# ショートトライアル　数列　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 初項 5，公差 $-3$

(2) 初項 1，公差 6

(3) 第 3 項が 10，第 6 項が 1

$\boxed{2}$ 初項が $-50$，第 10 項が $-14$，末項が 66 の等差数列の項数を求めよ。

$\boxed{3}$ 一般項が $a_n = 4n + 5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の数列の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 200$

(2) $-10 - 7 - 4 - 1 + 1 + \cdots + 26 + 29 + 32$

(3) $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - 2d) + (l - d) + l$
(項数は $n$ とする)

# ショートトライアル　数列　1

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

**1**　次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　初項 5，公差 $-3$

$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-3)$

$\therefore a_n = -3n + 8$ //

(2)　初項 1，公差 6

$a_n = 1 + (n-1)\times 6$

$a_n = 6n - 5$ //

(3)　第 3 項が 10，第 6 項が 1

初項 $a$，公差 $d$ とおくと

$a_n = a + (n-1)d$.

$a_3 = 10$.　$a_6 = 1$ より

$$\begin{cases} a + 2d = 10 \cdots ① \\ a + 5d = 1 \cdots ② \end{cases}$$

①.② を解くと　$a = 16$，$d = -3$

$a_n = 16 + (n-1)\cdot(-3)$

$\therefore a_n = -3n + 19$ //

**2**　初項が $-50$，第 10 項が $-14$，末項が 66 の等差数列の項数を求めよ。

初項 $-50$，公差 $d$ とおくと

$a_n = -50 + (n-1)d$.

$a_{10} = -14$ だから

$-50 + 9d = -14$

$9d = 36$

$d = 4$.

よって一般項は

$a_n = -50 + (n-1)\times 4$

$\therefore a_n = 4n - 54$

項数を $n$ とすると　$4n - 54 = 66$

$4n = 120$

$n = 30$

項数は 30 //

**3**　一般項が $a_n = 4n + 5$ で表される数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。また，初項と公差を求めよ。

(proof) $a_{n+1} - a_n = \{4(n+1)+5\} - (4n+5)$

$= 4n + 4 + 5 - 4n + 5$

$= 4$

等差数列は $a_{n+1} - a_n = d$（定数）が示せればOK

よって公差 4 の等差数列である.

また $a_1 = 4\cdot 1 + 5 = 9$

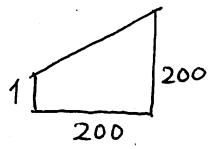
初項 9，公差 4 //

**4**　次の数列の和を求めよ。

(1)　$1 + 2 + 3 + \cdots + 200$

(与式) $= \frac{1}{2}\times 200\times(1+200)$

$= 20100$ //




(2)　$-10 - 7 - 4 - 1 + 1 + \cdots + 26 + 29 + 32$

$a_n = -10 + (n-1)\times 3$

$a_n = 3n - 13$

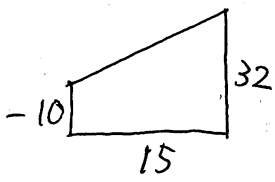
$3n - 13 = 32$

$3n = 45$

$n = 15$

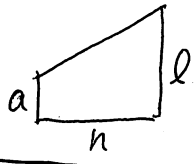
(末項の32は第15項)

よって　(与式) $= \frac{1}{2}\times 15\times\{(-10)+32\} = 165$ //




(3)　$a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l$
(項数は $n$ とする)

(与式) $= \frac{1}{2}n(a+l)$




等差数列の和は台形の面積

# ショートトライアル　数列　2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　次の等差数列の和 $S$ を求めよ。

12，15，18，……，99

**2**　初項が 70，公差が $-4$ である等差数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　一般項 $a_n$ を求めよ。

(2)　第 5 項を求めよ。

(3)　$-286$ はこの数列の第何項か。

(4)　第何項が初めて負の数になるか。

(5)　初項から第何項までの和が最大であるか。
また，その和を求めよ。

**3**　次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
また，第 5 項を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$

(2)　1，$-2$，4，$-8$，……

(3)　$\sqrt{3}$，3，$3\sqrt{3}$，9，……

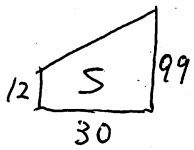
**4**　第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

# ショートトライアル　数列　2

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の等差数列の和 $S$ を求めよ。

12，15，18，……，99




一般項は $a_n = 12 + (n-1) \times 3$

$\therefore a_n = 3n + 9$

$3n + 9 = 99$ を解くと $n = 30$

よって求める和 $S$ は

$S = 12 + 15 + \cdots + 99 = \frac{1}{2} \times 30 \times (12 + 99) = \underline{1665}$ //

**2**　初項が 70，公差が $-4$ である等差数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　一般項 $a_n$ を求めよ。

$a_n = 70 + (n-1) \cdot (-4)$

$\underline{a_n = -4n + 74}$ //

(2)　第 5 項を求めよ。

$a_5 = -4 \times 5 + 74 = \underline{54}$ //

(3)　$-286$ はこの数列の第何項か。

$-4n + 74 = -286$

$n = 90$　$\underline{第90項}$ //

(4)　第何項が初めて負の数になるか。

$-4n + 74 < 0$

$-4n < -74$

$n > \frac{74}{4} = 18.5$

よって　$\underline{第19項}$ //

(5)　初項から第何項までの和が最大であるか。
また，その和を求めよ。

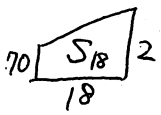
(4)より $a_1 > a_2 > \cdots > a_{18} > 0 > a_{19} > \cdots$

であるから正の数の項である第18項までの和が最大

$a_{18} = -4 \times 18 + 74 = 2$ だから

求める和 $S_{18}$ は

$S_{18} = \frac{1}{2} \times 18 \times (70 + 2) = \underline{648}$ //




**3**　次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
また，第 5 項を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $\frac{1}{3}$

$\underline{a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$ //

$a_5 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-1} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \underline{\frac{2}{81}}$ //

(2)　1，$-2$，4，$-8$，……

$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = \underline{(-2)^{n-1}}$ //

$a_5 = (-2)^{5-1} = (-2)^4 = \underline{16}$ //

(3)　$\sqrt{3}$，3，$3\sqrt{3}$，9，……

$a_n = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \underline{(\sqrt{3})^n}$ //

$a_5 = (\sqrt{3})^5 = \underline{9\sqrt{3}}$ //

**4**　第 4 項が 24，第 6 項が 96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項 $a$，公比 $r$ とすると

$a_4 = 24$ より　$ar^3 = 24$ …①

$a_6 = 96$ より　$ar^5 = 96$ …②

②より　$ar^3 \times r^2 = 96$ として①代入

$24 \times r^2 = 96$

$r^2 = 4$

$r = \pm 2$

①より　$r = 2$ のとき $a \times 8 = 24$ より $a = 3$

$r = -2$ のとき $a \times (-8) = 24$ より $a = -3$

以上より

$\underline{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$ または $\underline{a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}}$ //

# ショートトライアル　数列　3

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　1，$x$，8 が等差数列であるとき，$x$ の値を求めよ。

**2**　2，$y$，5 が等比数列であるとき，$y$ の値を求めよ。

**3**　次の等差数列の和 $S$ を求めよ。

2，5，8，……，29

**4**　次の和 $S$ を求めよ。（等比数列の和）

$S = 2 + 4 + 8 + \cdots + 128$

**5**　次のような等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1)　初項 4，公比 2

(2)　$3,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2^2},\ -\dfrac{3}{2^3},\ \cdots$

**6**　初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が $-6$ である等比数列の初項 $a$ と公比 $r$ を求めよ。

# ショートトライアル　数列　3

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　1，$x$，8 が等差数列であるとき，$x$ の値を求めよ。

1，$x$，8 が等差数列だから

$x-1=8-x$ より

$2x=9$

$x=\frac{9}{2}$ //

**2**　2，$y$，5 が等比数列であるとき，$y$ の値を求めよ。

2，$y$，5 が等比数列だから

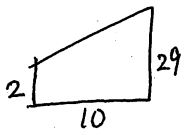
$\frac{y}{2}=\frac{5}{y}$ より

$y^2=10$

$\therefore y=\pm\sqrt{10}$ //

**3**　次の等差数列の和 $S$ を求めよ。

2，5，8，……，29




一般項は $a_n=2+(n-1)\cdot 3$

$\therefore a_n=3n-1$

$3n-1=29$ を解くと $n=10$

よって求める和は

$S=2+5+8+\cdots+29=\frac{1}{2}\times 10\times(2+29)$

$=155$ //

**4**　次の和 $S$ を求めよ。（等比数列の和）

$S=2+4+8+\cdots+128$

一般項 $a_n=2\cdot 2^{n-1}$

$2\cdot 2^{n-1}=128$

$2^n=2^7$

$n=7$

初項2，公比2
項数7の等比
数列の和

よって

$S=\frac{2(2^7-1)}{2-1}=2(128-1)=254$ //

**5**　次のような等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1)　初項 4，公比 2

$S_n=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)$ //

$4\cdot 2^n-4$ や $2^{n+2}-4$ でもOK.

(2)　3，$-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2^2}$，$-\frac{3}{2^3}$，…

初項3、公比 $-\frac{1}{2}$

$S_n=\frac{3\{1-(-\frac{1}{2})^n\}}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{3\{1-(-\frac{1}{2})^n\}}{\frac{3}{2}}$

$=2\{1-(-\frac{1}{2})^n\}$ //

$2-2(-\frac{1}{2})^n$ でもOK

**6**　初項から第 3 項までの和が 3，第 2 項から第 4 項までの和が $-6$ である等比数列の初項 $a$ と公比 $r$ を求めよ。

$a+ar+ar^2=3$ …①

$ar+ar^2+ar^3=-6$ …②

②より $r(a+ar+ar^2)=-6$

$r\times 3=-6$

$\therefore r=-2$.

①より $a-2a+4a=3$

$3a=3$

$a=1$.

以上より

$a=1$，$r=-2$ //

# ショートトライアル　数列　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　次の和を $\sum$ を使わない足し算の形で表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} 4k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3^{k-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

**2**　次の和を $\displaystyle\sum_{k=1}$ を用いて表せ。

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)$

(2) $1\cdot 3+3\cdot 7+5\cdot 11+\cdots+(2n-1)(4n-1)$

(3) $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+(n+2)(3n+5)$

(4) $3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

(5) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot 1$

**3**　次の和を求めよ。

(1) $2+4+6+\cdots+78+80$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 4^{k-1}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{k}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{n}$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1}$

(8) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} 4^{k-1}$

# ショートトライアル　数列　4

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の和を $\sum$ を使わない足し算の形で表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} 4k$

(与式) $= 4\times3+4\times4+4\times5+4\times6+4\times7$ //

↑ $12+16+20+24+28$ でもOK

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3^{k-1}$

(与式) $= 1+3+3^2+3^3+3^4$ //

↑ $1+3+9+27+81$ でもOK

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(与式) $= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ //

**2**　次の和を $\displaystyle\sum_{k=1}$ を用いて表せ。

(1) $1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k$ //

(2) $1\cdot3+3\cdot7+5\cdot11+\cdots+(2n-1)(4n-1)$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(4k-1)$ //

(3) $1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\cdots+(n+2)(3n+5)$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} k(3k-1)$ //

(4) $3+6+12+\cdots+3\cdot2^{n-1}$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\cdot2^{k-1}$ //

(5) $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+n\cdot1$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)$ //

**3**　次の和を求めよ。

(1) $2+4+6+\cdots+78+80$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{40} 2k = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot40\cdot41 = 1640$ //

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2$

(与式) $= \frac{1}{6}\times12\times13\times25 = 650$ //

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 4^{k-1}$

[(3)別解] (与式) $= 1+4+16 = 21$ //

(与式) $= \dfrac{1(4^3-1)}{4-1} = \dfrac{63}{3} = 21$ //

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}$

(与式) $= \dfrac{1(4^n-1)}{4-1} = \dfrac{4^n-1}{3}$ //

↑ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1\cdot4^{k-1}$ と見ると 初項1, 公比4, 項数n

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^k$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4\cdot4^{k-1} = \frac{4(4^n-1)}{4-1}$

$= \dfrac{4(4^n-1)}{3}$ // ← $\dfrac{4^{n+1}-4}{3}$ でもOK

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^n$

(与式) $= 4^n\times n = n\cdot4^n$ //

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1}$

(与式) $= \dfrac{1(4^{n-1}-1)}{4-1} = \dfrac{4^{n-1}-1}{3}$ //

(8) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} 4^{k-1}$

(与式) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} - \sum_{k=1}^{3} 4^{k-1}$

↓(4)　↓(3)

$= \dfrac{4^n-1}{3} - 21$

$= \dfrac{4^n-64}{3}$ //

# ショートトライアル　数列　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k-4)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{60}k$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^{k-1}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}$

(7) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+n(n+2)$

# ショートトライアル　数列　5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k-4)$

$$(与式)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}4$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-4n$$
$$=n\left\{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+\frac{3}{2}(n+1)-4\right\}$$
$$=n\times\frac{(n+1)(2n+1)+9(n+1)-24}{6}$$
$$=n\times\frac{2n^2+3n+1+9n+9-24}{6}$$
$$=n\times\frac{2n^2+12n-14}{6}=n\times\frac{2(n^2+6n-7)}{6}$$
$$=\frac{1}{3}n(n-1)(n+7)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3k^2$

$$(与式)=3\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=3\times\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$$
$$=\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{60}k$

$$(与式)=\frac{1}{2}\times60\times(60+1)$$
$$=30\times61$$
$$=1830$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$(与式)=\frac{1}{4}\cdot10^2(10+1)^2$$
$$=\frac{1}{4}\times100\times121$$
$$=25\times121=3025$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}$

初項a、公比r、項数nの等比数列の和をSとすると
$r\neq1$で $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$
$\left(S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\right)$

$$(与式)=\frac{2(3^n-1)}{3-1}$$
$$=\frac{2(3^n-1)}{2}$$
$$=3^n-1$$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}$

point　$ar^{k-1}$の形にする

$$3^{k+1}=3^{k-1+2}=3^{k-1}\times3^2$$
$$=9\times3^{k-1}$$

初項9、公比3だ!!

項数n−1に注意!!

$$(与式)=\sum_{k=1}^{n-1}9\times3^{k-1}=\frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}$$
$$=\frac{9(3^{n-1}-1)}{2}$$

$\dfrac{3^{n+1}-9}{2}$でもOK.

(7) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$

$$(与式)=\sum_{k=1}^{n}k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$$
$$=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+1\right)$$
$$=n(n+1)\times\frac{2n+1+6}{6}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

# ショートトライアル　数列　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3, 6, 11, 18, 27, ……

$\boxed{2}$ 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = 2n^2 - 3n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の和 $S$ を求めよ。

(1) $S = \dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \dfrac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

(2) $S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$

# ショートトライアル　数列　6 「4つの道具」

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3, 6, 11, 18, 27, ……

3　5　7　9 ← $b_n = 3+(n-1)\times 2$

$\therefore b_n = 2n+1$

必ず書く

$n \geqq 2$ のとき

($\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列)

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$

$$= 3 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$
$= \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$
$= \frac{1}{2}n(n-1)$

$\sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1$
注意が必要!!

$$= 3 + 2\times\frac{1}{2}n(n-1) + (n-1)$$

$$= 3 + n^2 - n + n - 1$$

$$= n^2 + 2$$

$a_n = n^2+2$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 1^2+2 = 3$
なので $n=1$ のときも成り立つ

よって　$a_n = n^2+2$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ //

**2**　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = 2n^2 - 3n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(和から一般項)

$n=1$ のとき　$a_1 = S_1 = 2\times 1^2 - 3\times 1 = -1$

$n \geqq 2$ のとき

$S_n = 2n^2 - 3n$ より

$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - 3(n-1)$
$= 2n^2 - 4n + 2 - 3n + 3$
$= 2n^2 - 7n + 5$ だから

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2 - 3n) - (2n^2 - 7n + 5)$$

$$= 4n - 5$$

$a_n = 4n-5$ に $n=1$ を代入すると $a_1 = 4\times 1 - 5 = -1$
$n=1$ のときも成り立つ

よって　$a_n = 4n-5$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ //

**3**　次の和 $S$ を求めよ。　(部分分数分解)

(1) $S = \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4n+1-1}{4n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{4n}{4n+1}$$

$$= \frac{n}{4n+1}$$ //

(2) $S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$

(S−rS)

$$S = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + \cdots + n\cdot 3^{n-1}$$

$$-)\ 3S = 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + n\cdot 3^n$$

$$-2S = 1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^3 + \cdots + 1\cdot 3^{n-1} - n\cdot 3^n$$

初項1, 公比3, 項数 $n$ の等比数列の和

$$-2S = \frac{1(3^n - 1)}{3-1} - n\cdot 3^n$$

$$-2S = \frac{3^n - 1}{2} - n\cdot 3^n$$

$$-2S = \frac{3^n - 1 - 2n\cdot 3^n}{2}$$

$$-2S = \frac{(1-2n)\cdot 3^n - 1}{2}$$

$$S = \frac{(-1+2n)\cdot 3^n + 1}{4}$$

$$S = \frac{(2n-1)\cdot 3^n + 1}{4}$$ //

# ショートトライアル　数列　6．5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　　2, 3, 8, 17, 30, ……

$\boxed{2}$ 次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$\boxed{3}$ 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = n^2 + 3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

# ショートトライアル　数列　6．5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$2,\ 3,\ 8,\ 17,\ 30,\ \cdots\cdots$ 階差数列 $\{b_n\}$ は

$1,\ 5,\ 9,\ 13$ ← 初項 1，公差 4

$+4,\ +4,\ +4$

$b_n = 1+(n-1)\cdot 4$
$= 4n-3$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$

$= 2 + 4\times\frac{1}{2}n(n-1) - 3(n-1)$

$= 2 + 2n^2 - 2n - 3n + 3$

$= 2n^2 - 5n + 5$ ……①

①に $n=1$ を代入すると $a_1 = 2-5+5 = 2$

よって $n=1$ のとき成り立つ。

以上より $a_n = 2n^2 - 5n + 5$ $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ //

**2**　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3n^2+9n+6-2n-4-2n-2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$ //

両端2個残しのパターン

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 残 | 消 | 残 | 消 | 残 | 消 | 残 |

**3**　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = n^2 + 3$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 = 4$.

$n \geqq 2$ のとき　$S_n = n^2 + 3$ より

$S_{n-1} = (n-1)^2 + 3 = n^2 - 2n + 4$.

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2+3) - (n^2 - 2n + 4)$

$= 2n - 1$ ……①

①に $n=1$ を代入すると $a_1 = 2\times 1 - 1 = 1$.

よって $n=1$ のとき成り立たない → 別えにかく

以上より

$$\begin{cases} n=1 \text{ のとき } a_1 = 4 \\ n \geqq 2 \text{ のとき } a_n = 2n-1 \end{cases}$$ //

**4**　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} k\times\left(\frac{1}{2}\right)^k$$ ← これは(等差)×(等比)の和なので S−rS法.

$$S = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-)\ \frac{1}{2}S = \qquad 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S = \underbrace{1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{初項}\frac{1}{2},\ \text{公比}\frac{1}{2},\ \text{項数}n\text{の等比数列の和}} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}S = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{n+2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S = 2 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ //

# ショートトライアル　数列　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　　1, 2, 5, 14, 41, ……

$\boxed{2}$ 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = n^2 + 2n + 2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の和 $S$ を求めよ。

(1) $S = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(2) $S = 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 5\cdot 4^2 + 7\cdot 4^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^{n-1}$

# ショートトライアル　数列　7　「4つの道具」

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 41,\ \cdots\cdots$　階差数列

$1\ \ 3\ \ 9\ \ 27$ ← 初項1，公比3　$b_n = 1\cdot 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき

書いてないと減点！

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

要注意!!

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1\cdot 3^{k-1}$$

← 初項1，公比3，項数 $n-1$ の等比数列の和

$$= 1 + \frac{1(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= 1 + \frac{3^{n-1}-1}{2} = \frac{2+3^{n-1}-1}{2}$$

$$= \frac{3^{n-1}+1}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

① に $n=1$ を代入すると $a_1 = \frac{3^0+1}{2} = 1$

よって $n=1$ のとき成り立つ

以上より

$$a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

**2**　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = n^2+2n+2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n=1$ のとき　$a_1 = S_1 = 1^2+2\times 1+2 = 5$

$n \geqq 2$ のとき　$S_n = n^2+2n+2$ より

書いてないと減点！

$$S_{n-1} = (n-1)^2+2(n-1)+2$$
$$= n^2-2n+1+2n-2+2$$
$$= n^2+1 \text{ だから}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2+2n+2)-(n^2+1)$$
$$= 2n+1 \quad \cdots\cdots ①$$

① に $n=1$ を代入すると $a_1 = 2\times 1+1 = 3$

となり $a_1 = 5$ と一致しない ← この確認は必ずやる　やってないと減点！

以上より

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2n+1 \quad (n \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

☆ 階差数列の公式，和から一般項の公式では

① $n \geqq 2$ のとき　② $n=1$ のときの成立・不成立

この①，②の記述が無い場合は減点。

②については，階差数列は必ず成立，和から一般項は，どちらの場合もある

**3**　次の和 $S$ を求めよ。

(1) $S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{3n+1-1}{3n+1}$$
$$= \frac{n}{3n+1}$$

部分分数分解公式（$a<b$ で）

$$\boxed{\frac{1}{a\cdot b} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

(2) $S = 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 5\cdot 4^2 + 7\cdot 4^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 4^{n-1}$

$$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 4 + 5\cdot 4^2 + \cdots\cdots + (2n-1)4^{n-1}$$
$$4S = \qquad 1\cdot 4 + 3\cdot 4^2 + \cdots\cdots\cdots + (2n-1)\cdot 4^n$$

$$-3S = 1\cdot 1 + \underbrace{2\cdot 4 + 2\cdot 4^2 + \cdots\cdots + 2\cdot 4^{n-1}}_{\text{初項8，公比4，項数 } n-1 \text{ の等比数列の和}} - (2n-1)\cdot 4^n \cdots ①$$

$$-3S = 1 + \frac{8(4^{n-1}-1)}{4-1} - (2n-1)\cdot 4^n$$

右辺を分母3で通分する

$$-3S = \frac{3+8\cdot 4^{n-1}-8-3(2n-1)\cdot 4^n}{3}$$

$$-3S = \frac{2\cdot 4^n-(6n-3)\cdot 4^n-5}{3} = \frac{\{2-(6n-3)\}\cdot 4^n-5}{3}$$

$$-3S = \frac{(-6n+5)\cdot 4^n-5}{3}$$

$4^n$ でくくる

$$\therefore S = \frac{(6n-5)\cdot 4^n-5}{9}$$

① から無理矢理，初項を作って項数を $n$ 個にする別解

① より　エス

$$-3S = -1 + \underbrace{2\times 1 + 2\times 4 + 2\times 4^2 + \cdots + 2\cdot 4^{n-1}}_{\text{初項2，公比4，項数 } n \text{ の等比数列の和}} - (2n-1)\cdot 4^n$$

$$-3S = -1 + \frac{2(4^n-1)}{4-1} - (2n-1)\cdot 4^n$$
$$= \frac{-3+2\cdot 4^n-2-(6n-3)\cdot 4^n}{3} = \frac{(-6n+5)\cdot 4^n-5}{3}$$

よって　$S = \frac{(6n-5)\cdot 4^n+5}{3}$

# ショートトライアル　数列　7．5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　3, 5, 11, 29, 83, ……

$\boxed{2}$ 次の和 $S$ を求めよ。

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$

$\boxed{3}$ 初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n=3n^2-n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の和 $S$ を求めよ。

$$S=\sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 5^{k-1}$$

# ショートトライアル　数列　7．5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　階差数列を利用して，次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3, 5, 11, 29, 83, ……　階差数列 $\{b_n\}$ は

2, 6, 18, 54 ← 初項2，公比3

×3 ×3 ×3

$b_n = 2\cdot 3^{n-1}$

$n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1}$

$= 3 + \frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1} = 3 + 3^{n-1} - 1$

$= 3^{n-1} + 2$ ……①

①に $n=1$ を代入すると $a_1 = 3^0 + 2 = 3$

よって $n=1$ のときも成り立つ。

以上より $a_n = 3^{n-1} + 2 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ //

**2**　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$

（分母有理化）

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$$

$$= \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{k-(k+2)}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})$$

よって

$$S = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})$$

$$= -\frac{1}{2}\{(\sqrt{1}-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-\sqrt{4})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\cdots$$

$$+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})\}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{2}-1)$$ //

**3**　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = 3n^2 - n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n=1$ のとき $a_1 = S_1 = 3\times 1^2 - 1 = 2$

$n \geqq 2$ のとき $S_n = 3n^2 - n$ より

$S_{n-1} = 3(n-1)^2 - (n-1)$

$= 3n^2 - 6n + 3 - n + 1 = 3n^2 - 7n + 4$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3n^2 - n) - (3n^2 - 7n + 4)$

$= 6n - 4$ ……①

①に $n=1$ 代入すると $a_1 = 6\times 1 - 4 = 2$

よって $n=1$ のときも成り立つ

以上より

$a_n = 6n - 4 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ //

**4**　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n}(3k-1)\cdot 5^{k-1}$$

$S = 2\cdot 1 + 5\cdot 5 + 8\cdot 5^2 + \cdots\cdots + (3n-1)\cdot 5^{n-1}$

$5S = \qquad 2\cdot 5 + 5\cdot 5^2 + \cdots\cdots \qquad + (3n-1)\cdot 5^n$

$-4S = 2\cdot 1 + \underbrace{3\cdot 5 + 3\cdot 5^2 + \cdots + 3\cdot 5^{n-1}}_{\text{初項15，公比5 項数 } n-1 \text{ の等比数列の和}} - (3n-1)\cdot 5^n$ ……①

$-4S = 2 + \frac{15(5^{n-1}-1)}{5-1} - (3n-1)\cdot 5^n$

$-4S = \frac{8 + 3\cdot 5^n - 15 - (12n-4)\cdot 5^n}{4}$

$-4S = \frac{\{3-(12n-4)\}\cdot 5^n - 7}{4} = \frac{(-12n+7)\cdot 5^n - 7}{4}$

$S = \frac{(12n-7)\cdot 5^n + 7}{16}$ //

初項を作る別解　①より

$-4S = -1 + \underbrace{3\times 1 + 3\times 5 + 3\times 5^2 + \cdots + 3\cdot 5^{n-1}}_{\text{初項3，公比5 項数 } n} - (3n-1)\cdot 5^n$

$-4S = -1 + \frac{3(5^n-1)}{5-1} - (3n-1)\cdot 5^n$

$-4S = \frac{-4 + 3\cdot 5^n - 3 - (12n-4)\cdot 5^n}{4}$

$-4S = \frac{(-12n+7)\cdot 5^n - 7}{4}$

$\therefore S = \frac{(12n-7)\cdot 5^n + 7}{16}$ //

# ショートトライアル　数列　8

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と初項 1，公差 4 の等差数列 $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して含まれる項を小さい方から並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

**2**　数列

$\{a_n\}$ : $2,\ 2+4,\ 2+4+6,\ 2+4+6+8,\ \cdots\cdots$

について次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 $k$ 項を $k$ の式で表せ。

(2) この数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

**3**　正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

$$2 \,\Big|\, 4,\ 6,\ 8 \,\Big|\, 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18 \,\Big|\, 20,\ 22,\ \cdots\cdots$$

次の問いに答えよ。

(1) 第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。

(2) 第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。

(3) 第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。

(4) 2020 は第何群の何番目か。

# ショートトライアル　数列　8

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ と初項 1，公差 4 の等差数列 $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して含まれる項を小さい方から並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$\{a_n\}$: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 …

$\{b_n\}$: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, …

共通な項が $\{c_n\}$ なので

$\{c_n\}$: 5, 17, 29, …

初項 5，公差 12 の等差数列なので

$$c_n = 5 + (n-1)\times 12$$

$$\therefore c_n = 12n - 7$$

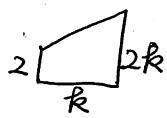
**2**　数列

$\{a_n\}$: 2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, ……

について次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 $k$ 項を $k$ の式で表せ。

第 $k$ 項は $\underbrace{2+4+6+\cdots\cdots+2k}_{k\text{コ}}$




$$= \frac{1}{2}\times k\times(2+2k) = k(k+1)$$

別解 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2i = 2\cdot\frac{1}{2}k(k+1) = k(k+1)$

(2) この数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= n(n+1)\times\frac{2n+4}{6}$$

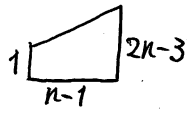
$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

**3**　正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

2 | 4, 6, 8 | 10, 12, 14, 16, 18 | 20, 22, ……

次の問いに答えよ。

(1) 第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。




一般項は $a_k = 2k$.

$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群までの項数は

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2n-3)}_{n-1\text{コ}} = \frac{1}{2}(n-1)\{1+(2n-3)\}$$

$$= (n-1)^2\text{個}$$

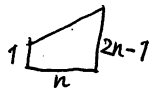
よって第 $n$ 群の最初の数は第 $(n-1)^2+1$ 項なので

その数は $a_{(n-1)^2+1} = 2\{(n-1)^2+1\} = 2n^2-4n+4$

$n=1$ のとき $a_1 = 2-4+4 = 2$ で成り立つから

$$2n^2-4n+4$$

(2) 第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。




第 $n$ 群の最後までの項数は

$$\underbrace{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}_{n\text{コ}} = \frac{1}{2}\times n\times\{1+(2n-1)\}$$

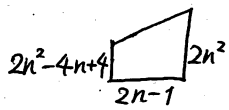
$$= n^2\text{個}$$

よって第 $n$ 群の最後の数は

$$a_{n^2} = 2n^2$$

(3) 第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。

$$S = \underbrace{(2n^2-4n+4)+\cdots+(2n^2)}_{\text{初項 } 2n^2-4n+4,\ \text{末項 } 2n^2,\ \text{項数 } 2n-1 \text{ の等差数列の和}}$$




$$= \frac{1}{2}(2n-1)\{(2n^2-4n+4)+2n^2\} = 2(2n-1)(n^2-n+1)$$

(4) 2020 は第何群の何番目か。

$2k = 2020$ より $k = 1010$.

2020 は第 1010 項

(2)より第 $n$ 群までの項数は $n^2$ 個だから

$n=31$ のとき $31^2 = 961$

$n=32$ のとき $32^2 = 1024$

1010に近そうな数をうまくさがす

$$961 < 1010 \leqq 1024$$

であるから 2020 は第 32 群に含まれる

$1010 - 961 = 49$ より

2020 は第 32 群の 49 番目

# ショートトライアル　数列　9

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　数列

$\{a_n\}$ : $1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ 1+4+7+10,\ \cdots\cdots$

について次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 $k$ 項を $k$ の式で表せ。

(2) この数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

**2**　次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ n\cdot 1$

**3**　一般項 $a_n$ が $a_n = 4n-3$ である数列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $2n$ 個の数が入るものとする。

$1,\ 5 \mid 9,\ 13,\ 17,\ 21 \mid 25,\ 29,\ 33,\ 37,\ 41,\ 45 \mid 49,\ 53,\ \cdots\cdots$

次の問いに答えよ。

(1) 第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。

(2) 第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。

(3) 第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。

(4) 7441 は第何群の何番目か。

# ショートトライアル　数列　9

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

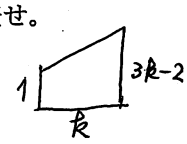
**1**　数列

$\{a_n\}$ : 1, 1+4, 1+4+7, 1+4+7+10, ……

について次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 $k$ 項を $k$ の式で表せ。

初項1, 公差3だから $1+(k-1)\cdot 3=3k-2$




$\{a_n\}$の第$k$項は

$$\underbrace{1+4+7+\cdots+(3k-2)}_{k個}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\{1+(3k-2)\}$$

$$=\frac{k(3k-1)}{2}$$

(2) この数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2-k}{2}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(2n+1)-1\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\times 2n$$

$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)$$

**2**　次の数列の和を求めよ。

$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots\cdots,\ n\cdot 1$

| | ① | ② | ③ | … | ⓚ | … | ⓝ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ㊧ | 1, | 2, | 3 | | $k$ | | $n$ |
| ㊨ | $n$, | $n-1$ | $n-2$, | … | $n-k+1$, | | 1 |

この数列の第$k$項は $k(n-k+1)$ なので

求める和を$S$とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}k\{(n+1)-k^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=n(n+1)\left(\frac{n+1}{2}-\frac{2n+1}{6}\right)$$

$$=n(n+1)\times\frac{(3n+3)-(2n+1)}{6}$$

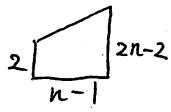
$$=n(n+1)\times\frac{n+2}{6}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

**3**　一般項 $a_n$ が $a_n=4n-3$ である数列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $2n$ 個の数が入るものとする。

1, 5 | 9, 13, 17, 21 | 25, 29, 33, 37, 41, 45 | 49, 53, ……

次の問いに答えよ。

(1) 第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。




一般項は $a_k=4k-3$.

$n\geqq 2$のとき 第$(n-1)$群までの項数は

$$2+4+6+\cdots+(2n-2)=\frac{1}{2}\times(n-1)\times\{2+(2n-2)\}$$

$$=n(n-1)個$$

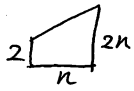
よって第$n$群の最初の数は第 $n(n-1)+1$項なので

$$a_{n(n-1)+1}=4\{n(n-1)+1\}-3=4n^2-4n+1.$$

$n=1$のとき $4\times1^2-4\times1+1=1$ で成り立つから

最初の数は $4n^2-4n+1$

(2) 第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。



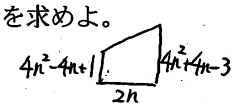

第$n$群の最後までの項数は、

$$2+4+6+\cdots+2n=\frac{1}{2}\cdot n\times(2+2n)=n(n+1)個$$

よって第$n$群の最後の数は.

$$a_{n(n+1)}=4\{n(n+1)\}-3=4n^2+4n-3$$

(3) 第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。




$$S=\underbrace{(4n^2-4n+1)+\cdots+(4n^2+4n-3)}$$

初項$4n^2-4n+1$. 末項$4n^2+4n-3$ 項数$2n$の等差数列の和

$$=\frac{1}{2}\times 2n\{(4n^2-4n+1)+(4n^2+4n-3)\}$$

$$=n(8n^2-2)=2n(4n^2-1)=2n(2n-1)(2n+1)$$

(4) 7441 は第何群の何番目か。

$4k-3=7441$ を解くと $k=1861$

7441は第1861項

(2)より第$n$項の終わりまでの項数は $n(n+1)$個だから

$n=42$のとき $42\times43=1806$

$n=43$のとき $43\times44=1892$.

$1806<1861\leqq1892$

であるから 7441は第43群に含まれる

$1861-1806=55$ より

7441は第43群の55番目

# ショートトライアル　数列　１０

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 3^n$

(2) $a_1 = 1$，$2a_{n+1} - a_n + 2 = 0$

(3) $a_1 = 6$，$a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+1}$

# ショートトライアル　数列　１０

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} k$

$(与式)=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot(40+1)=20\times 41$

$=\underline{820}$ //

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}$

point　$ar^{k-1}$の形を作る

$3^{k+1}=3^{k-1+2}=3^{k-1}\times 3^2$
$=9\times 3^{k-1}$

$(与式)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 9\cdot 3^{k-1}$ ← 初項9 公比3 項数nの等比数列の和

$=\dfrac{9(3^n-1)}{3-1}$

$=\dfrac{9\times 3^n-9}{2}$

$=\underline{\dfrac{3^{n+2}-9}{2}}$ //

**2**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3^n$

$n\geqq 2$のとき

必ずかく

$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^k$

$=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 3^{k-1}$

$=1+\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$=1+\dfrac{3\cdot 3^{n-1}-3}{2}$

$=\dfrac{2+3^n-3}{2}$

$=\dfrac{3^n-1}{2}$ ……①

①に$n=1$を代入すると $a_1=\dfrac{3-1}{2}=1$

必ずかく　$n=1$のとき成り立つ

よって

$\underline{a_n=\dfrac{3^n-1}{2}}$ //

(2) $a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n+2=0$

$2a_{n+1}=a_n-2$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1$

$-)\quad -2=\frac{1}{2}\times(-2)-1$ ← 計算用紙に $c=\frac{1}{2}c-1$ を解くと $c=-2$

$a_{n+1}+2=\frac{1}{2}(a_n+2)$

数列$\{a_n+2\}$は初項$a_1+2=1+2=3$
公比$\frac{1}{2}$の等比数列だから

$a_n+2=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \underline{a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2}$ //

(3) $a_1=6,\ a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$

$a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$型は $q^{n+1}$で割る

両辺を$3^{n+1}$で割る

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{6a_n}{3^1\times 3^n}+\dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}}$

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\times\dfrac{a_n}{3^n}+1$ ……①

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$とおくと①は $b_{n+1}=2b_n+1$ ……②

また $b_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{6}{3}=2$

② ⇔ $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$ ← 計算用紙に $c=2c+1$ を解くと $c=-1$

数列$\{b_n+1\}$は初項$b_1+1=2+1=3$
公比2の等比数列だから

$b_n+1=3\cdot 2^{n-1}$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}-1$

$\dfrac{a_n}{3^n}=3\cdot 2^{n-1}-1$

$\therefore\ \underline{a_n=3^n(3\cdot 2^{n-1}-1)}$ //

(2) $a_{n+1}=pa_n+q$型（等比型）は
$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$の形にすれば等比数列

元の式で $a_{n+1}=a_n=c$ とおいた
$\underline{c=pc+q}$ を解けば $c$の値がわかる

この式を「特性方程式」という

# ショートトライアル　数列　１１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+2k)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2n+3$

(3) $a_1=4,\ a_{n+1}=12a_n+4^{n+2}$

# ショートトライアル　数列　１１

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+2k)$

$$(与式)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\times\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+n(n+1)$$
$$=n(n+1)\left(\frac{2n+1}{2}+1\right)$$
$$=n(n+1)\times\frac{2n+1+2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$$(与式)=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{3n+1}$$

**2**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

(帰納的に $a_n>0$ だから) 逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=\frac{2a_n}{a_n}+\frac{3}{a_n}$$
$$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}=2+3\times\frac{1}{a_n}\cdots\cdots①$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと ①は $b_{n+1}=2+3b_n$ ……②

また $b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

② ⇔ $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ ← $C=2+3C$ を解くと $C=-1$

数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2+1=3$

公比3の等比数列だから

$$b_n+1=3\cdot3^{n-1}$$
$$\therefore b_n=3^n-1$$
$$\frac{1}{a_n}=3^n-1$$
$$\therefore a_n=\frac{1}{3^n-1}$$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2n+3$

$n\geqq2$ のとき (必ずかく)

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+3)$$
$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n+3(n-1)$$
$$=2+n^2-n+3n-3$$
$$=n^2+2n-1\cdots\cdots①$$

①に $n=1$ を代入すると $a_1=1+2-1=2$

$n=1$ のとき成り立つ (必ずかく)

よって　$a_n=n^2+2n-1$

> 階差数列の公式を使ったときの約束
> 「$n\geqq2$ のとき」「$n=1$ のとき成り立つ」
> は必ず書かないと○になりません。
> そろそろ忘れたりしていませんか？

(3) $a_1=4,\ a_{n+1}=12a_n+4^{n+2}$

両辺を $4^{n+1}$ でわると

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{12a_n}{4\times4^n}+\frac{4^{n+2}}{4^{n+1}}$$
$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=3\times\frac{a_n}{4^n}+4\cdots\cdots①$$

$\dfrac{a_n}{4^n}=b_n$ とおくと ①は $b_{n+1}=3b_n+4$ …②

また $b_1=\dfrac{a_1}{4^1}=\dfrac{4}{4}=1$.

② ⇔ $b_{n+1}+2=3(b_n+2)$ ← $C=3C+4$ を解くと $C=-2$

数列 $\{b_n+2\}$ は初項 $b_1+2=1+2=3$

公比3の等比数列だから

$$b_n+2=3\cdot3^{n-1}$$
$$b_n=3^n-2$$
$$\frac{a_n}{4^n}=3^n-2$$
$$\therefore a_n=4^n(3^n-2)$$

---

① $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ のような分数型 → 逆数をとる

② $a_{n+1}=pa_n+q^{n}$ 型 → $q^{n+1}$ でわる

(1), (3)のようなタイプの問題はヒント無しで解けるようになってほしい。

# ショートトライアル　数列　１２

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 5$，$a_{n+1} = a_n - 4$

(2)　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 3a_n + 2$

$\boxed{2}$　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ と一般項 $a_n$ の間に，$S_n = 2a_n - n$ の関係があるとき，一般項 $a_n$ を求めよ。

$\boxed{3}$　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = 3^n - 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n} 2k \cdot 3^{k-1}$$

# ショートトライアル　数列　１２

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n - 4$

初項5、公差−4の等差数列

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-4)$$

$$\therefore a_n = -4n + 9$$

(2)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n + 2$

$$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$

公比3の等比数列だから

$$a_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3^n - 1$$

**2**　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ と一般項 $a_n$ の間に，$S_n = 2a_n - n$ の関係があるとき，一般項 $a_n$ を求めよ。

$n=1$ のとき　$a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$ より $a_1 = 1$

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} - (n+1)$$

$$-)\ S_n = 2a_n - n$$

$$S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n - 1$$

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n - 1$$

$$-a_{n+1} = -2a_n - 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

数列 $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

公比2の等比数列だから

$$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

**3**　初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が，$S_n = 3^n - 1$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$n=1$ のとき　$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

$n \geqq 2$ のとき　$\left[\begin{array}{l} S_n = 3^n - 1 \text{ より} \\ S_{n-1} = 3^{n-1} - 1 \end{array}\right]$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$$

$$= 3^n - 3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1}$$

$$= (3-1) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \cdots ①$$

$n=1$ のとき ① は $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$ で成り立つ

よって　$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

**4**　次の和 $S$ を求めよ。

$$S = \sum_{k=1}^{n} 2k \cdot 3^{k-1}$$

S−rS法

$$S = 2\cdot1 + 4\cdot3 + 6\cdot3^2 + \cdots + 2n\cdot3^{n-1}$$

$$-)\ 3S = \quad 2\cdot3 + 4\cdot3^2 + \cdots\cdots + 2n\cdot3^n$$

$$-2S = \underbrace{2\cdot1 + 2\cdot3 + 2\cdot3^2 + \cdots + 2\cdot3^{n-1}}_{\text{初項2、公比3、項数nの等比数列の和}} - 2n\cdot3^n$$

$$-2S = \frac{2(3^n - 1)}{3-1} - 2n\cdot3^n$$

$$-2S = 3^n - 1 - 2n\cdot3^n$$

$$-2S = (1-2n)\cdot3^n - 1$$

$$\therefore S = \frac{(2n-1)\cdot3^n + 1}{2}$$

漸化式の基礎　この①〜④は確実に！

① $a_{n+1} = a_n + d$　（等差型）

② $a_{n+1} = r a_n$　（等比型）

③ $a_{n+1} = a_n + (n\text{の式})$　（階差型）

④ $a_{n+1} = p a_n + q$　（特性型）← C使う

とにかく大事

# ショートトライアル　数列　１２．５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　一般項 $a_n$ が $a_n = 3n - 2$ である数列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $4n$ 個の数が入るものとする。

1, 4, 7, 10 | 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34 | 37, ……

次の問いに答えよ。

(1)　第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。

(2)　第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。

(3)　第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。

(4)　2020 は第何群の何番目か。

$\boxed{2}$　次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1}$

# ショートトライアル　数列　１２．５

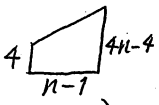
＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　一般項 $a_n$ が $a_n = 3n-2$ である数列を，次のような群に分ける。ただし，第 $n$ 群には $4n$ 個の数が入るものとする。

1, 4, 7, 10 | 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34 | 37, ……

次の問いに答えよ。

(1)　第 $n$ 群の最初の数を $n$ の式で表せ。




一般項は $a_k = 3k-2$ ……①

$n \geqq 2$ のとき 第1群から第$(n-1)$群までの項数は

$4+8+12+\cdots+(4n-4) = \frac{1}{2}\times(n-1)\{4+(4n-4)\}$

$= 2n(n-1)$ 個

よって第$n$群の最初の数は，この数列の第 $2n(n-1)+1$ 項

その数は①より

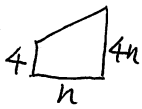
$a_{2n(n-1)+1} = 3\{2n(n-1)+1\}-2$

$= 6n^2-6n+1$

$n=1$ のとき $a_1 = 6-6+1 = 1$ で成り立つ。

よって求める数は　$6n^2-6n+1$ //

(2)　第 $n$ 群の最後の数を $n$ の式で表せ。




第1群から第$n$群までの項数は

$4+8+\cdots+4n = \frac{1}{2}n(4+4n)$

$= 2n(n+1)$ 個 ……②

①より第$n$群の最後の数は

$a_{2n(n+1)} = 3\{2n(n+1)\}-2$

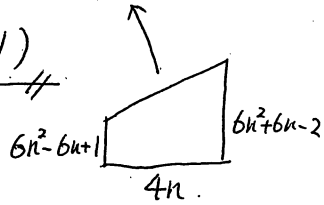
$= 6n^2+6n-2$ //

(3)　第 $n$ 群に入るすべての数の和 $S$ を求めよ。

求める和は（初項 $6n^2-6n+1$，末項 $6n^2+6n-2$，項数 $4n$ の等差数列の和）注意!

$S = \frac{1}{2}\times 4n\times\{(6n^2-6n+1)+(6n^2+6n-2)\}$

$= 2n(12n^2-1)$ //




(4)　2020 は第何群の何番目か。

①より $3k-2 = 2020$ を解くと $k = 674$

2020は第674項である。（$a_{674} = 2020$）

(2)の②より第1群から第$n$群までの項数は $2n(n+1)$ 個

$n=17$ 代入して　$2\times17\times(17+1) = 612$ ←（17群の最後は $a_{612}$）

$n=18$ 代入して　$2\times18\times(18+1) = 684$ ←（18群の最後は $a_{684}$）

$612 < 674 \leqq 684$ であり

$674-612 = 62$ だから

2020は第18群の62番目である //

**2**　次の和を求めよ。

(1)　$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

(与式) $= \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}\right)$

$= n(n+1)\times\frac{2n+1+3}{6} = n(n+1)\times\frac{2n+4}{6}$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ //

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$　　部分分数分解

(与式) $= \frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ //

(3)　$\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}$

初項9，公比3，項数$n-1$の等比数列の和

(与式) $= \sum_{k=1}^{n-1}9\cdot3^{k-1} = \frac{9(3^{n-1}-1)}{3-1}$

$= \frac{9\cdot3^{n-1}-9}{2} = \frac{3^{n+1}-9}{2}$ //

公式

$\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

# ショートトライアル　数列　１３

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ と一般項 $a_n$ の間に，$S_n = n - a_n$ の関係があるとき，一般項 $a_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 5$，$a_{n+1} = 3a_n$

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$
（$b_n = a_{n+1} - a_n$ と置き換えて解け。）

# ショートトライアル　数列　１３

＿＿組＿＿番　氏名　解答

**1**　数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ と一般項 $a_n$ の間に，$S_n = n - a_n$ の関係があるとき，一般項 $a_n$ を求めよ。

$n=1$ のとき　$a_1 = S_1 = 1 - a_1$　より　$a_1 = \frac{1}{2}$

$$S_{n+1} = (n+1) - a_{n+1}$$
$$-)\ S_n = n - a_n$$
$$S_{n+1} - S_n = 1 - a_{n+1} + a_n$$
$$a_{n+1} = 1 - a_{n+1} + a_n$$
$$2a_{n+1} = a_n + 1$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$
$$a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$$

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**2**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n$

初項5，公比3の等比数列だから

$$a_n = 5\cdot 3^{n-1}$$

(2)　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$= 1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n-1}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{3(2n-1)-1}{2(2n-1)}$$
$$= \frac{6n-4}{2(2n-1)} = \frac{3n-2}{2n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

① に $n=1$ 代入すると $a_1 = \frac{3-2}{2-1} = 1$ で成り立つ

よって $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}$

(3)　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$

$\boxed{b_n = a_{n+1} - a_n \text{ とおく}}$ → $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1) - 1$$
$$-)\ a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$$
$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2$$
$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで　$a_2 = 3a_1 + 2\times 1 - 1$
$= 3\times 1 + 2 - 1 = 4$ より

$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$ であり

① $\Leftrightarrow b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3 + 1 = 4$
公比3の等比数列だから

$$b_n + 1 = 4\cdot 3^{n-1}$$
$$b_n = 4\cdot 3^{n-1} - 1$$
$$a_{n+1} - a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 1$$
$$-)\ a_{n+1} - 3a_n = 2n - 1$$ ← 問題文そのまま

$$2a_n = 4\cdot 3^{n-1} - 2n$$
$$\therefore a_n = 2\cdot 3^{n-1} - n$$

別解

$a_{n+1} + p(n+1) + q = 3(a_n + pn + q)$ より

$a_{n+1} = 3a_n + 2pn - p + 2q$ と

$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$ が一致するとき

$\begin{cases} 2p = 2 \\ -p + 2q = -1 \end{cases}$ を解くと $\begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \end{cases}$ だから

$a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$ となり

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 $a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$
公比3の等比数列だから

$$a_n + n = 2\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore a_n = 2\cdot 3^{n-1} - n$$

# ショートトライアル　数列　１４

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**1**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

(2)　$a_1 = 4,\ a_{n+1} = -3a_n$

(3)　$a_1 = 10,\ 2a_{n+1} = a_n + 6$

(4)　$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$

**2**　すべての自然数 $n$ について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

# ショートトライアル　数列　１４

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

初項2、公差5の等差数列だから

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 5$$

$$\therefore a_n = 5n - 3$$

(2)　$a_1 = 4,\ a_{n+1} = -3a_n$

初項4、公比$-3$の等比数列だから

$$a_n = 4\cdot(-3)^{n-1}$$

(3)　$a_1 = 10,\ 2a_{n+1} = a_n + 6$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$$

$$a_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}(a_n - 6)$$

数列$\{a_n - 6\}$は初項$a_1 - 6 = 10 - 6 = 4$

公比$\frac{1}{2}$の等比数列だから

$$a_n - 6 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 6$$

(4)　$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$

$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0 \cdots ①$ とおく

$① \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n)$

数列$\{a_{n+1} + 2a_n\}$は、

初項 $a_2 + 2a_1 = 2 + 2\times 1 = 4$.

公比3の等比数列だから

$$a_{n+1} + 2a_n = 4\cdot 3^{n-1} \cdots ②$$

また、$① \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n)$

数列$\{a_{n+1} - 3a_n\}$は

初項 $a_2 - 3a_1 = 2 - 3\cdot 1 = -1$.

公比$-2$の等比数列だから

$$a_{n+1} - 3a_n = -1\cdot(-2)^{n-1} \cdots ③$$

②−③より

$$5a_n = 4\cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{4\cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}}{5}$$

(3)と(4)は特性方程式を使う

(3) $c = \frac{1}{2}c + 6$　　(4) $t^2 - t - 6 = 0$

**2**　すべての自然数 $n$ について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots\cdots ①$$

(proof) 証明する等式を①とおく.

(i) $n = 1$ のとき

(①の左辺) $= 1^2 = 1$

(①の右辺) $= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1) = 1$

よって $n = 1$ のとき成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき, すなわち

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \cdots ②$$

が成り立つと仮定して.

$n = k+1$ のとき, すなわち

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\} \cdots ③$$

を証明すればよい.

(③の左辺) $= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2$

↓②(仮定)

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left\{\frac{1}{6}k(2k+1) + k + 1\right\}$$

$$= (k+1)\times\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k + 7k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

$$= (③の右辺)$$

絶対に省略しないこと!

よって　$n = k+1$ のとき成り立つ.

(i)(ii)より, すべての自然数 $n$ について.

①が成り立つことが証明された ▨

数学的帰納法による証明

(i) $n = 1$ のときの成立を示す.

(ii) $n = k$ のとき成り立つと仮定して

$n = k+1$ のときの成立を示す.

とにかく仮定を使うことを考える.

# ショートトライアル　数列　１５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ すべての自然数 $n$ に対して，$2^{2n-1}+1$ が 3 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ ある等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までの和が 180，初項から第 10 項までの和が 760 である。この数列の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

# ショートトライアル　数列　１５

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　すべての自然数 $n$ に対して，$2^{2n-1}+1$ が 3 の倍数であることを証明せよ。

(proof)「$2^{2n-1}+1$ が3の倍数」を①とする.

(i) $n=1$ のとき　$2^{2-1}+1=3$ で成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき，すなわち

$$2^{2k-1}+1=3m \quad (m\text{は整数})\cdots②$$

が成り立つと仮定して，

$n=k+1$ のとき，すなわち

$2^{2(k+1)-1}+1$ が3の倍数である

ことを証明すればよい.

$$2^{2(k+1)-1}+1$$
$$=2^{2k+2-1}+1$$
$$=2^{(2k-1)+2}+1$$
$$=2^{2k-1}\times 2^2+1$$

(仮定)（②の $2^{2k+1}+1=3m$ より $2^{2k+1}=3m-1$ として代入する）

$$=(3m-1)\times 2^2+1$$
$$=12m-4+1$$
$$=12m-3$$
$$=3(4m-1)$$

省略はしない

$4m-1$ は整数だから

$2^{2(k+1)-1}+1$ は3の倍数である

よって $n=k+1$ のとき成り立つ.

(i)(ii)より　すべての自然数 $n$ について

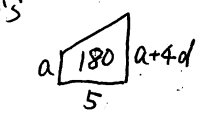
①が成り立つことが証明された. ▨

**2**　ある等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 5 項までの和が 180，初項から第 10 項までの和が 760 である。この数列の一般項を求めよ。

初項 $a$，公差 $d$ とすると $a_n=a+(n-1)d$.

初項から第5項までの和が180だから

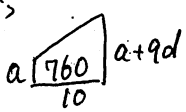
$\frac{1}{2}\times 5\times\{a+(a+4d)\}=180$




すなわち　$a+2d=36\cdots①$

初項から第10項までの和が760だから

$\frac{1}{2}\times 10\times\{a+(a+9d)\}=760$




すなわち　$2a+9d=152\cdots②$

①,②を解くと　$a=4,\ d=16$.

よって　$a_n=4+(n-1)\times 16$

$\therefore a_n=16n-12$ //

**3**　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

逆数をとって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+3}{a_n}=\dfrac{a_n}{a_n}+\dfrac{3}{a_n}$

すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3\times\dfrac{1}{a_n}+1\cdots①$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$.

$① \Leftrightarrow b_{n+1}=3b_n+1$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$

数列 $\{b_n+\frac{1}{2}\}$ は初項 $b_1+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

公比3の等比数列だから

$$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$$
$$b_n=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{a_n}=\frac{3^n-1}{2}$$
$$\therefore a_n=\frac{2}{3^n-1}$$ //

# ショートトライアル　数列　１６

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　$a_1 = -1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ で定義された数列について，次の問いに答えよ。

(1)　$a_2$，$a_3$，$a_4$ を求めよ。

(2)　一般項 $a_n$ を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

$\boxed{2}$　数列 $\{a_n\}$ が等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2a_n + 5n - 12$ を満たすとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$a_1$ を求めよ。

(2)　$a_{n+1}$ と $a_n$ の関係式を求めよ。

(3)　$a_n$ を求めよ。

(4)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

# ショートトライアル　数列　１６

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

**1**　$a_1=-1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ で定義された数列について，次の問いに答えよ。

(1)　$a_2$，$a_3$，$a_4$ を求めよ。

$$a_2=\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

$$a_3=\frac{1}{2-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}$$

$$a_4=\frac{1}{2-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{7}{5}}=\frac{3}{7}$$

$$a_2=\frac{1}{3},\ a_3=\frac{3}{5},\ a_4=\frac{5}{7}$$

(2)　一般項 $a_n$ を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

$$a_n=\frac{2n-3}{2n-1}\quad\cdots\cdots①$$

と推測する

(i) $n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{2\cdot1-3}{2\cdot1-1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

$n=1$ のとき成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき すなわち $a_k=\dfrac{2k-3}{2k-1}\quad\cdots②$

が成り立つと仮定して.

$n=k+1$ のとき すなわち.

$$a_{k+1}=\frac{2(k+1)-3}{2(k+1)-1}\quad\cdots③$$

を証明すればよい. 与えられた漸化式より

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}\longleftarrow \text{仮定②を代入}$$

$$=\frac{1}{2-\frac{2k-3}{2k-1}}=\frac{1}{\frac{2(2k-1)-(2k-3)}{2k-1}}$$

$$=\frac{1}{\frac{4k-2-2k+3}{2k-1}}=\frac{2k-1}{2k+1}$$

$$=\frac{2(k+1)-3}{2(k+1)+1}=③\text{の右辺}$$

よって $n=k+1$ のとき成り立つ.

(i)(ii)よりすべての自然数 $n$ について①が成り立つから

$$a_n=\frac{2n-3}{2n-1}$$

**2**　数列 $\{a_n\}$ が等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2a_n+5n-12$ を満たすとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$a_1$ を求めよ。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$ とおくと

$$S_n=2a_n+5n-12\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=2a_1+5\times1-12$.

$$a_1=2a_1+5-12$$

$$-a_1=-7$$

$$a_1=7$$

(2)　$a_{n+1}$ と $a_n$ の関係式を求めよ。

①より

$$S_{n+1}=2a_{n+1}+5(n+1)-12$$

$$-)\quad S_n=2a_n+5n\quad-12$$

$$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n+5$$

$$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+5$$

$$-a_{n+1}=-2a_n+5$$

$$a_{n+1}=2a_n-5\quad\cdots\cdots②$$

(3)　$a_n$ を求めよ。

$② \Leftrightarrow a_{n+1}-5=2(a_n-5)$

数列 $\{a_n-5\}$ は初項 $a_1-5=7-5=2$

公比 2 の等比数列だから

$$a_n-5=2\cdot2^{n-1}$$

$$a_n=2^n+5$$

(4)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$$

$$=2a_n+5n-12$$

$$=2\cdot(2^n+5)+5n-12$$

$$=2^{n+1}+5n-2$$

(別解)

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^n+5)=\sum_{k=1}^{n}2\cdot2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n}5$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+5n=2^{n+1}+5n-2$$