $\overrightarrow{MO}$









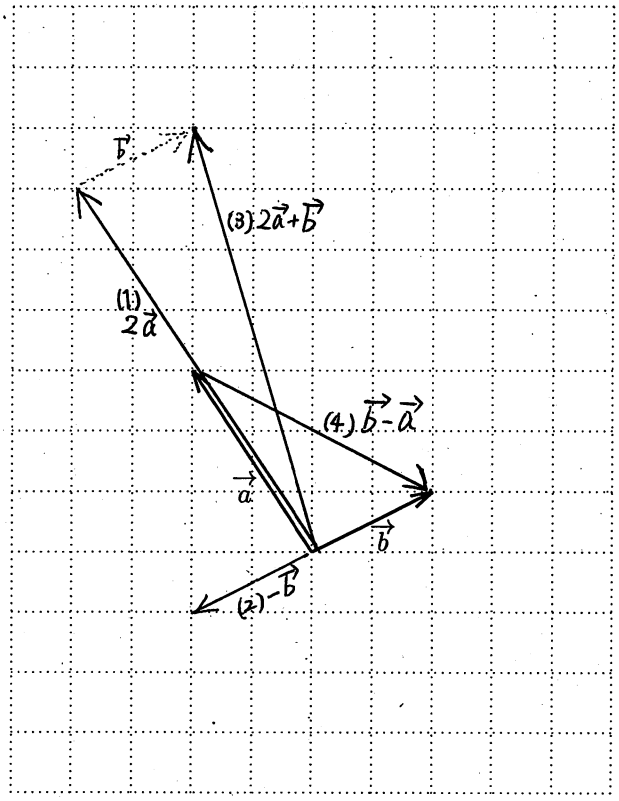
ショートトライアル　ベクトル　1

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　下の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。

(1) $2\vec{a}$　　(2) $-\vec{b}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　　(4) $\vec{b}-\vec{a}$



2　次の計算をせよ。

(1) $2\vec{a}-7\vec{a}+3\vec{a}$

(与式) $=(2-7+3)\vec{a}=\underline{-2\vec{a}}$ //

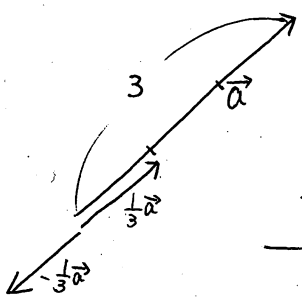
(2) $4(\vec{a}-\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

(与式) $=4\vec{a}-4\vec{b}-2\vec{a}+6\vec{b}$

$=\underline{2\vec{a}+2\vec{b}}$ //

3　$|\vec{a}|=3$ のとき，$\vec{a}$ と平行で大きさが 1 のベクトルを求めよ。

図示して考えよ

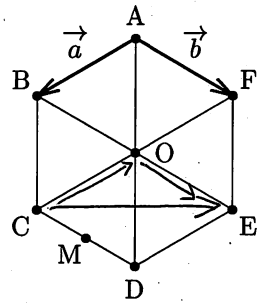


$\underline{\frac{1}{3}\vec{a}\text{ と }-\frac{1}{3}\vec{a}}$ //

4　下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 CD の中点を M とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

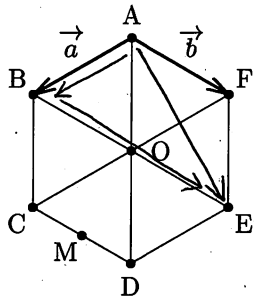
(1) $\overrightarrow{CE}$　　(2) $\overrightarrow{AE}$

(3) $\overrightarrow{EM}$　　(4) $\overrightarrow{MO}$



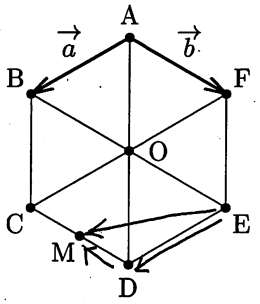
(1) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}$

$=\underline{-\vec{a}+\vec{b}}$ //



(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

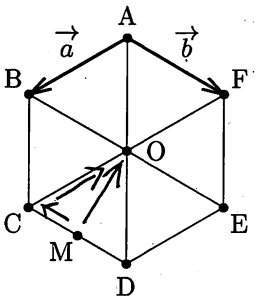
$=\underline{\vec{a}+2\vec{b}}$ //



(3) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DM}$

$=\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

$=\underline{\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$ //



(4) $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CO}$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right)+(-\vec{a})$

$=\underline{-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$ //

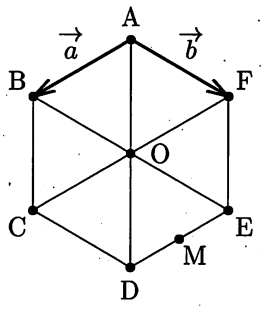
ショートトライアル　ベクトル　2

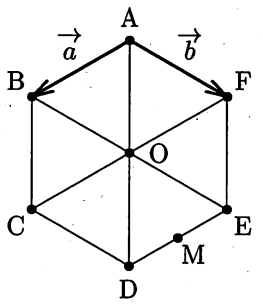
____組____番　氏名____________________

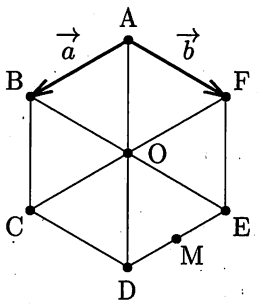
$\boxed{1}$ 下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

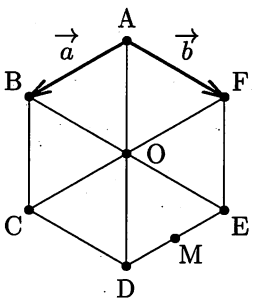
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$









$\boxed{2}$ 座標平面上の点 A(1, 2)，B(3, 5) について次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分表示せよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -4)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $-4\vec{a}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}$

$\boxed{4}$ $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ とする。$\vec{c}=(5,\ 4)$ を適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

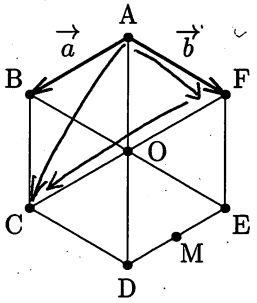
ショートトライアル　ベクトル　2

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{BF}$

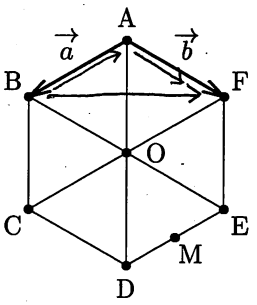
(3) $\overrightarrow{MB}$　　(4) $\overrightarrow{AM}$



(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}$

$=\vec{b}+2\vec{a}$

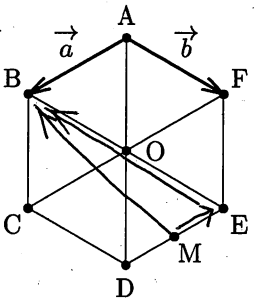
$=2\vec{a}+\vec{b}$ //



(2) $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

$=(-\vec{a})+\vec{b}$

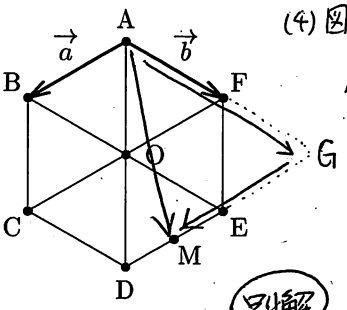
$=-\vec{a}+\vec{b}$ //



(3) $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+(-2\vec{b})$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}$ //



(4) 図のように点Gをとると

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}$

$=2\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{a}$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$ //

別解

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}$

$=\vec{a}+2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$

$=\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$ //

2　座標平面上の点 A(1, 2)，B(3, 5) について次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示せよ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

はじまりからおわりは　後ろ　ひく　前

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3)$ //

(2) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ //

3　$\vec{a}=(1,\ 5)$，$\vec{b}=(3,-4)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $-4\vec{a}$

$-4\vec{a}=-4\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-20\end{pmatrix}$

$-4\vec{a}=(-4,\ -20)$ //

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}$

$2\vec{a}+3\vec{b}=2\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-2\end{pmatrix}$

$2\vec{a}+3\vec{b}=(11,\ -2)$ //

4　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ とする。$\vec{c}=(5,\ 4)$ を適当な実数 s，t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ より

$\begin{cases}s+t=5\\2s-t=4\end{cases}$

これを解くと $s=3$，$t=2$

したがって　$\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$ //

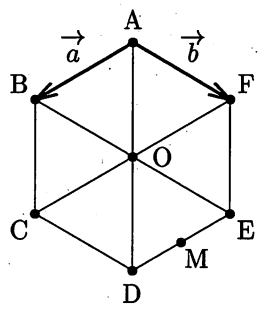
ショートトライアル　ベクトル　3

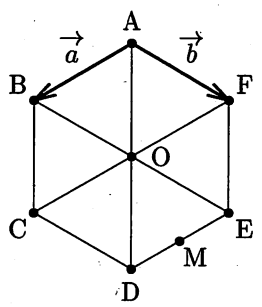
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

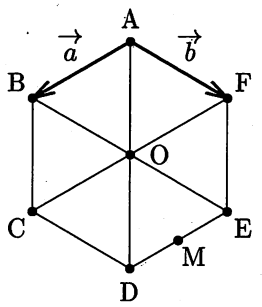
$\boxed{1}$　下の図の正六角形ABCDEFにおいて，辺DEの中点をMとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

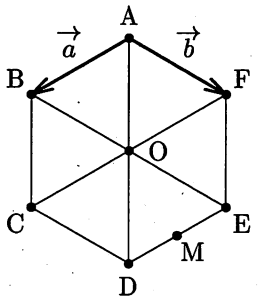
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$









$\boxed{2}$　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

$\boxed{3}$　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=60^\circ$

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\theta=150^\circ$

$\boxed{4}$　1辺の長さが2である正三角形ABCにおいて，辺BCの中点をMとするとき，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}$

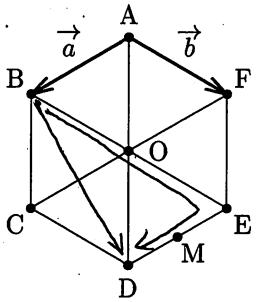
ショートトライアル　ベクトル　3

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

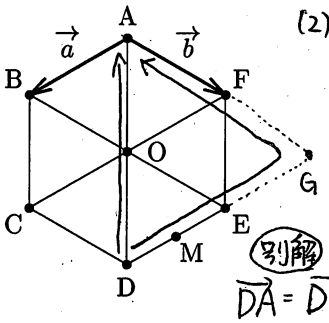
1　下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{BD}$　　(2) $\overrightarrow{DA}$

(3) $\overrightarrow{CM}$　　(4) $\overrightarrow{MO}$

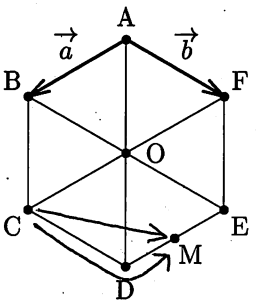


(1) $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$
$=2\vec{b}+\vec{a}$
$=\vec{a}+2\vec{b}$ //

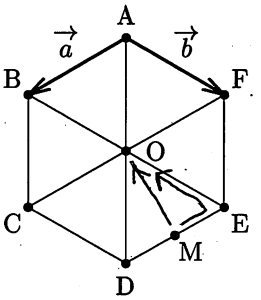


(2) 図のように点Gをおくと
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}$
$=-2\vec{a}+(-2\vec{b})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$ //

別解
$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$
$=(-\vec{b})+(-\vec{a})+(-\vec{b})+(-\vec{a})$
$=-2\vec{a}-2\vec{b}$ //



(3) $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}$
$=\vec{b}+(-\frac{1}{2}\vec{a})$
$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ //



(4) $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EO}$
$=(-\frac{1}{2}\vec{a})+(-\vec{b})$
$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ //

2　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}$ より

$1\times x-(-2)\times 3=0$

$x=-6$ //

別解
$\vec{b}=k\vec{a}$ より
$\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$
$\begin{cases}-2=k\\x=3k\end{cases}$
より $k=-2$ から
$x=3\times(-2)$
$=-6$ //

公式
$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$ で
$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

3　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=60^\circ$

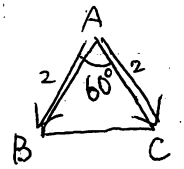
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$
$=4\times 3\times\frac{1}{2}=6$ //

(2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\theta=150^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 150^\circ$
$=3\times 2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-3\sqrt{3}$ //

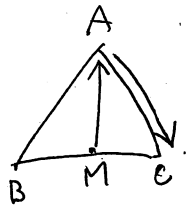
4　1辺の長さが2である正三角形ABCにおいて，辺 BC の中点を M とするとき，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



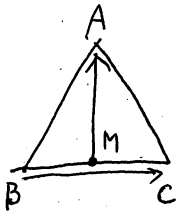
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$
$=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$ //

(2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{AC}|\cos 150^\circ$
$=\sqrt{3}\times 2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-3$ //

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA}$



$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{MA}|\cos 90^\circ$
$=2\times\sqrt{3}\times 0=0$ //

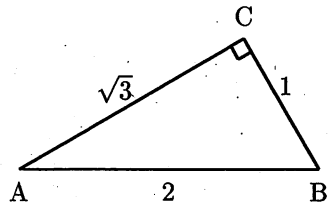
ショートトライアル　ベクトル　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ -2)$，$\vec{b}=(x,\ -5)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

$\boxed{2}$　下の図のような直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$



$\boxed{3}$　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のなす角 θ を求めよ。

$\boxed{4}$　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ が垂直になるように，x の値を求めよ。

$\boxed{5}$　$\vec{a}=(-3,\ 1)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

ショートトライアル　ベクトル　4

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　2つのベクトル $\vec{a}=(4,\ -2)$，$\vec{b}=(x,\ -5)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ だから

$4\times(-5)-(-2)\times x=0$

$-20+2x=0$

$x=10$ //

別解　$\vec{b}=k\vec{a}$ より

$\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

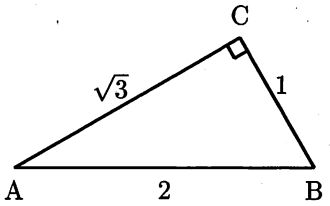
$\begin{cases}x=4k\\-5=-2k\end{cases}$

$k=\frac{5}{2}$ だから

$x=4\times\frac{5}{2}=10$ //

2　下の図のような直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

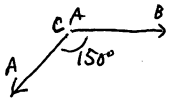
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$



(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos 60^\circ$

$=2\times1\times\frac{1}{2}=1$ //

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos 150^\circ$



$=2\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$ //

3　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のなす角 θ を求めよ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times1+3\times2=5$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ より

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=45^\circ$ //

4　2つのベクトル $\vec{a}=(-1,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ が垂直になるように，x の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}-1\\x\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ より

$(-1)\times3+x\times2=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ //

5　$\vec{a}=(-3,\ 1)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より　$x^2+y^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ だから

$\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$

$-3x+y=0$

$\therefore y=3x$ …②

②を①に代入して　$x^2+(3x)^2=1$

$x^2=\frac{1}{10}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

②より　$y=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

以上より

$\vec{e}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$（複号同順） //

[別解]　$\vec{a}$ と垂直なベクトルの1つは

$\vec{b}=(1,\ 3)$ であり　$|\vec{b}|=\sqrt{10}$ なので

求める単位ベクトル $\vec{e}$ は

$\vec{e}=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}},\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$（複号同順） //

point
① $(a_1,\ a_2)$ と垂直なベクトルの1つは $(a_2,\ -a_1)$
② $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ である

ショートトライアル　ベクトル　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が次の条件を満たすとき，
$|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を求めよ。
$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

2　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が垂直になるように，x の値を求めよ。

3　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

4　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ をみたす $\triangle OAB$

(2)　$O(0,\ 0)$，$A(4,\ 7)$，$B(-2,\ 5)$ を頂点とする $\triangle OAB$

(3)　$A(1,\ 3)$，$B(-5,\ 4)$，$C(2,\ -8)$ を頂点とする $\triangle ABC$

ショートトライアル　ベクトル　5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が次の条件を満たすとき，
$|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を求めよ。
$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

$$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=1^2-4\times2+4\times4^2$$
$$=1-8+64$$
$$=57.$$

$|\vec{a}-2\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{57}$ //

2　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が垂直になるように，x の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}$ より

$$1\times(-2)+3\times x=0$$
$$\therefore x=\frac{2}{3}$$ //

3　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(-2,\ x)$ が平行になるように，x の値を求めよ。

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix}-2\\x\end{pmatrix}$ より

$$1\times x-3\times(-2)=0$$
$$\therefore x=-6$$ //

4　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-2$ をみたす △OAB

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times2^2-(-2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\times4-4}=\frac{1}{2}\sqrt{4(9-1)}$$
$$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$ //

(2)　O(0, 0)，A(4, 7)，B(−2, 5) を頂点とする △OAB

$\overrightarrow{OA}=(4,7)$，$\overrightarrow{OB}=(-2,5)$

$$S=\frac{1}{2}|4\times5-7\times(-2)|$$
$$=\frac{1}{2}\times34$$
$$=17$$ //

(3)　A(1, 3)，B(−5, 4)，C(2, −8) を頂点とする △ABC

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-11\end{pmatrix}$

$$S=\frac{1}{2}|(-6)\times(-11)-1\times1|$$
$$=\frac{1}{2}\times65$$
$$=\frac{65}{2}$$ //

ショートトライアル　ベクトル　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次のような点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) 辺 AB を 2 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)

(2) 辺 AB を 1 : 2 に外分する点 Q($\vec{q}$)

(3) 辺 BC 中点 M($\vec{m}$)

(4) 辺 PC を 3 : 1 に内分する点 R($\vec{r}$)

(5) △ABC の重心 G($\vec{g}$)

2　次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ を求めよ。

$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$，$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$

3　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1) $|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = 3$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ をみたす △OAB

(2) A(2, 1)，B(−3, 6)，C(0, −5) を頂点とする △ABC

ショートトライアル　ベクトル　6

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　3点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) を頂点とする △ABC において，次のような点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) 辺 AB を 2 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)

$$\vec{p} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3}$$
$$= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

(2) 辺 AB を 1 : 2 に外分する点 Q($\vec{q}$)

$$\vec{q} = \frac{-2\overrightarrow{OA} + 1\times\overrightarrow{OB}}{1-2} = \frac{-2\vec{a}+\vec{b}}{-1}$$
$$= 2\vec{a} - \vec{b}$$

(3) 辺 BC 中点 M($\vec{m}$)

$$\vec{m} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

(4) 辺 PC を 3 : 1 に内分する点 R($\vec{r}$)

$$\vec{r} = \frac{1\times\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OC}}{3+1}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{p} + \frac{3}{4}\vec{c}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + \frac{3}{4}\vec{c}$$
$$= \frac{3}{20}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$$

(5) △ABC の重心 G($\vec{g}$)

$$\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

2　次の条件を満たす 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ を求めよ。

$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$，$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{7}$ を両辺2乗して

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\sqrt{7})^2$$
$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$$
$$1^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + (\sqrt{3})^2 = 7$$
$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{3}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\frac{3}{2}}{1\times\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{3\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$\theta = 150^\circ$

3　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1) $|\overrightarrow{OA}| = 2$，$|\overrightarrow{OB}| = 3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -4$ をみたす △OAB

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2\times 3^2 - (-4)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4\times 9 - 16}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4(9-4)}$$
$$= \sqrt{5}$$

(2) A(2, 1)，B(−3, 6)，C(0, −5) を頂点とする △ABC

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\left|(-5)\times(-6) - 5\times(-2)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\times 40$$
$$= 20$$

ショートトライアル　ベクトル　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　△OAB において、辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

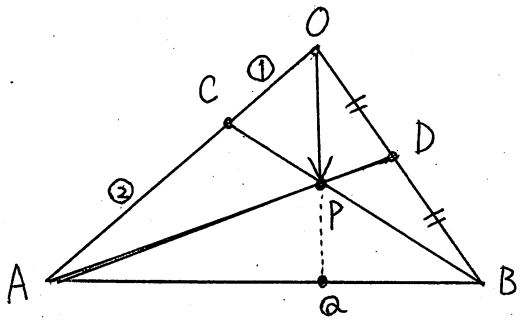
(3) 点 P は △OAB に対してどのような位置にあるか。

ショートトライアル　ベクトル　7

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△OAB において、辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。



点PはAD上なので AP : PD = $s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$ ……①

点PはBC上なので BP : PC = $t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(1-t)\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{a}$

$=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ……②

①,②で $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s=\frac{1}{3}t \\ \frac{1}{2}s=1-t \end{cases}$$

これを解くと　$s=\frac{4}{5}$, $t=\frac{3}{5}$

よって①より　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$ //

st作戦

Point

「点Zが XY上にある」

（点Zは XZ : ZY = $t:(1-t)$ となる内分点であるから、）

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OZ}=(1-t)\overrightarrow{OX}+t\overrightarrow{OY}$

とおける

内分の公式で $\overrightarrow{OZ}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OX}+t\overrightarrow{OY}}{t+(1-t)}$ だから

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+2\times\overrightarrow{OB}}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{1\times\overrightarrow{OA}+2\times\overrightarrow{OB}}{2+1}$

ここで $\overrightarrow{OQ}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OQ}$ となり

点Qは直線OP上であり、ABの内分点なので

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ //

別解　点QはOP上なので　kを実数として

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{5}k\vec{a}+\frac{2}{5}k\vec{b}$ ……③

点QはAB上なので AQ : QB = $u:(1-u)$ とすると

$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}$

$=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$ ……④

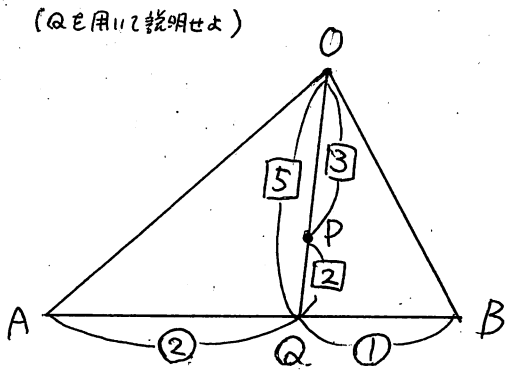
③,④で $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{5}k=1-u \\ \frac{2}{5}k=u \end{cases}$$

これを解くと $k=\frac{3}{5}$, $u=\frac{2}{3}$

よって③より　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$ //

(3) 点 P は △OAB に対してどのような位置にあるか。（Qを用いて説明せよ）



(1)(2)より

辺ABを2:1に内分する点をQとすると、

点PはOQを3:2に内分する点である //

ショートトライアル　ベクトル　8

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　△OAB において、辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 点 P は △OAB に対してどのような位置にあるか。

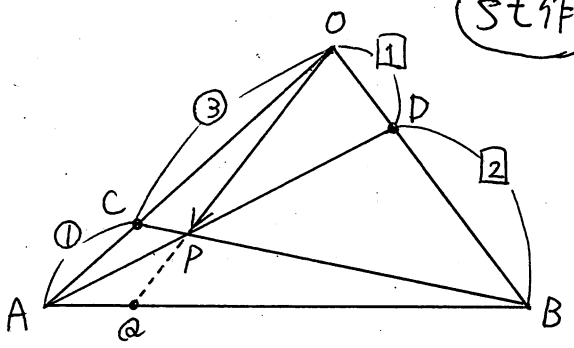
ショートトライアル　ベクトル　8

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△OAB において、辺 OA を 3 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

St作戦



点PはAD上なので AP:PD = s:(1−s) とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}$ …①

点PはBC上なので BP:PC = t:(1−t) とすると

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(1-t)\vec{b}+\frac{3}{4}t\vec{a}$

$=\frac{3}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ …②

①,②で $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s=\frac{3}{4}t \\ \frac{1}{3}s=1-t \end{cases}$$

↑この連立方程式の解き方（人それぞれで良いが）

この計算は計算用紙にせること

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-4s=3t \\ s=3-3t \end{cases}$　分母をはらう

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4s+3t=4 \\ s+3t=3 \end{cases}$　基本型にする

$$\begin{array}{rl} & 4s+3t=4 \\ -) & s+3t=3 \\ \hline & 3s \quad =1 \\ & s=\frac{1}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 4s+3t=4 \\ -) & 4s+12t=12 \\ \hline & -9t=-8 \\ & t=\frac{8}{9} \end{array}$$

※sからtを求めるのは代入法でもよい

これを解くと　$s=\frac{1}{3}$, $t=\frac{8}{9}$

①より　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}$ //

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OP}=\frac{6\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OB}}{9}=\frac{7}{9}\times\frac{6\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OB}}{1+6}$

ここで $\overrightarrow{OQ}=\frac{6\times\overrightarrow{OA}+1\times\overrightarrow{OB}}{1+6}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{OQ}$ となり

点QはOP上であり、ABの内分点だから

$\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$ //

別解　点QはOP上なので k を実数とすると

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{9}k\vec{b}$ …③

点QはAB上なので AQ:QB = u:(1−u) とすると

$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OB}$

$=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$ ……④

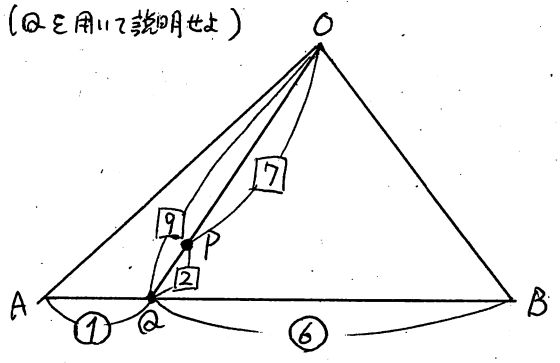
③,④で $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} \frac{2}{3}k=1-u \\ \frac{1}{9}k=u \end{cases}$$

これを解くと $k=\frac{7}{9}$, $u=\frac{1}{7}$

よって③より　$\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$ //

(3) 点 P は △OAB に対してどのような位置にあるか。（Qを用いて説明せよ）



(1)(2)より

辺ABを1:6に内分する点をQとすると

点PはOQを7:2に内分する点である //

ショートトライアル　ベクトル　9

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 5 : 3 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

(1) $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

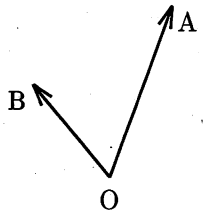
(2) $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(3) 3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

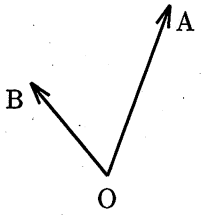
2　点 A(2, −1) を通り，$\vec{d}=(3,\ 4)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ。また，媒介変数を消去した式で表せ。

3　△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

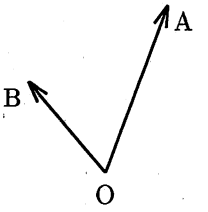
(1) $\dfrac{s}{2}+t=1$



(2) $4s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$



(3) $2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

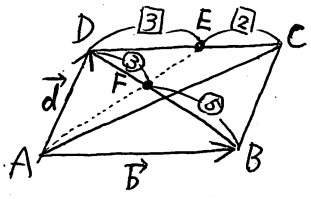


ショートトライアル　ベクトル　9

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 5 : 3 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{2+3}$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$=\dfrac{3}{5}(\vec{b}+\vec{d})+\dfrac{2}{5}\vec{d}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{d}}{5}$ //

[別解] $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{d}+\dfrac{3}{5}\vec{b}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{d}}{5}$ //

(2)　$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}}{5+3}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{d}}{8}$ //

(1)と(2)の point

A(a), B(b) を m : n に内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

(3)　3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

(proof)

(1)より　$5\overrightarrow{AE}=3\vec{b}+5\vec{d}$ として (2)に代入

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AE}$

よって A, F, E は一直線上にある ▨

point

A, B, C が一直線 ⇔ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k が存在

2　点 A(2, −1) を通り，$\vec{d}=(3,\ 4)$ に平行な直線を媒介変数表示せよ。また，媒介変数を消去した式で表せ。

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{cases}x=2+3t & \cdots\cdots ① \\ y=-1+4t & \cdots\cdots ②\end{cases}$ //

①×4　$4x=8+12t$

−)　②×3　$3y=-3+12t$

$4x-3y=11$

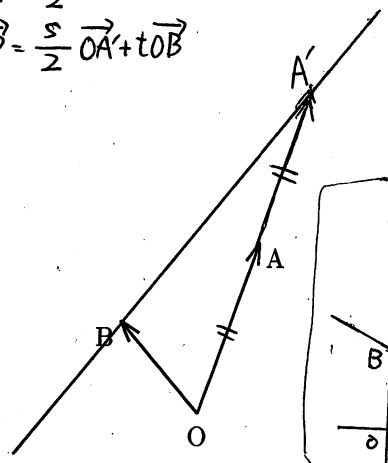
よって $4x-3y-11=0$ //

3　△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

(1)　$\dfrac{s}{2}+t=1$

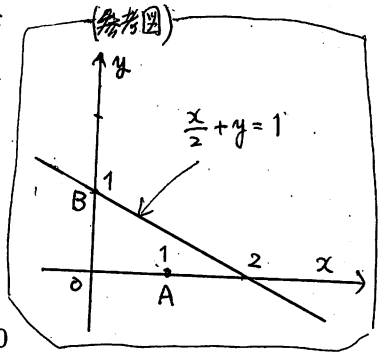
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{2}\times 2\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　で　$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{2}\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$



点 P は直線 A'B 上である

(参考図)



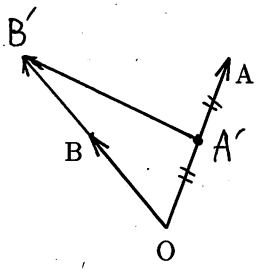
(2)　$4s+t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$2s+\dfrac{t}{2}=1$，$2s\geqq 0$，$\dfrac{t}{2}\geqq 0$

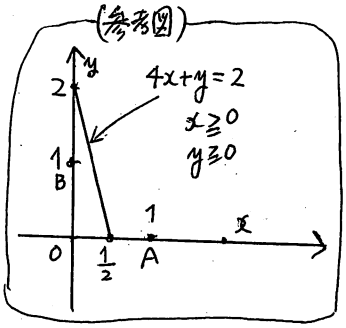
$\overrightarrow{OP}=2s\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{2}\times 2\overrightarrow{OB}$　で　$\overrightarrow{OA'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=2s\overrightarrow{OA'}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{OB'}$

点 P は線分 A'B' 上である



(参考図)

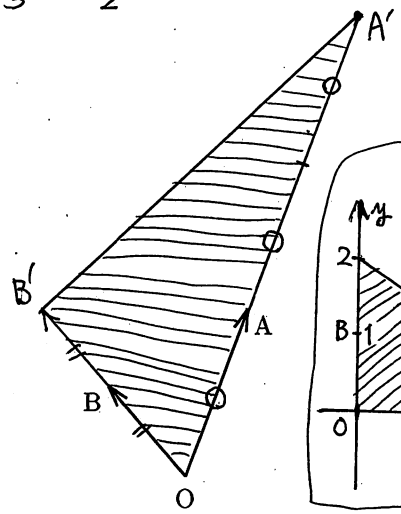


(3)　$2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

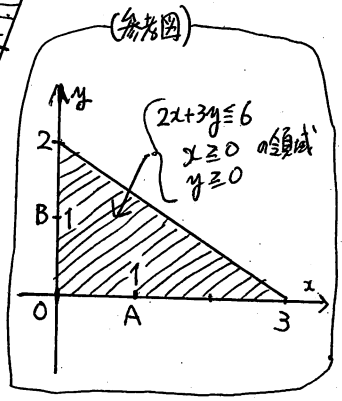
$0\leqq\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$，$\dfrac{s}{3}\geqq 0$，$\dfrac{t}{2}\geqq 0$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}\times 3\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{2}\times 2\overrightarrow{OB}$　で　$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{OA'}+\dfrac{t}{2}\overrightarrow{OB'}$　点 P は △OA'B' の周および内部の点



(参考図)

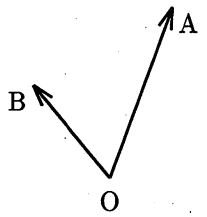


ショートトライアル　ベクトル　１０

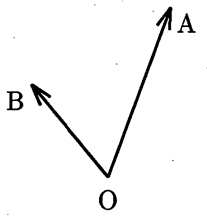
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　△OAB において，$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

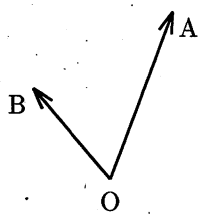
(1) $3s + 2t = 1$



(2) $2s + 4t = 3,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$



(3) $6s + 4t \leqq 3,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$



2　点 A$(-1,\ 4)$ を通り，$\vec{n} = (2,\ 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

3　$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1$ で $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

ショートトライアル　ベクトル　１０

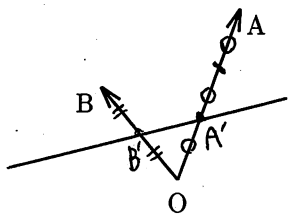
＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△OAB において，$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。
次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

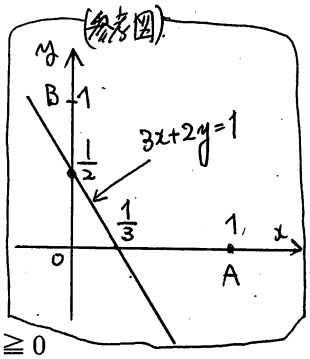
(1) $3s + 2t = 1$

$\overrightarrow{OP} = 3s \times \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + 2t \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ で $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{OP} = 3s\,\overrightarrow{OA'} + 2t\,\overrightarrow{OB'}$　点Pは直線A'B'上にある



(参考図)



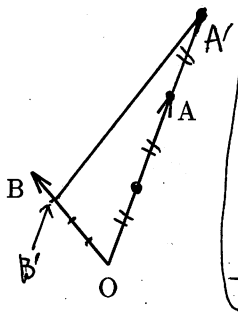
(2) $2s + 4t = 3,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

$\frac{2}{3}s + \frac{4}{3}t = 1,\ \frac{2}{3}s \geqq 0,\ \frac{4}{3}t \geqq 0$

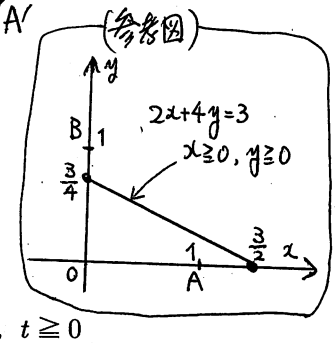
$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}s \times \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}t \times \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ で $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}s\,\overrightarrow{OA'} + \frac{4}{3}t\,\overrightarrow{OB'}$

点Pは線分AB上



(参考図)

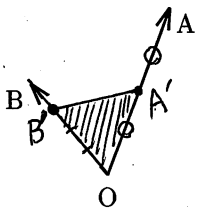


(3) $6s + 4t \leqq 3,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$

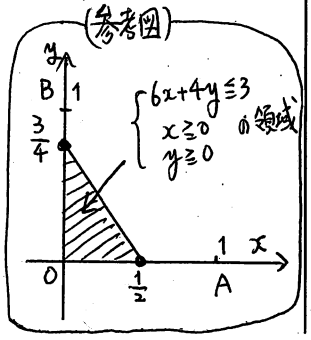
$0 \leqq 2s + \frac{4}{3}t \leqq 1,\ 2s \geqq 0,\ \frac{4}{3}t \geqq 0$

$\overrightarrow{OP} = 2s \times \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}t \times \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ で $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ とおくと

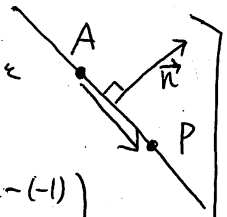
$\overrightarrow{OP} = 2s\,\overrightarrow{OA'} + \frac{4}{3}t\,\overrightarrow{OB'}$　点Pは△OA'B'の周および内部の点



(参考図)



2　点 A(−1, 4) を通り，$\vec{n} = (2, 3)$ に垂直な直線の方程式を求めよ。



考え方　求める直線上の点をP(x, y)とおくと
$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ より $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$ だから

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-4 \end{pmatrix}$
うしろひくまえ

$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ であるから

$2\{x-(-1)\} + 3(y-4) = 0$ ←(公式にあてはめた)

$2x + 2 + 3y - 12 = 0$

$2x + 3y - 10 = 0$ //

3　$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1$ で $\vec{a} + \vec{b}$ と $2\vec{a} - 5\vec{b}$ が垂直であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。　(内積バラバラ)

$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 5\vec{b})$ より $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$

すなわち　$2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{b}|^2 = 0$

$2 \times 2^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 5 \times 1^2 = 0$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ //

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より $\theta = 60°$ //

ショートトライアル　ベクトル　１１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　△ABC の内部の点 P について，等式 $2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を D とする。線分の長さの比 BD:DC と AP:PD をそれぞれ求めよ。

(3) 面積比 △PAB : △PBC : △PCA を求めよ。

2　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1) $|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$ をみたす △OAB

(2) A(3, 1)，B(2, −1)，C(−4, 6) を頂点とする △ABC

3　$\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直で大きさが 4 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

ショートトライアル　ベクトル　１１

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△ABC の内部の点 P について，等式 $2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$$2\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$ でもOK.

(2)　直線 AP と辺 BC の交点を D とする。線分の長さの比 BD:DC と AP:PD をそれぞれ求めよ。

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}=\frac{7}{9}\times\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$$

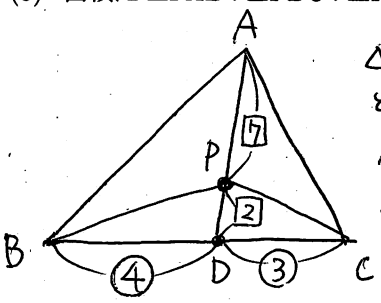
$\overrightarrow{AD}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{4+3}$ とおくと点DはBCを4:3に内分する点であり $\overrightarrow{AP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}$ なので

点PはADを7:2に内分する

以上より　BD:DC = 4:3

AP:PD = 7:2

(3)　面積比 △PAB : △PBC : △PCA を求めよ。



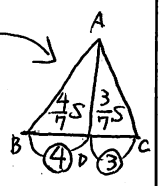
△ABCの面積をSとすると，まず

AP:PD = 7:2より

$\triangle PBC=\frac{2}{9}S$

また BD:DCより

$\triangle ABD=\frac{4}{7}S$，$\triangle ACD=\frac{3}{7}S$



AP:PD = 7:2より

$\triangle PAB=\frac{7}{9}\times\triangle ABD=\frac{7}{9}\times\frac{4}{7}S=\frac{4}{9}S$

$\triangle PCA=\frac{7}{9}\times\triangle ACD=\frac{7}{9}\times\frac{3}{9}S=\frac{3}{9}S$

よって $\triangle PAB:\triangle PBC:\triangle PCA=\frac{4}{9}S:\frac{2}{9}S:\frac{3}{9}S=4:2:3$

2　次の三角形の面積 S を求めよ。

(1)　$|\overrightarrow{OA}|=4$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$ をみたす △OAB

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2\times5^2-(-4)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2(25-1)}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{24}$$

$$=2\times2\sqrt{6}=4\sqrt{6}$$

(2)　A(3, 1)，B(2, −1)，C(−4, 6) を頂点とする △ABC

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\left|(-1)\times5-(-2)\times(-7)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\times|-19|=\frac{19}{2}$$

3　$\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直で大きさが 4 のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,y)$ とおくと $\vec{a}\perp\vec{b}$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ だから

$$x-\sqrt{3}y=0$$

$$x=\sqrt{3}y \cdots ①$$

また $|\vec{b}|=4$ より $x^2+y^2=16$ ……②

①を②に代入して $(\sqrt{3}y)^2+y^2=16 \Leftrightarrow 4y^2=16$

$\Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm2$

①に代入して $x=\pm2\sqrt{3}$

以上より $\vec{b}=(2\sqrt{3},\ 2),\ (-2\sqrt{3},\ -2)$

(別解)　$\vec{a}=(1,-\sqrt{3})$ と垂直なベクトルの1つは $(\sqrt{3},\ 1)$

このベクトルの大きさは $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ だから2倍すれば大きさ4である

向きが逆のベクトルも $\vec{a}$ と垂直になるから

$\vec{b}=(2\sqrt{3},\ 2),\ (-2\sqrt{3},\ -2)$

ショートトライアル　ベクトル　１２

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　△OAB において、辺 OA を 1 : 5 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(1) 面積比 △POA : △PQB を求めよ。

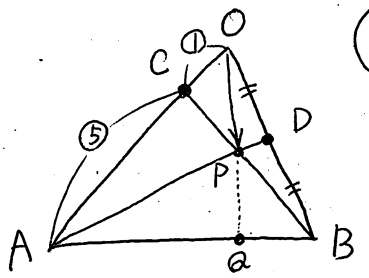
ショートトライアル　ベクトル　１２

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△OAB において、辺 OA を 1 : 5 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

St作戦



点PはAD上なので

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$

$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}$ ……①

点PはBC上なので

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(1-t)\vec{b}+\frac{1}{6}t\vec{a}$

$=\frac{1}{6}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ ……②

①②で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s=\frac{1}{6}t & \cdots③ \\ \frac{1}{2}s=1-t & \cdots④ \end{cases}$$

③，④を解くと　$s=\frac{10}{11}$，$t=\frac{6}{11}$

①より　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{11}\vec{a}+\frac{5}{11}\vec{b}$ //

(別解) メネラウスの定理より

$$\frac{OA\times CP\times BD}{AP\times PB\times DO}=1$$

$$\frac{6\times CP\times 1}{5\times PB\times 1}=1 \text{ より } \frac{PC}{BP}=\frac{5}{6}$$

よって BP : PC = 6 : 5 だから

$\overrightarrow{OP}=\frac{5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}}{6+5}$ ←（点Pは線分BC 6 : 5に内分）

$=\frac{5}{11}\overrightarrow{OB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{5}{11}\vec{b}+\frac{6}{11}\times\frac{1}{6}\vec{a}=\frac{1}{11}\vec{a}+\frac{5}{11}\vec{b}$ //

(2) OP の延長と線分 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+5\times\overrightarrow{OB}}{11}$

$=\frac{6}{11}\times\frac{1\times\overrightarrow{OA}+5\times\overrightarrow{OB}}{5+1}$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+5\times\overrightarrow{OB}}{5+1}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{11}\overrightarrow{OQ}$ となり

点Qは直線OP上で，辺ABを5 : 1に内分する点である。

よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$ //

(別解) チェバの定理より

$$\frac{OC\times AQ\times BD}{CA\times QB\times DO}=1$$

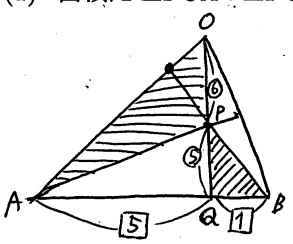
$$\frac{1\times AQ\times 1}{5\times QB\times 1}=1 \text{ より } \frac{AQ}{QB}=\frac{5}{1}$$

よって AQ : QB = 5 : 1 だから

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1\times\overrightarrow{OA}+5\times\overrightarrow{OB}}{5+1}$ ←（点Qは辺ABを5 : 1に内分）

$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$ //

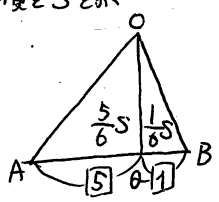
(1) 面積比 △POA : △PQB を求めよ。



$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{11}\overrightarrow{OQ}$ より

OP : PQ = 6 : 5

△OABの面積をSとおく



(2)より AQ : QB = 5 : 1 より

$\triangle OAQ=\frac{5}{6}S$，$\triangle OBQ=\frac{1}{6}S$

OP : PQ = 6 : 5 より

$\triangle POA=\frac{6}{11}\times\triangle OAQ=\frac{6}{11}\times\frac{5}{6}S=\frac{30}{66}S$

$\triangle PQB=\frac{5}{11}\times\triangle OBQ=\frac{5}{11}\times\frac{1}{6}S=\frac{5}{66}S$

よって

$\triangle POA : \triangle PQB=\frac{30}{66}S : \frac{5}{66}S=6:1$ //

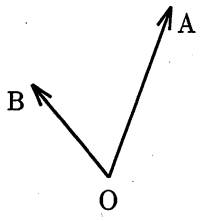
ショートトライアル　ベクトル　１５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

2　△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。

(1) s，t が不等式 $2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たすとき，点 P の存在範囲を図示せよ。



(2) △OAB の面積を 1 としたとき，(1) で図示した点 P の存在範囲の面積を求めよ。

3　△ABC の内部の点 P について，等式 $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AP と辺 BC の交点を D とする。線分の長さの比 BD:DC と AP:PD をそれぞれ求めよ。

(3) 面積比 △PCA : △PBD を求めよ。

ショートトライアル　ベクトル　１５

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ。

内積バラバラ

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$
$$=2^2+2t\times(-5)+t^2\times3^2$$
$$=9t^2-10t+4$$
$$=9\left(t^2-\frac{10}{9}t\right)+4$$
$$=9\left\{\left(t-\frac{5}{9}\right)^2-\frac{25}{81}\right\}+4$$
$$=9\left(t-\frac{5}{9}\right)^2-\frac{25}{9}+4$$
$$=9\left(t-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{11}{9}$$

（$t=\frac{5}{9}$ のとき $|\vec{OP}|^2=\frac{11}{9}$ より $|\vec{OP}|>0$ だから $|\vec{OP}|=\frac{\sqrt{11}}{3}$）

よって

$t=\frac{5}{9}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{11}}{3}$ //

2　△OAB において，$\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ とする。

(1) s，t が不等式 $2s+3t\leqq6$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たすとき，点 P の存在範囲を図示せよ。

$2s+3t\leqq6$ より　$0\leqq\frac{s}{3}+\frac{t}{2}\leqq1$，$\frac{s}{3}\geqq0$，$\frac{t}{2}\geqq0$.

$\vec{OP}=\frac{s}{3}\times3\vec{OA}+\frac{t}{2}\times2\vec{OB}$ で

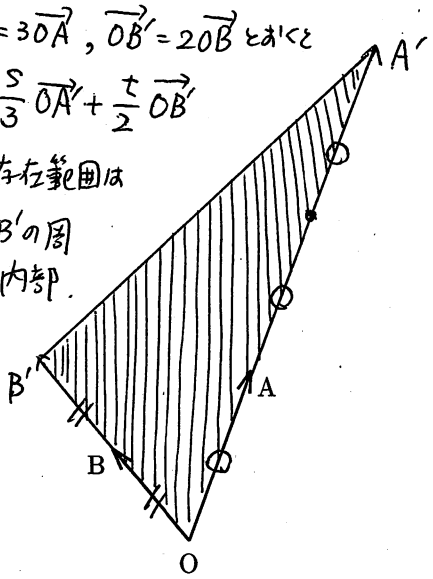
$\vec{OA'}=3\vec{OA}$，$\vec{OB'}=2\vec{OB}$ とおくと

$\vec{OP}=\frac{s}{3}\vec{OA'}+\frac{t}{2}\vec{OB'}$

点Pの存在範囲は

△OA'B'の周

および内部.



(2) △OAB の面積を 1 としたとき，(1) で図示した点 P の存在範囲の面積を求めよ。

求める面積を S とすると $S=3\times2=6$ //

理由は

$\triangle OAB=\frac{1}{2}ab\sin\angle AOB=1$ である.（$OA=a$，$OB=b$ とした）

$\triangle OA'B'=\frac{1}{2}\times3a\times2b\times\sin\angle AOB$ ←（よく使う考え方です）

$=3\times2\times\frac{1}{2}ab\sin\angle AOB=3\times2\times1=6$ //

3　△ABC の内部の点 P について，等式 $3\vec{PA}+\vec{PB}+2\vec{PC}=\vec{0}$ が成り立っている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{AP}$ を $\vec{AB}$，$\vec{AC}$ を用いて表せ。

$$3(-\vec{AP})+(\vec{AB}-\vec{AP})+2(\vec{AC}-\vec{AP})=\vec{0}$$
$$-3\vec{AP}+\vec{AB}-\vec{AP}+2\vec{AC}-2\vec{AP}=\vec{0}$$
$$\vec{AB}+2\vec{AC}=6\vec{AP}$$
$$\therefore\ \vec{AP}=\frac{\vec{AB}+2\vec{AC}}{6}$$ //

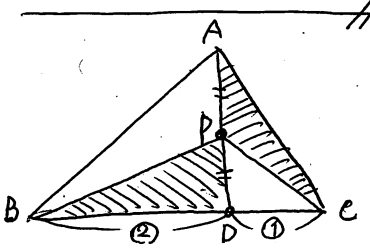
(2) 直線 AP と辺 BC の交点を D とする。線分の長さの比 BD:DC と AP:PD をそれぞれ求めよ。

$\vec{AP}=\frac{3}{6}\times\frac{1\times\vec{AB}+2\times\vec{AC}}{2+1}$ で

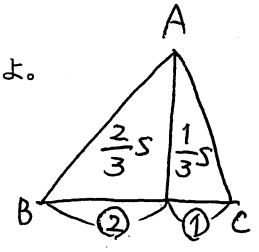
$\vec{AD}=\frac{1\times\vec{AB}+2\times\vec{AC}}{2+1}$ とおくと $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{AD}$

よって　BD:DC = 2:1

AP:PD = 1:1 //



(3) 面積比 △PCA : △PBD を求めよ。



△ABCの面積を S とおく.

BD:DC = 2:1 より

$\triangle ABD=\frac{2}{3}S$，$\triangle ACD=\frac{1}{3}S$

AP:PD = 1:1 より

$\triangle PCA=\frac{1}{2}\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}S=\frac{1}{6}S$

$\triangle PBD=\frac{1}{2}\triangle ABD=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}S=\frac{2}{6}S$

よって

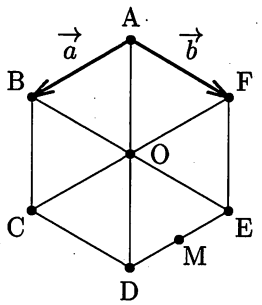
$\triangle PCA:\triangle PBD=\frac{1}{6}S:\frac{2}{6}S=1:2$ //

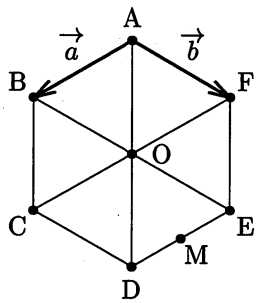
ショートトライアル　ベクトル　１６

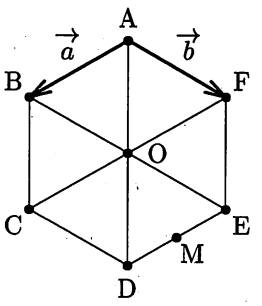
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

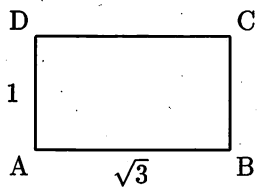
(1) $\overrightarrow{EA}$　　(2) $\overrightarrow{MO}$　　(3) $\overrightarrow{BM}$







2　下の図のような長方形 ABCD において，次の内積を求めよ。AB=$\sqrt{3}$，BC=1 である。



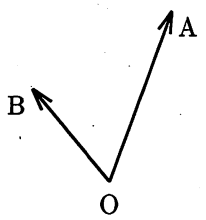
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

(2) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

3　△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

$6s+2t=3,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$



4　△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ である。$\angle AOB=\theta$ とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\theta$

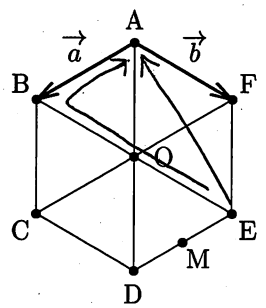
(2) △OAB の面積 S

ショートトライアル　ベクトル　１６

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　下の図の正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を M とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

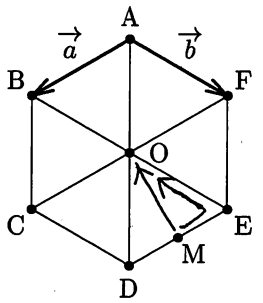
(1) $\overrightarrow{EA}$　　(2) $\overrightarrow{MO}$　　(3) $\overrightarrow{BM}$



(1) $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}$

$=-2\vec{b}+(-\vec{a})$

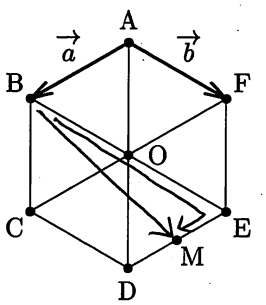
$=-\vec{a}-2\vec{b}$ //



(2) $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EO}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+(-\vec{b})$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ //

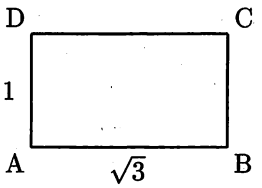


(3) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}$

$=2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$

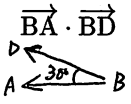
$=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$ //

2　下の図のような長方形 ABCD において，次の内積を求めよ。AB=$\sqrt{3}$，BC=1 である。



AC=BD=2

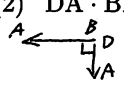
(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$



(与式)$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|\cos 30°$

$=\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$ //

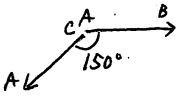
(2) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}$



(与式)$=|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BA}|\cos 90°$

$=1\times\sqrt{3}\times 0=0$ //

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$



(与式)$=|\overrightarrow{AB}||CA|\cos 150°$

$=\sqrt{3}\times 2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$ //

3　△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。次の式を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。

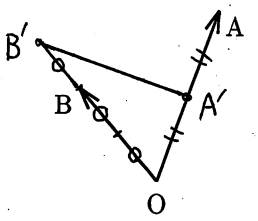
$6s+2t=3,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$

$2s+\frac{2}{3}t=1,\ 2s\geqq 0,\ \frac{2}{3}t\geqq 0$

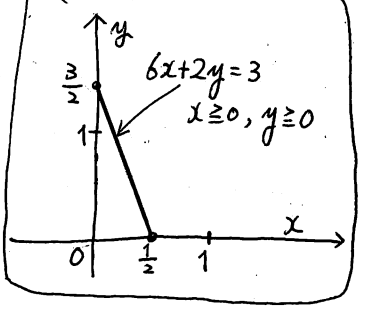
$\overrightarrow{OP}=2s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}t\times\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=2s\,\overrightarrow{OA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB'}$ となり，点Pは線分A'B'上.



(参考図)



4　△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ である。∠AOB $=\theta$ とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\cos\theta$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ の両辺2乗

$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4^2$　　内積バラバラ

$3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times 2^2=4^2$

$-4\vec{a}\cdot\vec{b}=-9$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9}{4}$

よって

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{9}{4}}{3\times 2}=\frac{3}{8}$ //

(2) △OAB の面積 S

$0°<\theta<180°$ より $\sin\theta>0$ だから

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8}$

$S=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{55}}{8}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$ //

(別解) $S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times 2^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{36\times 16-81}{16}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{9(64-9)}}{4}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$ //

ショートトライアル　ベクトル　１７

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　△OAB において、辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

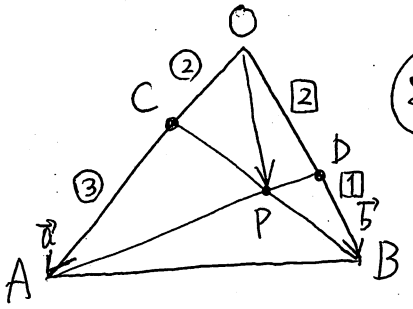
2　△ABC において，AB=9，BC=5，CA=6 とし，内心を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

ショートトライアル　ベクトル　１７

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　△OAB において、辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

St作戦



点PはAD上なので

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\vec{b} \cdots ①$$

点PはBC上なので

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$
$$=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{5}t\vec{a}$$
$$=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b} \cdots ②$$

①②で $\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-s=\frac{2}{5}t \\ \frac{2}{3}s=1-t \end{cases}$$ を解くと $$\begin{cases} s=\frac{9}{11} \\ t=\frac{5}{11} \end{cases}$$

①より $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b}$ //

別解　メネラウスの定理より

$$\frac{OA\times CP\times BD}{AC\times PB\times DO}=1$$

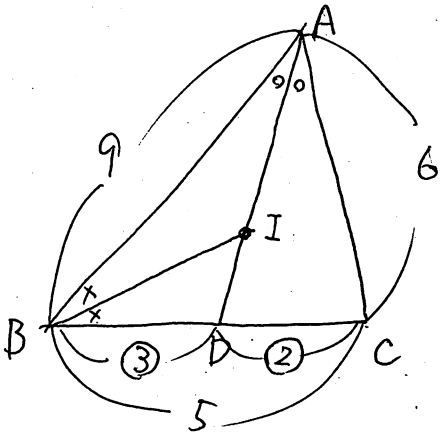
$$\frac{5\times PC\times 1}{3\times BP\times 2}=1 \text{ より } \frac{PC}{BP}=\frac{6}{5}$$

ゆえに BP : PC = 5 : 6

（点PはBCを 5 : 6 に内分）

$$\overrightarrow{OP}=\frac{6\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}}{5+6}=\frac{6}{11}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{11}\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{6}{11}\vec{b}+\frac{5}{11}\times\frac{2}{5}\vec{a}=\frac{2}{11}\vec{a}+\frac{6}{11}\vec{b}$$ //

2　△ABC において，AB=9，BC=5，CA=6 とし，内心を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。



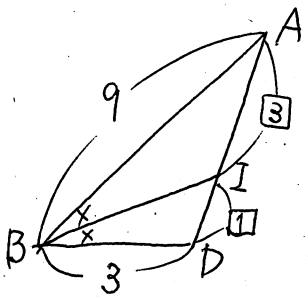
直線AIと辺BCの交点をDとおく

BD : DC = AB : AC = 9 : 6 = 3 : 2

であるから

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+2}$$
$$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$BD=\frac{3}{3+2}\times BC=\frac{3}{5}\times 5=3$$



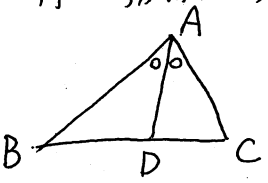
△ABDについて

AI : ID = BA : BD
= 9 : 3
= 3 : 1

であるから

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{20}\overrightarrow{AC}$$ //

point　角の二等分線の性質



AB : AC = BD : DC

$\boxed{3}$ $\angle A = 60°$，AB=3，AC=4 の △ABC において，垂心を H，重心を G，外心を O とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

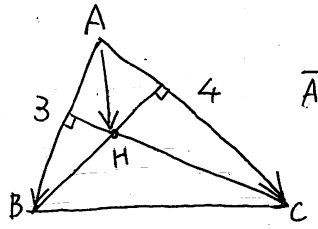
(3) 3 点 H，G，O は一直線上にあることを証明せよ。

3 $\angle A = 60^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$ の $\triangle ABC$ において、重心をH
重心をG，外心をOとする。このとき，次の問いに答えなさい。

テーマは「オイラー線」

(1) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
(2) $\overrightarrow{AO}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
(3) 3点H，G，Oは一直線上にあることを証明せよ。

(1)



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 4\times\cos 60^\circ$
$= 12\times\frac{1}{2} = 6$

$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とおく。（s, t は実数）

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AC}|^2 - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$s\times 6 + t\times 4^2 - 6 = 0$

$6s + 16t = 6$

$3s + 8t = 3$ ……①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$(s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$s\times 3^2 + t\times 6 - 6 = 0$

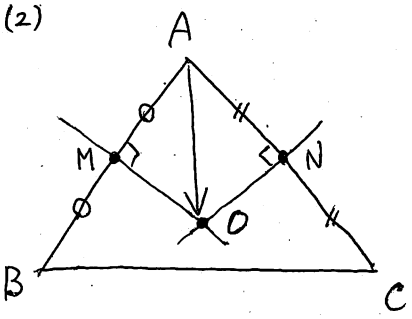
$9s + 6t = 6$

$3s + 2t = 2$ ……②

①，②を解くと $s = \frac{5}{9}$，$t = \frac{1}{6}$ だから

$\overrightarrow{AH} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ //

(2)



辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとおく

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ （x, y は実数）

$\overrightarrow{MO}\perp\overrightarrow{AB}$ より $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$x|\overrightarrow{AB}|^2 + y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 = 0$

$x\times 3^2 + y\times 6 - \frac{1}{2}\times 3^2 = 0$

$9x + 6y = \frac{9}{2}$

$6x + 4y = 3$ ……③

$\overrightarrow{NO}\perp\overrightarrow{AC}$ より $\overrightarrow{NO}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$

$x\times 6 + y\times 4^2 - \frac{1}{2}\times 4^2 = 0$

$6x + 16y = 8$

$3x + 8y = 4$ ……④

③，④を解くと $x = \frac{2}{9}$，$y = \frac{5}{12}$ だから

$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ //

(3) (proof)

$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{5}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}}{18}$ ……⑤

$\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}\right) - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

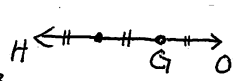
$= -\frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} = \frac{-4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{36} = \frac{-(4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})}{36}$ ……⑥

⑤より $4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 18\overrightarrow{GH}$ として⑥に代入すると

$\overrightarrow{GO} = \frac{-18\overrightarrow{GH}}{36} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

よって H，G，Oは一直線上にある ■

（(3)の結果を図示すると
右の図のように点Gは
線分HOを2:1に内分する
また三角形の垂心、重心、外心を通る直線を「オイラー線」という）



ショートトライアル　空間ベクトル　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ。

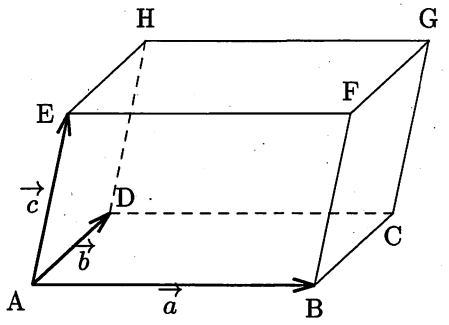
(1) zx 平面に関して対称な点

(2) x 軸に関して対称な点

(3) 原点に関して対称な点

2　下の図の平行六面体において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AG}$　　(2) $\overrightarrow{CF}$　　(3) $\overrightarrow{BH}$



3　次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a}=(-1,\ 0,\ 3)$

(2) $\vec{a}=(2,\ -2,\ 1)$

4　$\vec{a}=(2,\ -3,\ 4)$，$\vec{b}=(-1,\ 0,\ 5)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a}+\vec{b}$

(2) $6\vec{b}$

(3) $3\vec{a}-2\vec{b}$

5　A(−1, 0, 2)，B(2, 4, −3) について，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ。

(2) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(3) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　1

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　点 P(1, 2, 3) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) zx 平面に関して対称な点

$(1, -2, 3)$ //

(2) x 軸に関して対称な点

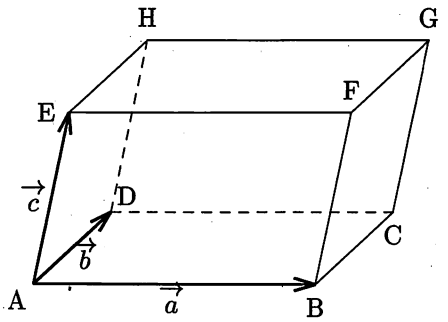
$(1, -2, -3)$ //

(3) 原点に関して対称な点

$(-1, -2, -3)$ //

2　下の図の平行六面体において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{AG}$　　(2) $\overrightarrow{CF}$　　(3) $\overrightarrow{BH}$



(1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ //

(2) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = (-\vec{b}) + \vec{c} = -\vec{b} + \vec{c}$ //

(3) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = (-\vec{a}) + \vec{b} + \vec{c}$

$= -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ //

3　次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\vec{a} = (-1, 0, 3)$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ //

(2) $\vec{a} = (2, -2, 1)$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ //

4　$\vec{a} = (2, -3, 4)$，$\vec{b} = (-1, 0, 5)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(与式) $= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$= (1, -3, 9)$ //

(2) $6\vec{b}$

(与式) $= 6\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$

$= (-6, 0, 30)$ //

(3) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

(与式) $= 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = (8, -9, 2)$ //

5　A(−1, 0, 2)，B(2, 4, −3) について，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{1\times(-1) + 2\times 2}{2+1}, \dfrac{1\times 0 + 2\times 4}{2+1}, \dfrac{1\times 2 + 2\times(-3)}{2+1} \right)$

よって $P\left(1, \dfrac{8}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$ //

(2) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{-1+2}{2}, \dfrac{0+4}{2}, \dfrac{2+(-3)}{2} \right)$

よって $M\left(\dfrac{1}{2}, 2, -\dfrac{1}{2}\right)$ //

(3) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= (3, 4, -5)$ //

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ //

ショートトライアル　空間ベクトル　2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　A(0, 3, 7)，B(3, −3, 1) について，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

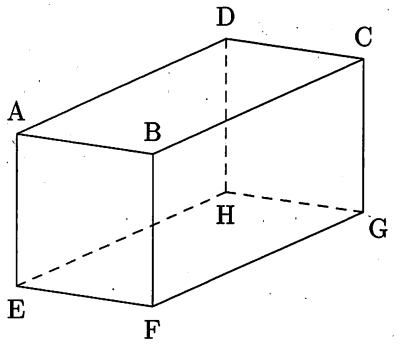
(2)　線分 AB を 4 : 3 に内分する点 P

(3)　線分 AB を 4 : 3 に外分する点 Q

2　2 点 A(2, 5, −3)，B(3, 6, 1) から等しい距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

3　2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -1,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ 3,\ -5)$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

4　図のような AB=AE=1，AD=$\sqrt{3}$ の直方体 ABCD-EFGH について，次の内積の値を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EG}$

(2)　$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$

(3)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{HF}$

(4)　$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}$

ショートトライアル　空間ベクトル　2

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　A(0, 3, 7)，B(3, −3, 1) について，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

$$\left(\frac{0+3}{2},\ \frac{3+(-3)}{2},\ \frac{7+1}{2}\right)$$

よって $M\left(\frac{3}{2}, 0, 4\right)$ //

(2)　線分 AB を 4 : 3 に内分する点 P

$$\left(\frac{3\times0+4\times3}{4+3},\ \frac{3\times3+4\times(-3)}{4+3},\ \frac{3\times7+4\times1}{4+3}\right)$$

よって $P\left(\frac{12}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{25}{7}\right)$ //

(3)　線分 AB を 4 : 3 に外分する点 Q

$$\left(\frac{-3\times0+4\times3}{4-3},\ \frac{-3\times3+4\times(-3)}{4-3},\ \frac{-3\times7+4\times1}{4-3}\right)$$

よって $Q(12, -21, -17)$ //

2　2 点 A(2, 5, −3)，B(3, 6, 1) から等しい距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

y 軸上の点 P を $P(0, y, 0)$ とおくと

$$AP = \sqrt{(0-2)^2+(y-5)^2+\{0-(-3)\}^2}$$
$$= \sqrt{4+y^2-10y+25+9}$$
$$= \sqrt{y^2-10y+38}$$

$$BP = \sqrt{(0-3)^2+(y-6)^2+(0-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+y^2-12y+36+1}$$
$$= \sqrt{y^2-12y+46}$$

$AP = BP$ より $AP^2 = BP^2$ だから

$$y^2-10y+38 = y^2-12y+46$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

よって $P(0, 4, 0)$ //

3　2 つのベクトル $\vec{a} = (2, -1, -2)$，$\vec{b} = (4, 3, -5)$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

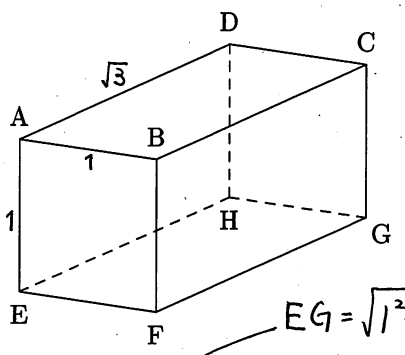
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-5\end{pmatrix} = 2\times4+(-1)\times3+(-2)\times(-5)$$
$$= 8-3+10 = 15$$ //

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = 3,\quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2+3^2+(-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{15}{3\times5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より　$\theta = 45°$ //

4　図のような AB=AE=1，AD=$\sqrt{3}$ の直方体 ABCD-EFGH について，次の内積の値を求めよ。



$$EG = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

(1)　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EG}$

(与式) $= |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{EG}|\cos30°$
$= \sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ //

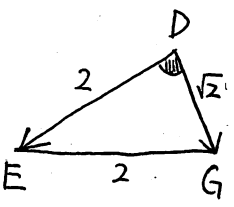
(2)　$\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{GC}$

(与式) $= |\overrightarrow{EH}||\overrightarrow{GC}|\cos90° = 0$ //

(3)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{HF}$

(与式) $= |\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{HF}|\cos120°$
$= 1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ //

(4)　$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}$



余弦定理より $\cos\angle EDG = \frac{2^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\times2\times\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

よって (与式) $= |\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DG}|\cos\angle EDG$
$= 2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$ //

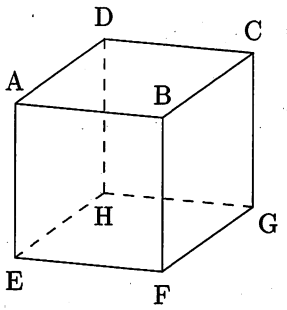
別解　$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GE}$ より両辺2乗

$$|\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DG}|^2 = |\overrightarrow{GE}|^2$$
$$|\overrightarrow{DE}|^2-2\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}+|\overrightarrow{DG}|^2 = |\overrightarrow{GE}|^2$$
$$2^2-2\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}+(\sqrt{2})^2 = 2^2$$
$$\therefore\ \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG} = 1$$ //

ショートトライアル　空間ベクトル　3

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　図のような1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHについて，次の内積の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HG}$

(2) $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GC}$

(4) $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}$

2　点P(2, 3, 1)に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) yz 平面に関して対称な点

(2) y 軸に関して対称な点

(3) 原点に関して対称な点

3　3点A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6)を頂点とする△ABCにおいて，次の問いに答えよ。

(1) ∠BACの大きさを求めよ。

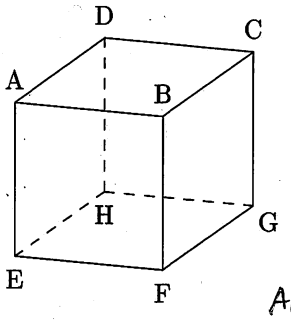
(2) △ABCの面積 S を求めよ。

4　座標平面上に平行四辺形ABCDがあり，A(1, 2, 1)，B(5, 5, −1)，D(−4, 2, 3)であるとする。頂点Cの座標を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　3

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　図のような1辺の長さが2の立方体ABCD-EFGHについて，次の内積の値を求めよ。



$AF=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

(1) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HG}$

(与式) $=|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{HG}|\cos 45^\circ$

$=2\sqrt{2}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\underline{4}$ //

(2) $\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{BC}$

(与式) $=|\overrightarrow{HF}||\overrightarrow{BC}|\cos 135^\circ$

$=2\sqrt{2}\times 2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{-4}$ //

(3) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GC}$

(与式) $=|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{GC}|\cos 90^\circ=\underline{0}$ //

(4) $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}$　　△AFCは AF=FC=CA=$2\sqrt{2}$ の正三角形

(与式) $=|\overrightarrow{FA}||\overrightarrow{FC}|\cos 60^\circ$

$=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\underline{4}$ //

2　点P(2, 3, 1)に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) yz 平面に関して対称な点

$\underline{(-2,\ 3,\ 1)}$ //

(2) y 軸に関して対称な点

$\underline{(-2,\ 3,\ -1)}$ //

(3) 原点に関して対称な点

$\underline{(-2,\ -3,\ -1)}$ //

3　3点A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6)を頂点とする△ABCにおいて，次の問いに答えよ。

(1) ∠BACの大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}=1\times(-2)+2\times 2+1\times 4=6$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=2\sqrt{6}$

$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$

$0^\circ<\angle BAC<180^\circ$ より $\underline{\angle BAC=60^\circ}$ //

(2) △ABCの面積 S を求めよ。

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{3\sqrt{3}}$ //

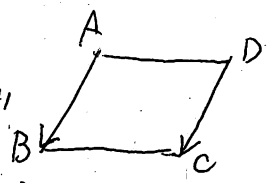
(別解) ↓こちらの公式の方が万能なので覚えてほしい。

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{6})^2(2\sqrt{6})^2-6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6^2(2^2-1)}$

$=\underline{3\sqrt{3}}$ //

4　座標平面上に平行四辺形ABCDがあり，A(1, 2, 1)，B(5, 5, −1)，D(−4, 2, 3)であるとする。頂点Cの座標を求めよ。



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ をみたせばよい

C(x, y, z) とすると

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\5\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ すなわち $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$

$\begin{cases}x+4=4\\y-2=3\\z-3=-2\end{cases}$ を解くと $\begin{cases}x=0\\y=5\\z=1\end{cases}$

よって $\underline{C(0,\ 5,\ 1)}$ //

ショートトライアル　空間ベクトル　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　2つのベクトル $\vec{a}=(0,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 0,\ 4)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$\boxed{2}$　3点 A(3, 2, 1)，B(2, 0, −2)，C(1, 1, 0) の定める平面 ABC 上に点 P(2, 3, z) があるとき，z の値を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　4

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　2つのベクトル $\vec{a}=(0,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 0,\ 4)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく

$|\vec{e}|=1$ だから $x^2+y^2+z^2=1$ ……①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=0$ だから

$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ すなわち $0\times x+1\times y+2\times z=0$

$\therefore y=-2z$ ……②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=0$ だから

$\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ すなわち $-2\times x+0\times y+4\times z=0$

$\therefore x=2z$ ……③

②，③を①に代入して

$(2z)^2+(-2z)^2+z^2=1$

$z^2=\frac{1}{9}$　　$\therefore z=\pm\frac{1}{3}$

$z=\frac{1}{3}$ のとき②，③より

$x=\frac{2}{3}$，$y=-\frac{2}{3}$

$z=-\frac{1}{3}$ のとき②，③より

$x=-\frac{2}{3}$，$y=\frac{2}{3}$

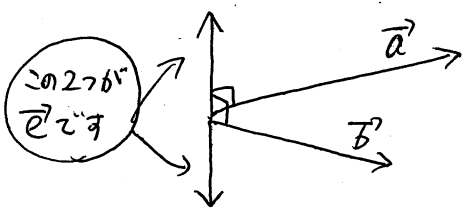
以上より

$\vec{e}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ //

$\vec{e}=\left(\pm\frac{2}{3},\mp\frac{2}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$（複号同順）//

これでもOKです

参考図



「垂直 ⇔ 内積ゼロ」
からの連立方程式です。

2　3点 A(3, 2, 1)，B(2, 0, −2)，C(1, 1, 0) の定める平面 ABC 上に点 P(2, 3, z) があるとき，z の値を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\3\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\z-1\end{pmatrix}$

点Pは平面ABC上にあるから

$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ をみたす実数 s，t が存在する

$\begin{pmatrix}-1\\1\\z-1\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}-1=-s-2t & \cdots\cdots① \\ 1=-2s-t & \cdots\cdots② \\ z-1=-3s-t & \cdots③\end{cases}$

①，②を解くと $s=-1$，$t=1$ だから

③より $z-1=-3\times(-1)-1$

$\therefore z=3$ //

点Pは平面ABC上にある条件は

① $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

② $\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{BC}$

③ $\overrightarrow{CP}=s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$

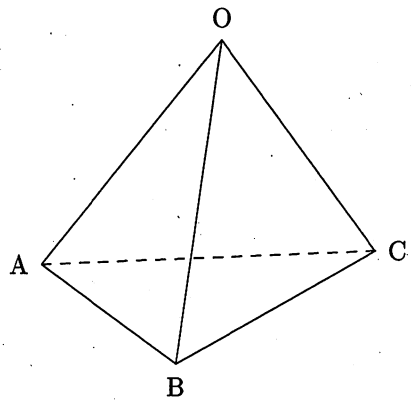
①〜③のどれか1つを使えばよい

ショートトライアル　空間ベクトル　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　$\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ と実数 t に対して，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$\vec{b}\perp\vec{p}$ となるような t の値を求めよ。また，このときの $|\vec{p}|$ を求めよ。

2　四面体 OABC について，辺 AB の中点を M，辺 OC を 1 : 2 に内分する点を D，線分 MD を 3 : 1 に内分する点を P とする。次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) 直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

ショートトライアル　空間ベクトル　5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　$\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ と実数 t に対して，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$\vec{b}\perp\vec{p}$ となるような t の値を求めよ。また，このときの $|\vec{p}|$ を求めよ。

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\3-2t\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$ だから

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+t\\3-2t\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$1\times(1+t)+(-2)\times(3-2t)+0\times(-2)=0$$

$$1+t-6+4t+0=0$$

$$5t=5$$

$$t=1$$

このとき $\vec{p}=\begin{pmatrix}1+1\\3-2\times1\\-2\end{pmatrix}=(2,\ 1,\ -2)$

よって $|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

以上より　$t=1$，$|\vec{p}|=3$ //

（**2** のポイント）点Pが平面ABC上にある条件

① $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ をみたす実数 s，t が存在

② $\overrightarrow{OP}=$ ◍$\overrightarrow{OA}+$ ▨$\overrightarrow{OB}+$ ◬$\overrightarrow{OC}$ で

◍＋▨＋◬＝1（たして1）

四面体では②を使う方が良いのだが①と②は同じ式ということは知っておいてほしい↓

① $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（で始点をすべてOに）

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}-s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}-t\overrightarrow{OA}$

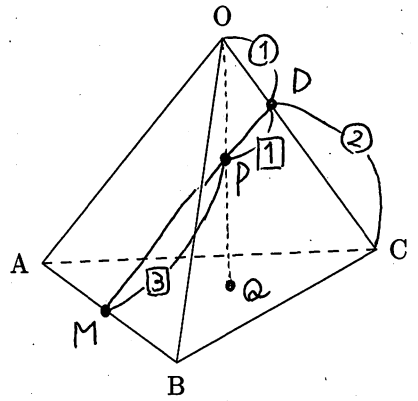
$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

ここで　$1-s-t=u$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ となり

$u+s+t=1$ である。これは②である

2　四面体OABCについて，辺ABの中点をM，辺OCを1：2に内分する点をD，線分MDを3：1に内分する点をPとする。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$ //

(2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}\vec{c}$$ //

(3) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1\times\overrightarrow{OM}+3\times\overrightarrow{OD}}{3+1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$ //

(4) 直線OPと平面ABCの交点をQとする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

点QはOP上なので　k を実数とすると

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{8}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{OC}\cdots①$$

床ドン

点Qは平面ABC上なので

$\frac{1}{8}k+\frac{1}{8}k+\frac{1}{4}k=1$ を解いて $k=2$

これを①に代入すると

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$ //

（$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$ より点Pは線分OQの中点）

ショートトライアル　空間ベクトル　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　四面体 OABC について，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 DE の中点を P とする。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(4)　OP:PQ を求めよ。

(5)　直線 CP と平面 OAB の交点を R とする。$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(6)　CP:PR を求めよ。

2　3 点 A(1, 2, 0)，B(−1, 0, 3)，C(0, 4, 2) を頂点とする △ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　6

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

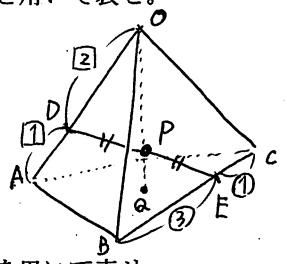
1　四面体 OABC について，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を D，辺 BC を 3 : 1 に内分する点を E，線分 DE の中点を P とする。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1\times\overrightarrow{OB}+3\times\overrightarrow{OC}}{3+1}$$

$$=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$$

$$\left(\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{a}\right)$$



(2)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}$$

(3)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

これは床ドン

点Qは OP 上なので　k を実数とすると

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}k\overrightarrow{OB}+\frac{3}{8}k\overrightarrow{OC}\cdots\cdots①$$

点Qは平面ABC上なので

$\frac{1}{3}k+\frac{1}{8}k+\frac{3}{8}k=1$　を解くと　$k=\frac{6}{5}$

これを①に代入して

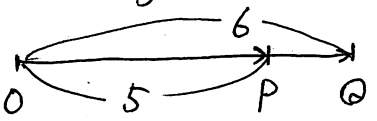
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\times\frac{6}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{8}\times\frac{6}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{20}\vec{b}+\frac{9}{20}\vec{c}$$

(4)　OP:PQ を求めよ。

(3)より　$\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{5}\overrightarrow{OP}$ だから

（図をかくと間違えない）



$OP:PQ=5:1$

(5)　直線 CP と平面 OAB の交点を R とする。$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

これが壁ドン

点Rは CP 上なので　t を実数とすると

$$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OP}\cdots\cdots②$$

$$=(1-t)\vec{c}+t\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}+\frac{3}{8}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}t\vec{a}+\frac{1}{8}t\vec{b}+\left(1-t+\frac{3}{8}t\right)\vec{c}$$

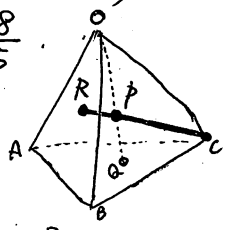
$$=\frac{1}{3}t\vec{a}+\frac{1}{8}t\vec{b}+\left(1-\frac{5}{8}t\right)\vec{c}\cdots③$$

点Rは平面OAB上なので（$\vec{c}$ の係数はゼロ）

$1-\frac{5}{8}t=0$　を解いて　$t=\frac{8}{5}$

これを③に代入して

$$\overrightarrow{OR}=\frac{8}{15}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$$



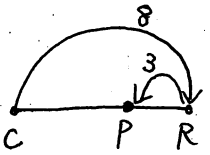
(6)　CP:PR を求めよ。

②に $t=\frac{8}{5}$ 代入すると　$\overrightarrow{OR}=\left(1-\frac{8}{5}\right)\overrightarrow{OC}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OP}$

$$=\frac{-3}{5}\overrightarrow{OC}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{-3\overrightarrow{OC}+8\overrightarrow{OP}}{5}$$

$$=\frac{-3\overrightarrow{OC}+8\overrightarrow{OP}}{8-3}$$



点Rは CP を 8 : 3 に外分するので　$CP:PR=5:3$

2　3 点 A(1, 2, 0)，B(−1, 0, 3)，C(0, 4, 2) を頂点とする △ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$=(-2)\times(-1)+(-2)\times2+3\times2=4$$

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

空間ベクトルで万能な三角形の面積公式覚えるしかありません

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{17})^2\times3^2-4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{17\times9-16}$$

$$=\frac{\sqrt{137}}{2}$$

ショートトライアル　空間ベクトル　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 四面体 OABC について，辺 BC の中点を D，辺 OA を 1 : 3 に内分する点を E，線分 DE を 2 : 1 に内分する点を P とする。次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) OP:PQ を求めよ。

(4) 直線 AP と平面 OBC の交点を R とする。
$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(5) AP:PR を求めよ。

(6) 辺 OB を 2 : 1 に内分する点を F，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を G とする。直線 OP と平面 EFG の交点を S とする。$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

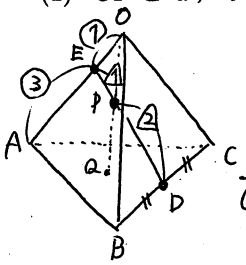
(7) OS:SP を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　7

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　四面体 OABC について，辺 BC の中点を D，辺 OA を 1 : 3 に内分する点を E，線分 DE を 2 : 1 に内分する点を P とする。次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1\times\overrightarrow{OD}+2\times\overrightarrow{OE}}{2+1}$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OE}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\vec{a}$

$=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$ //

(2)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　床ドン

点Qは OP 上なので　k を実数とすると

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{6}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}k\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$ ……①

点Qは平面ABC上なので

$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{6}k=1$

$\dfrac{3}{6}k=1$

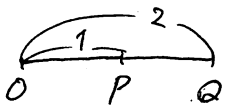
$k=2$

これを①に代入して

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ //

(3)　OP:PQ を求めよ。

(2)より　$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}$ だから



図より

OP : PQ = 1 : 1 //

(4)　直線 AP と平面 OBC の交点を R とする。
$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　壁ドン

点Rは AP 上なので　t を実数として

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{1}{6}t\vec{a}+\dfrac{1}{6}t\vec{b}+\dfrac{1}{6}t\vec{c}$

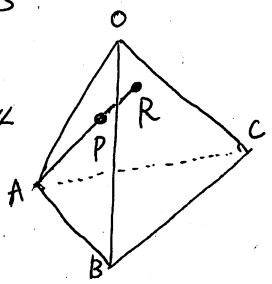
$=\left(1-\dfrac{5}{6}t\right)\vec{a}+\dfrac{1}{6}t\vec{b}+\dfrac{1}{6}t\vec{c}$ ……②

点Rは平面OBC上なので（$\vec{a}$の係数はゼロ）

$1-\dfrac{5}{6}t=0$ より　$t=\dfrac{6}{5}$

これを②に代入して

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$ //

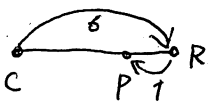


(5)　AP:PR を求めよ。

(4)より　$\overrightarrow{OR}=\left(1-\dfrac{6}{5}\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{6}{5}\overrightarrow{OP}$

$=\dfrac{(-1)\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OP}}{5}=\dfrac{(-1)\overrightarrow{OA}+6\overrightarrow{OP}}{6-1}$

よって点RはAPを 6 : 1 に外分する



図より

AP : PR = 5 : 1 //

(6)　辺 OB を 2 : 1 に内分する点を F，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を G とする。直線 OP と平面 EFG の交点を S とする。$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\vec{c}$ ……③

点Sは OP 上なので　s を実数とすると

$\overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{6}s\vec{a}+\dfrac{1}{6}s\vec{b}+\dfrac{1}{6}s\vec{c}$ ……④

$=\dfrac{1}{6}s\times4\times\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}s\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{6}s\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\vec{c}$ ←③代入

$=\dfrac{2}{3}s\overrightarrow{OE}+\dfrac{1}{4}s\overrightarrow{OF}+\dfrac{1}{4}s\overrightarrow{OG}$

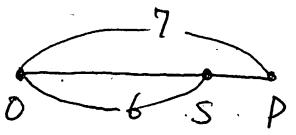
点Sは平面EFG上なので　無理矢理たして1

$\dfrac{2}{3}s+\dfrac{1}{4}s+\dfrac{1}{4}s=1$　を解くと　$s=\dfrac{6}{7}$

これを④に代入して　$\overrightarrow{OS}=\dfrac{1}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$ //

(7)　OS:SP を求めよ。

(6)より　$\overrightarrow{OS}=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{OP}$



図より

OS : SP = 6 : 1 //

ショートトライアル　空間ベクトル　8

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　点 (2, 4, 5) を通り、次のような平面の方程式を求めよ。

(1) yz 平面に平行

(2) y 軸に垂直

(3) zx 平面に平行

2　点 P(3, 2, 1) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) xy 平面に関して対称な点

(2) x 軸に関して対称な点

(3) 平面 $x = 1$ に関して対称な点

3　次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 A(1, 0, −3) を中心とし，点 B(2, −2, −1) を通る球面

(2) 2 点 A(−6, 1, 2)，B(0, 3, −2) を直径の両端とする球面

4　四面体 OABC について，辺 OA の中点を D，辺 BC の中点を E，線分 DE を 1 : 2 に内分する点を P とする。次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 辺 OA，OB，OC をそれぞれ 3 : 1 に内分する点を L，M，N とする。直線 BP と平面 LMN の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

ショートトライアル　空間ベクトル　8

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　点 (2, 4, 5) を通り、次のような平面の方程式を求めよ。

(1) yz 平面に平行

$x=2$ //

(2) y 軸に垂直

$y=4$ //

(3) zx 平面に平行

$y=4$ //

2　点 P(3, 2, 1) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) xy 平面に関して対称な点

$(3,\ 2,\ -1)$ //

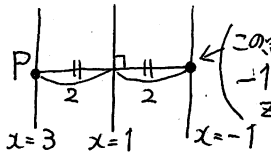
(2) x 軸に関して対称な点

$(3,\ -2,\ -1)$ //

(3) 平面 $x=1$ に関して対称な点

$(-1,\ 2,\ 1)$ //

考え方



この点のx座標は−1であり、y座標、z座標はPと同じ

3　次のような球面の方程式を求めよ。

(1) 点 A(1, 0, −3) を中心とし，点 B(2, −2, −1) を通る球面

半径 $=AB=\sqrt{(2-1)^2+(-2-0)^2+\{(-1)-(-3)\}^2}$

$=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

よって

$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=9$ //

(2) 2 点 A(−6, 1, 2)，B(0, 3, −2) を直径の両端とする球面

ABの中点が中心となる。中心をOとおくと

$O\left(\frac{-6+0}{2},\ \frac{1+3}{2},\ \frac{2+(-2)}{2}\right)=O(-3,2,0)$

半径 $=OA=\sqrt{\{-6-(-3)\}^2+(1-2)^2+(2-0)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14}$

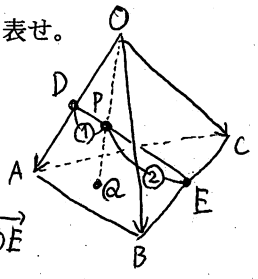
よって

$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=14$ //

4　四面体 OABC について，辺 OA の中点を D，辺 BC の中点を E，線分 DE を 1 : 2 に内分する点を P とする。次の問いに答えよ。

ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OD}+1\times\overrightarrow{OE}}{1+2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$ //

(2) 直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

床ドン

Qは OP上なので　kを実数とすると

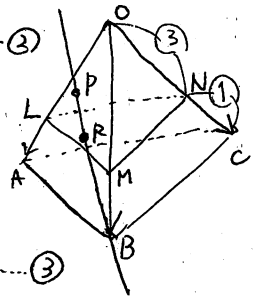
$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$ ……①

Qは平面ABC上なので

$\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k+\frac{1}{6}k=1$ を解いて $k=\frac{3}{2}$

①より $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ //

(3) 辺 OA，OB，OC をそれぞれ 3 : 1 に内分する点を L，M，N とする。直線 BP と平面 LMN の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{OL}=\frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{4}\vec{c}$ ……②

RはBP上なので

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OP}$

$=(1-t)\vec{b}+\frac{1}{3}t\vec{a}+\frac{1}{6}t\vec{b}+\frac{1}{6}t\vec{c}$

$=\frac{1}{3}t\vec{a}+\left(1-\frac{5}{6}t\right)\vec{b}+\frac{1}{6}t\vec{c}$ ……③

$=\frac{1}{3}t\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\vec{a}+\left(1-\frac{5}{6}t\right)\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}t\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\vec{c}$ ←②代入

$=\frac{4}{9}t\overrightarrow{OL}+\left(\frac{4}{3}-\frac{10}{9}t\right)\overrightarrow{OM}+\frac{2}{9}t\overrightarrow{ON}$

無理矢理たして1

Rは平面LMN上なので

$\frac{4}{9}t+\left(\frac{4}{3}-\frac{10}{9}t\right)+\frac{2}{9}t=1$ を解くと $t=\frac{3}{4}$

③より $\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$ //

ショートトライアル　空間ベクトル　9

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心と半径を求めよ。

2　3 点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　∠BAC の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

3　四面体 OABC について，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 CA を 4 : 1 に内分する点を E，線分 DE の中点を P とする。次の問いに答えよ。
ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。
$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　直線 BP と平面 OCA の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

ショートトライアル　空間ベクトル　9

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　球面 $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5^2$ と xy 平面が交わる部分は円である。その円の中心と半径を求めよ。

xy平面は $z=0$．これを代入して

$(x-4)^2+(y+2)^2+(0-3)^2=25$

$(x-4)^2+(y+2)^2=16$

よって　円の中心は $(4,-2,0)$ 半径 4 //

2　3 点 A(1, 3, 2)，B(2, 5, 3)，C(−1, 5, 6) を頂点とする △ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　∠BAC の大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ より $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}=-2+4+4=6$

$\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\angle BAC<180^\circ$ より　$\angle BAC=60^\circ$ //

(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{6})^2\times(2\sqrt{6})^2-6^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{6^2(4-1)}=\dfrac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ //

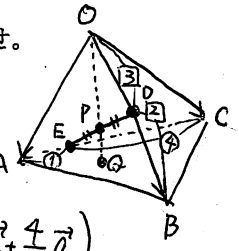
別解

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ //

3　四面体 OABC について，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 CA を 4 : 1 に内分する点を E，線分 DE の中点を P とする。次の問いに答えよ。

ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1\times\overrightarrow{OC}+4\times\overrightarrow{OA}}{4+1}=\dfrac{1}{5}\vec{c}+\dfrac{4}{5}\vec{a}$

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}+\dfrac{4}{5}\vec{a}\right)$

$=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{10}\vec{b}+\dfrac{1}{10}\vec{c}$ //

(2)　直線 OP と平面 ABC の交点を Q とする。

$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

床ドン

Qは OP上なので

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{5}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{10}k\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{10}k\overrightarrow{OC}$ …①

Qは平面ABC上なので

$\dfrac{2}{5}k+\dfrac{3}{10}k+\dfrac{1}{10}k=1$　を解いて $k=\dfrac{5}{4}$

①より $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{1}{8}\vec{c}$ //

(3)　直線 BP と平面 OCA の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

壁ドン

Rは BP上なので

$\overrightarrow{OR}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OP}$

$=(1-t)\vec{b}+\dfrac{2}{5}t\vec{a}+\dfrac{3}{10}t\vec{b}+\dfrac{1}{10}t\vec{c}$

$=\dfrac{2}{5}t\vec{a}+\left(1-\dfrac{7}{10}t\right)\vec{b}+\dfrac{1}{10}t\vec{c}$ …①

Rは平面OCA上なので（$\vec{b}$の係数はゼロ）

$1-\dfrac{7}{10}t=0$ より $t=\dfrac{10}{7}$

①より $\overrightarrow{OR}=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$ //

ショートトライアル　空間ベクトル　１１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　四面体 OABC について，辺 OA の中点を D，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 DQ の中点を R とする。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) OR:RP を求めよ。

(4) 直線 AR と平面 OBC の交点を S とする。$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(5) AR:RS を求めよ。

(6) 辺 OA，OB を 1 : 2 に内分する点を L，M，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を N とする。直線 OR と平面 LMN の交点を T とする。$\overrightarrow{OT}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

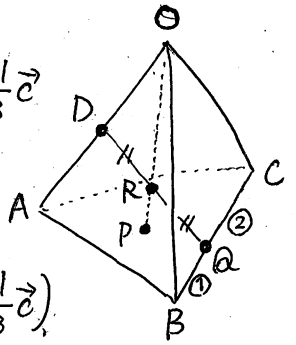
(7) OT:TR を求めよ。

ショートトライアル　空間ベクトル　１１

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　四面体 OABC について，辺 OA の中点を D，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q，線分 DQ の中点を R とする。次の問いに答えよ。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\overrightarrow{OB}+1\times\overrightarrow{OC}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OR}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OQ}}{2}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$ //

(2)　直線 OR と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　床ドン

点PはOR上なので

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$ ……①

点Pは平面ABC上なので

$\frac{1}{4}k+\frac{1}{3}k+\frac{1}{6}k=1$ を解いて $k=\frac{4}{3}$

①に代入して

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$ //

別解　$\overrightarrow{OR}=\frac{3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{12}$

$=\frac{9}{12}\times\frac{3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3+4+2}$

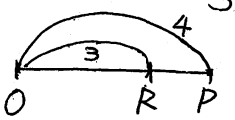
$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}}{3+4+2}$ とおくと $\frac{3}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=1$ より

点Pは平面ABC上であり $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OP}$ だから

点PはOR上．よって $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$ //

(3)　OR:RP を求めよ。

(2)より $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OR}$ だから



OR:RP = 3:1 //

(4)　直線 AR と平面 OBC の交点を S とする。$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　壁ドン

点SはAR上なので

$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OR}$ ……②

$=(1-t)\vec{a}+t\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{a}+\frac{1}{3}t\vec{b}+\frac{1}{6}t\vec{c}$

$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\frac{1}{3}t\vec{b}+\frac{1}{6}t\vec{c}$ ……③

点Sは平面OBC上なので（$\vec{a}$ の係数はゼロ）

$1-\frac{3}{4}t=0$ を解くと $t=\frac{4}{3}$

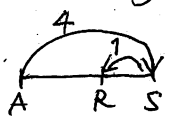
③に代入して　$\overrightarrow{OS}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$ //

(5)　AR:RS を求めよ。

②に $t=\frac{4}{3}$ 代入．$\overrightarrow{OS}=\left(1-\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OR}$

$=\frac{(-1)\cdot\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OR}}{3}$

$=\frac{(-1)\cdot\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OR}}{4-1}$



点SはARを4:1に外分するので　AR:RS = 3:1 //

(6)　辺 OA，OB を 1 : 2 に内分する点を L，M，辺 OC を 2 : 1 に内分する点を N とする。直線 OR と平面 LMN の交点を T とする。$\overrightarrow{OT}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　無理矢理たして1

$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\vec{c}$ …④

点TはOR上なので

$\overrightarrow{OT}=s\overrightarrow{OR}=s\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{4}s\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}+\frac{1}{6}s\vec{c}$ ……⑤

$=\frac{1}{4}s\times3\times\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}s\times3\times\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}s\times\frac{3}{2}s\times\frac{2}{3}\vec{c}$

$=\frac{3}{4}s\overrightarrow{OL}+s\overrightarrow{OM}+\frac{1}{4}s\overrightarrow{ON}$

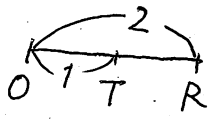
点Tは平面LMN上なので．

$\frac{3}{4}s+s+\frac{1}{4}s=1$ を解くと $s=\frac{1}{2}$

⑤に代入して　$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$ //

(7)　OT:TR を求めよ。

$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$ より　OT:TR = 1:1 //



2年数学　床ドン・壁ドン・無理矢理たして１　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　四面体 OABC において，辺 OB をの中点を D，辺 CA を 2:1 に内分するを E，線分 DE の中点 F とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OD}=$
$\overrightarrow{OE}=$
$\overrightarrow{OF}=$

(2) 直線 OF と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，OF : FP を求めよ。

$\overrightarrow{OP}=$
OF : FP =

(3) 直線 AF と平面 OBC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，AF : FQ を求めよ。

$\overrightarrow{OQ}$ =
AF : FQ =

(4) 辺 OA を 2:1 に内分する点を G とし，直線 OF と平面 GDC の交点を R とする。
$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

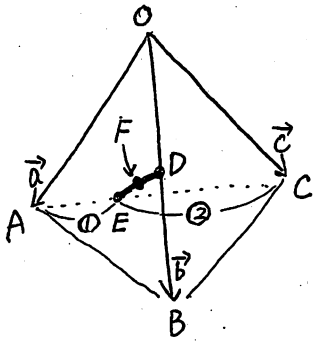
$\overrightarrow{OR}$ =

2年数学　床ドン・壁ドン・無理矢理たして１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　四面体 OABC において，辺 OB をの中点を D，辺 CA を 2:1 に内分するを E，線分 DE の中点 F とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{OE}=\frac{1\times\overrightarrow{OC}+2\times\overrightarrow{OA}}{2+1}=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\right\}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

(2) 直線 OF と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，OF : FP を求めよ。

Pは OF上だから

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OF}=k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}\cdots①$$

Pは平面ABC上にあるから

$$\frac{1}{3}k+\frac{1}{4}k+\frac{1}{6}k=1$$
$$k=\frac{4}{3}$$

これを①に代入して $\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OF}$ より　OP : OF = 4 : 3

∴ OF : FP = 3 : 1

$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

OF : FP = 3 : 1

(3) 直線 AF と平面 OBC の交点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。また，AF : FQ を求めよ。

Qは AF上だから

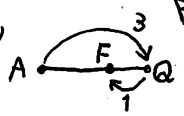
$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)=\left(1-\frac{2}{3}t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}t\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}t\overrightarrow{OC}\cdots①$$

Qは平面 OBC上にあるから（$\overrightarrow{OA}$の係数はゼロ）

$$1-\frac{2}{3}t=0\quad ∴t=\frac{3}{2}$$

これを①に代入して $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

$$\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OF}=\frac{-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OF}}{2}=\frac{(-1)\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OF}}{3-1}$$ より



Qは AFを 3:1 に外分.

外分より考えやすい？

$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

AF : FQ = 2 : 1

(4) 辺 OA を 2:1 に内分する点を G とし，直線 OF と平面 GDC の交点を R とする。$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$　(1)で $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

Rは OF上だから

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}k\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}\cdots①$$
$$=\frac{1}{3}k\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}k\times2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{3}k\times\frac{3}{2}\times\overrightarrow{OG}+\frac{1}{4}k\times2\times\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OG}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OC}$$

Rは平面 GDC上なので

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k=1\quad ∴k=\frac{6}{7}$$

これを①に代入して

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$$

(3)別解

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OF}\right)-\overrightarrow{OA}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OF}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$$

$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{14}\vec{b}+\frac{1}{7}\vec{c}$

ベクトル　内積バラバラ演習

$\boxed{1}$　△OAB において，OA = 1，OB = AB = 2 とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。
実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

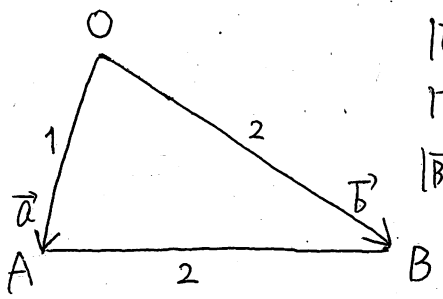
(2) AP = BP を満たすとき，t の値を求めよ。さらに線分 AP の長さを求めよ。

ベクトル　内積バラバラ演習

1　△OAB において，OA = 1，OB = AB = 2 とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。
実数 t に対して，$\overrightarrow{OP}=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) AP = BP を満たすとき，t の値を求めよ。さらに線分 AP の長さを求めよ。



$|\vec{a}|=1$

$|\vec{b}|=2$

$|\overrightarrow{BA}|=2$

(1) 余弦定理より

$$\cos\angle AOB=\frac{1^2+2^2-2^2}{2\times1\times2}=\frac{1}{4}$$ だから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB$$
$$=1\times2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

別解　$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|$ より 両辺2乗

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2$$
$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\overrightarrow{BA}|^2$$
$$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=2^2$$
$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

(2) $$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$$
$$=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{a}$$
$$=(t-1)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$$
$$=t\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{b}$$
$$=t\vec{a}+\left(\frac{1}{2}t-1\right)\vec{b}$$
$$=t\vec{a}+\frac{1}{2}(t-2)\vec{b}$$

AP = BP より　$|\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{BP}|^2$ だから

$$\left|(t-1)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}\right|^2=\left|t\vec{a}+\frac{1}{2}(t-2)\vec{b}\right|^2$$
$$(t-1)^2|\vec{a}|^2+t(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}t^2|\vec{b}|^2$$
$$=t^2|\vec{a}|^2+t(t-2)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}(t-2)^2|\vec{b}|^2$$

$$(t-1)^2+\frac{1}{2}t(t-1)+t^2$$
$$=t^2+\frac{1}{2}t(t-2)+(t-2)^2$$
$$(t-1)^2+\frac{1}{2}t(t-1)=\frac{1}{2}t(t-2)+(t-2)^2$$
$$2(t-1)^2+t(t-1)=t(t-2)+2(t-2)^2$$
$$2t^2-4t+2+t^2-t$$
$$=t^2-2t+2t^2-8t+8$$
$$\therefore\ t=\frac{6}{5}$$

このとき
$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{6}{5}-1\right)\vec{a}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\vec{b}$$
$$=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{1}{5}(\vec{a}+3\vec{b})$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{25}\left(|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2\right)$$
$$=\frac{1}{25}\left(1^2+6\times\frac{1}{2}+9\times4\right)$$
$$=\frac{40}{25}$$

$|\overrightarrow{AP}|>0$ より $|\overrightarrow{AP}|=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

以上より

$$t=\frac{6}{5},\ AP=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$\boxed{2}$ △ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) △ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

2 △ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。
$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) △ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{OG}|$ の値を求めよ。

(1) (proof)

$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=0$ の両辺に $\vec{a}$ をかけると

$$4|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$4\times5^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$\therefore 100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つ

■

(2) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=0$ より

$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$ として両辺2乗

$$|4\vec{a}+3\vec{b}|^2=|-5\vec{c}|^2$$

$$16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$$

$$16\times5^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9\times5^2=25\times5^2$$

$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=5^2(25-16-9)$$

$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=5^2\times0$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

同様に $|3\vec{b}+5\vec{c}|^2=|-4\vec{a}|^2$ から

$$9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2$$

$$30\vec{b}\cdot\vec{c}=5^2(16-9-25)$$

$$30\vec{b}\cdot\vec{c}=5^2\times(-18)$$

$$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=-15$$

同様に $|5\vec{c}+4\vec{a}|^2=|-3\vec{b}|^2$ から

$$25|\vec{c}|^2+40\vec{c}\cdot\vec{a}+16|\vec{a}|^2=9|\vec{b}|^2$$

$$40\vec{c}\cdot\vec{a}=5^2(9-25-16)$$

$$40\vec{c}\cdot\vec{a}=5^2\times(-32)$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$$

以上より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-15,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=-20$$

(3) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ より

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{9}\{5^2+5^2+5^2+2\times0+2\times(-15)+2\times(-20)\}$$

$$=\frac{5}{9}$$

$|\overrightarrow{OG}|>0$ より $|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{3}$ 平行四辺形ABCDにおいて，対角線BDを3 : 4に内分する点をEとし，点Fは辺CDの延長上にあってCD=3DFをみたし，直線AEと直線CDの交点をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AE}$ と $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 直線AGと直線BFが垂直のとき，AB : ADを求めよ。

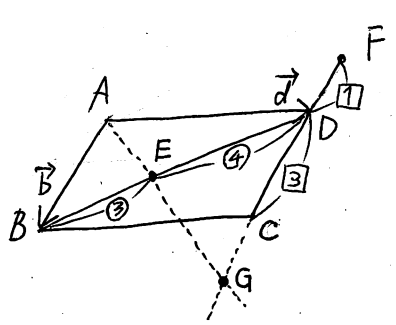
3 平行四辺形ABCDにおいて，対角線BDを3：4に内分する点をEとし，点Fは辺CDの延長上にあってCD=3DFをみたし，直線AEと直線CDの交点をGとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AE}$ と $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 直線AGと直線BFが垂直のとき，AB：ADを求めよ。

(1)



$$\overrightarrow{AE}=\frac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{3+4}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{d}$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\vec{d}+\left(-\frac{1}{3}\vec{b}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

(2) まず $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$.

点Gは直線CD上なので

$$\overrightarrow{AG}=(1-s)\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AD}$$
$$=(1-s)(\vec{b}+\vec{d})+s\vec{d}$$
$$=(1-s)\vec{b}+(1-s)\vec{d}+s\vec{d}$$
$$=(1-s)\vec{b}+\vec{d}\cdots\cdots①$$

点Gは直線AE上なので

$$\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AE}=t\left(\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{d}\right)$$
$$=\frac{4}{7}t\vec{b}+\frac{3}{7}t\vec{d}\cdots②$$

①と②で $\vec{a}$, $\vec{b}$ は一次独立だから

$$\begin{cases}1-s=\frac{4}{7}t\\ 1=\frac{3}{7}t\end{cases}$$ を解くと $$\begin{cases}s=-\frac{1}{3}\\ t=\frac{7}{3}\end{cases}$$

よって①より $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$

別解 ①のかわりに $\overrightarrow{DG}=k\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$ より
$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=k\vec{b}+\vec{d}$ として
②と $\vec{a}$, $\vec{b}$ が一次独立から k と t を求めてもよい.

(3) $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$.

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}$$ ← (1)より $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}$
$$=\left(-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)-\vec{b}$$
$$=-\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}.$$

$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BF}$ より $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BF}=0$ だから

$$\left(\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)=0$$

内積バラバラ

$$-\frac{16}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2=0\cdots\cdots(*)$$
$$-\frac{16}{9}|\vec{b}|^2=-|\vec{d}|^2$$
$$\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{d}|^2}=\frac{9}{16}$$

$|\vec{b}|^2:|\vec{d}|^2=9:16$ より

$|\vec{b}|:|\vec{d}|=3:4$ だから

AB：AD＝3：4

(2)別解

$$\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{3}{7}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ とおくと

$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AG}$ となり,

点GはAE上であり、かつ、CD上である

よって $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$