＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 (9, 3) における接線の方程式を求めよ。

2　曲線 $y=\sin x$ 上の点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ。

3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\cos 4x$

(2)　$y=e^{-2x}$

(3)　$y=(3x-1)^5$

1　曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 (9, 3) における接線の方程式を求めよ。

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ より接線の傾きは $\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$

よって接線の方程式は

$$y-3=\frac{1}{6}(x-9)$$

$$\therefore y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$$

$y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ではあるが

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ は覚えてもよい

2　曲線 $y=\sin x$ 上の点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ。

$y'=\cos x$ より接線の傾きは $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

接線の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})$$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$$

3　次の関数を微分せよ。

$\{\sin(ax+b)\}'=a\cos(ax+b)$

$\{\cos(ax+b)\}'=-a\sin(ax+b)$

(1)　$y=\cos 4x$

$y'=-4\sin 4x$

(2)　$y=e^{-2x}$

$y'=-2e^{-2x}$

$\{e^{ax+b}\}'=ae^{ax+b}$

(3)　$y=(3x-1)^5$

$y'=5(3x-1)^4\cdot(3x-1)'$

$=5(3x-1)^4\times 3=15(3x-1)^4$

ショートトライアル　数 III 微分法の応用　2　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ。

2　曲線 $y = \frac{4}{x}$ 上の点 $(-4,\ -1)$ における法線の方程式を求めよ。

3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \tan 2x$

(2)　$y = e^{x^2}$

(3)　$y = (2x^3 + 3)^4$

1　曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ。

$y' = -\sin x$ より接線の傾きは $-\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{2}$$

2　曲線 $y = \frac{4}{x}$ 上の点 $(-4,\ -1)$ における法線の方程式を求めよ。

$y' = -\frac{4}{x^2}$ ← $\left(y' = (4x^{-1})' = 4\cdot(-1)x^{-2} = -\frac{4}{x^2}\right)$

接線の傾き $-\frac{4}{(-4)^2} = -\frac{1}{4}$ なので

法線の傾きは 4 ← 法線の傾きmとすると $-\frac{1}{4}\times m = -1$ より $m = 4$

よって法線の方程式は

$$y - (-1) = 4\{x - (-4)\}$$

$$y = 4x + 15$$

3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \tan 2x$

(2)　$y = e^{x^2}$

(3)　$y = (2x^3 + 3)^4$

(1)　$y' = \frac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$

(2)　$y' = e^{x^2}\cdot(x^2)' = 2xe^{x^2}$

(3)　$y' = 4(2x^3+3)^3(2x^3+3)'$

$= 4(2x^3+3)^3 \times 6x^2$

$= 24x^2(2x^3+3)^3$

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y=\sqrt{x-1}$ の接線で原点を通るものの方程式を求めよ。

2　2 つの曲線 $y=\log x$ と $y=ax^2$ が点 P で共通の接線をもつとき，a の値と接線の方程式を求めよ。

1　曲線 $y=\sqrt{x-1}$ の接線で原点を通るものの方程式を求めよ。

接点を $(t, \sqrt{t-1})$ とおくと $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ より

接線は $y-\sqrt{t-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}(x-t)$ …①

①が $(0,0)$ を通るので

$$0-\sqrt{t-1}=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}(0-t)$$

$$-2(\sqrt{t-1})^2=-t$$

$$-2(t-1)=-t$$

$$t=2$$

①より $y-\sqrt{2-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}(x-2)$

$$\underline{y=\frac{1}{2}x}$$

2　2 つの曲線 $y=\log x$ と $y=ax^2$ が点 P で共通の接線をもつとき，a の値と接線の方程式を求めよ。

$f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$

接点の x 座標を t とおくと

$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$ より $\begin{cases} \log t=at^2 \cdots ① \\ \dfrac{1}{t}=2at \cdots ② \end{cases}$

②$\Leftrightarrow$ $a=\dfrac{1}{2t^2}$ …③

③を①に代入して $\log t=\dfrac{1}{2t^2}\times t^2$

$$\log t=\frac{1}{2}$$

$$\therefore t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

これを③に代入して $a=\dfrac{1}{2(\sqrt{e})^2}=\underline{\dfrac{1}{2e}}$

また $g(\sqrt{e})=\log\sqrt{e}=\log_e e^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$ ←（接点の y 座標）

接点は $(\sqrt{e}, \frac{1}{2})$ なので接線は

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})$$

$$\therefore \underline{y=\frac{1}{\sqrt{e}}x-\frac{1}{2}}$$

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y=\sqrt{x-2}$ の接線で傾きが 1 であるものの方程式を求めよ。

2　2 つの曲線 $y=-x^2$ と $y=\dfrac{1}{x}$ に同時に接する接線の方程式を求めよ。

1　曲線 $y=\sqrt{x-2}$ の接線で傾きが 1 であるものの方程式を求めよ。

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$　曲線上の接点を $(t,\sqrt{t-2})$ とおく

接線の傾きが 1 なので $\dfrac{1}{2\sqrt{t-2}}=1$ より

$2\sqrt{t-2}=1$ として両辺2乗 $4(t-2)=1$

$\therefore t=\dfrac{9}{4}$

接点の y 座標は $\sqrt{\dfrac{9}{4}-2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

よって接点は $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ なので求める接線は

$$y-\frac{1}{2}=\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

$$\therefore\ y=x-\frac{7}{4}$$

2　2 つの曲線 $y=-x^2$ と $y=\dfrac{1}{x}$ に同時に接する接線の方程式を求めよ。

$y=-x^2$ 上の接点を $(t,-t^2)$ とする $y'=-2x$ より

接線は $y-(-t^2)=-2t(x-t)$

$y=-2tx+2t^2+(-t^2)$

$y=-2tx+t^2$ …①

$y=\dfrac{1}{x}$ 上の接点を $\left(s,\dfrac{1}{s}\right)$ とおくと $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より

接線は $y-\dfrac{1}{s}=-\dfrac{1}{s^2}(x-s)$

$y=-\dfrac{1}{s^2}x+\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s}$

$y=-\dfrac{1}{s^2}x+\dfrac{2}{s}$ …②

①と②は一致するから

$$\begin{cases}-2t=-\dfrac{1}{s^2}\\ t^2=\dfrac{2}{s}\end{cases}\iff\begin{cases}t=\dfrac{1}{2s^2}\ \cdots③\\ st^2=2\ \cdots④\end{cases}$$

③を④に代入して t 消去 $s\times\left(\dfrac{1}{2s^2}\right)^2=2$

$\dfrac{1}{4s^3}=2 \iff s^3=\dfrac{1}{8} \iff$ sは実数 $s=\dfrac{1}{2}$

③より $t=\dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}=2$　$\begin{cases}s=\dfrac{1}{2}\\ t=2\end{cases}$

$t=2$ より ①は $y=-4x+4$

$t=\dfrac{1}{2}$ より ②は $y=-4x+4$

以上より求める接線は $y=-4x+4$

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^2 e^{-x}$

(2) $y = x \sin 4x$

2 曲線 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2,\ -1)$ における接線および法線の方程式を求めよ。

3 $f(x) = x - \sqrt{2x}$ のグラフをかけ。

---

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^2 e^{-x}$

$y' = (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x})$

$= (2x - x^2) e^{-x} = \underline{-x(x-2)e^{-x}}$ //

(2) $y = x \sin 4x$

$y' = (x)' \sin 4x + x \cdot (\sin 4x)'$

$= 1 \times \sin 4x + x \cdot 4\cos 4x$

$= \underline{\sin 4x + 4x\cos 4x}$ //

2 曲線 $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2,\ -1)$ における接線および法線の方程式を求めよ。

$\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分して

$\dfrac{2x}{8} + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{8} + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y^2}{2}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{2x}{8} + \dfrac{2y}{2} \times \dfrac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{4y}$

接線の傾きは $-\dfrac{2}{4 \times (-1)} = \dfrac{1}{2}$

よって接線は $y - (-1) = \dfrac{1}{2}(x - 2)$

$\therefore \underline{y = \dfrac{1}{2}x - 2}$ //

法線は

$y - (-1) = -2(x - 2)$

$\therefore \underline{y = -2x + 3}$ //

3 $f(x) = x - \sqrt{2x}$ のグラフをかけ。

定義域は $x \geqq 0$

$f'(x) = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{2\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

$\left(\sqrt{2x}\right)' = \left(\sqrt{2} \times \sqrt{x}\right)'$

$= \sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)' = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ を解く

$2\sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$2\sqrt{x} = \sqrt{2}$

両辺2乗

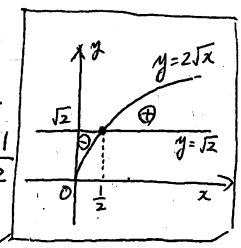
$4x = 2$

$x = \dfrac{1}{2}$

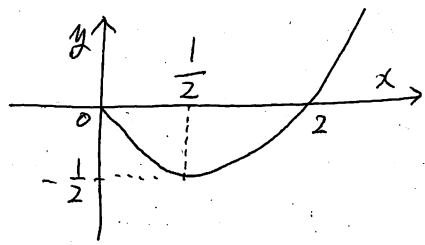
$f(0) = 0 - 0 = 0$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \sqrt{2 \times \dfrac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$



x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗



x切片

$x - \sqrt{2x} = 0$ を解く

$x = \sqrt{2x}$

$x^2 = 2x$

$x = 0, 2$

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \dfrac{\sin 2x}{x}$

(2)　$y = e^{2x}\cos 3x$

(3)　$y = (x+1)\sqrt{x+2}$

2　$f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ の極値を求め，グラフをかけ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ である。

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \dfrac{\sin 2x}{x}$

$$y' = \frac{(2\cos 2x)\cdot x - (\sin 2x)\cdot 1}{x^2}$$
$$= \frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2} \quad //$$

(2)　$y = e^{2x}\cos 3x$

$$y' = 2e^{2x}\cos 3x + e^{2x}\cdot(-3\sin 3x)$$
$$= e^{2x}(2\cos 3x - 3\sin 3x) \quad //$$

(3)　$y = (x+1)\sqrt{x+2}$

$$y' = 1\times\sqrt{x+2} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+2})^2 + (x+1)}{2\sqrt{x+2}} = \frac{2x+4+x+1}{2\sqrt{x+2}}$$
$$= \frac{3x+5}{2\sqrt{x+2}} \quad //$$

2　$f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ の極値を求め，グラフをかけ。

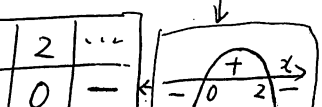
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ である。

$f(x) = x^2e^{-x}$．定義域はすべての実数

$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x}) = \underbrace{-x(x-2)}_{\oplus}e^{-x}$

$f'(x) = 0$ を解くと $x = 0, 2$．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘



$f(0) = 0$

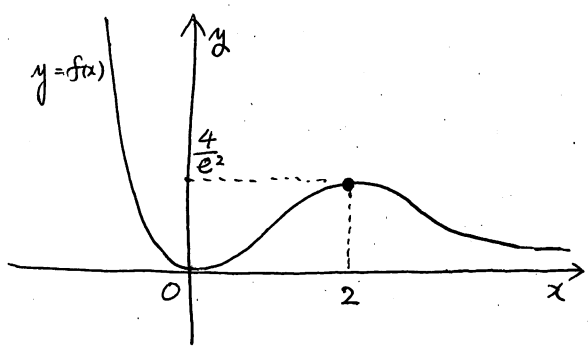
$f(2) = \dfrac{4}{e^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{t\to\infty}\frac{(-t)^2}{e^{-t}} = \lim_{t\to\infty}t^2e^t = \infty$

$x = -t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$

$x = 2$ で極大値 $\dfrac{4}{e^2}$，$x = 0$ で極小値 0．//



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = x^2 \log x$

(2)　$y = x \sin 2x + \cos 2x$

2　$f(x) = \sqrt{x^3+1}$ とする。$f'(x)$，$f''(x)$ を計算し，増減，凹凸を調べてグラフの概形を描け。

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = x^2 \log x$

$$y' = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)'$$
$$= 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x$$
$$= \underline{x(2\log x + 1)} \quad //$$

(2)　$y = x \sin 2x + \cos 2x$

$$y' = (x)' \sin 2x + x(\sin 2x)' + (\cos 2x)'$$
$$= 1 \cdot \sin 2x + x \cdot 2\cos 2x + (-2\sin 2x)$$
$$= \underline{2x\cos 2x - \sin 2x} \quad //$$

2　$f(x) = \sqrt{x^3+1}$ とする。$f'(x)$，$f''(x)$ を計算し，増減，凹凸を調べてグラフの概形を描け。

$x^3+1 \geqq 0$ より $(x+1)(x^2-x+1) \geqq 0$ だから

$x \geqq -1$ が定義域

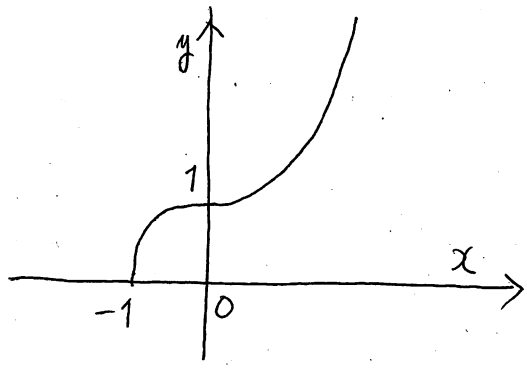
$$f'(x) = \{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\}' = \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}(x^3+1)'$$
$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} \geqq 0,$$ $f'(x)=0$ を解くと $x=0$.

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x \cdot \sqrt{x^3+1} - x^2 \times \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}$$
$$= \frac{3}{2} \times \frac{4x(x^3+1) - 3x^4}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$
$$= \frac{3x(x^3+4)}{4(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$

$f''(x)=0$ を解くと $x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$+$
$f''(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↱	1	⤴

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3+1} = \infty$$



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$

(2)　$y = xe^{-2x}$

2　$f(x) = x\log x$ とする。$f'(x)$，$f''(x)$ を計算し，増減，凹凸を調べてグラフの概形を描け。
ただし $\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ とする

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \dfrac{\cos 2x}{x^2}$

$$y' = \frac{(\cos 2x)'x^2 - \cos 2x\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(-2\sin 2x)\cdot x^2 - (\cos 2x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x\sin 2x - 2\cos 2x}{x^3} = \frac{-2(x\sin 2x + \cos 2x)}{x^3}$$

どちらでもOK

(2)　$y = xe^{-2x}$

$$y' = (x)'\cdot e^{-2x} + x(e^{-2x})' = 1\cdot e^{-2x} + x\cdot(-2e^{-2x})$$

$$= (1-2x)e^{-2x}$$

2　$f(x) = x\log x$ とする。$f'(x)$，$f''(x)$ を計算し，増減，凹凸を調べてグラフの概形を描け。
ただし $\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ とする.

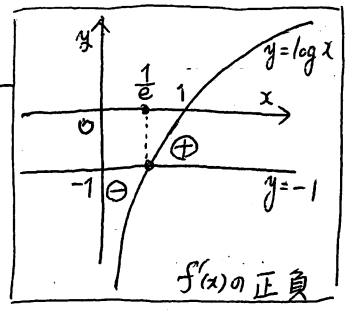
定義域は $x > 0$.

$f'(x) = 1\times\log x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \log x + 1$.

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$　$(\because x>0)$

$f'(x) = 0$ を解くと $\log x = -1$ より $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	／	↳	$-\frac{1}{e}$	⤴



$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\log_e\frac{1}{e} = \frac{1}{e}\times(-1) = -\frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$ のとき極小値 $-\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x\log x = 0$.

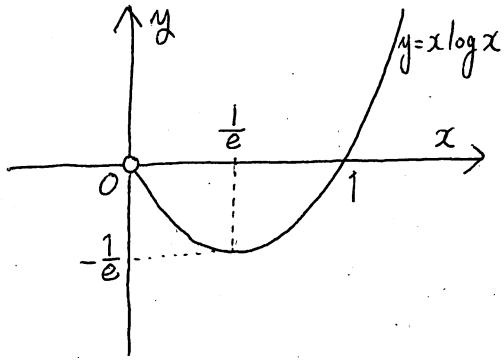
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\log x = \infty$

$x\log x = 0$ を解く

$x>0$ より $\log_e x = 0$

$x = e^0 = 1$.

x 切片は $(1, 0)$



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　関数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ の増減，極値，漸近線を調べてグラフをかけ。

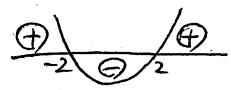
2　関数 $f(x)=x+2\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ の増減，極値を調べてグラフをかけ。

1　関数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ の増減，極値，漸近線を調べてグラフをかけ。

定義域は $x\neq 0$．　$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

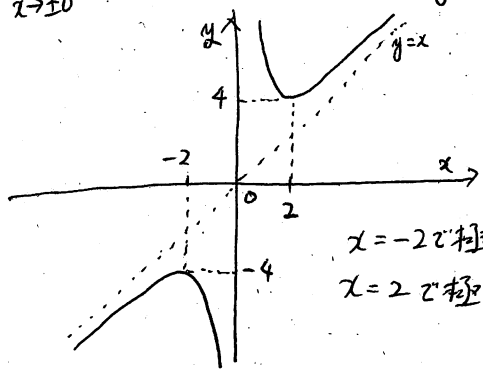
$f(2)=2+\dfrac{4}{2}=4$，$f(-2)=-2+\dfrac{4}{-2}=-4$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	/	↘	4	↗



$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$ より $y=x$ を漸近線にもつ

$\displaystyle\lim_{x\to\pm 0}f(x)=\pm\infty$（複号同順）より y 軸を漸近線にもつ



$x=-2$ で極大値 -4

$x=2$ で極小値 4

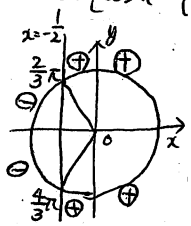
2　関数 $f(x)=x+2\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ の増減，極値を調べてグラフをかけ。

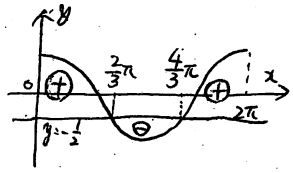
$f'(x)=1+2\cos x=2\left\{\cos x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$

$f'(x)=0$ を解くと

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ より

$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$





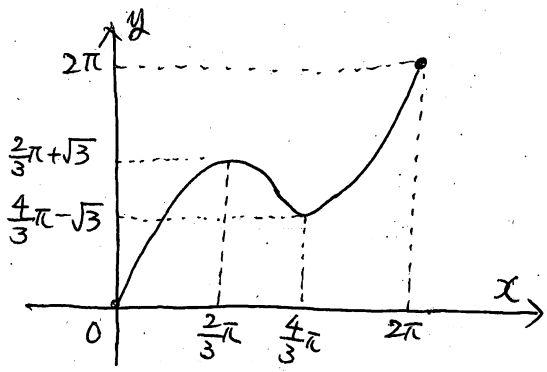
$f(0)=0+2\sin 0=0$，$f(2\pi)=2\pi+2\sin 2\pi=2\pi$

$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{2}{3}\pi+2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

$f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=\dfrac{4}{3}\pi+2\sin\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$	↘	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$	↗	2π

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で極小値 $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ 上の点 $(-1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

2　$y=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ の増減，極値，漸近線を調べてグラフをかけ。

1　曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ 上の点 $(-1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$y'=-\dfrac{2}{x^2}$ なので接線の傾きは $-\dfrac{2}{(-1)^2}=-2$.

よって接線は

$$y-(-2)=-2\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=-2x-4$$

2　$y=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ の増減，極値，漸近線を調べてグラフをかけ。

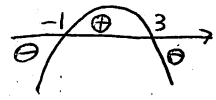
定義域はすべての実数

$$y'=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

$y'=0$ を解くと $x=-1,\ 3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{6}$	↘

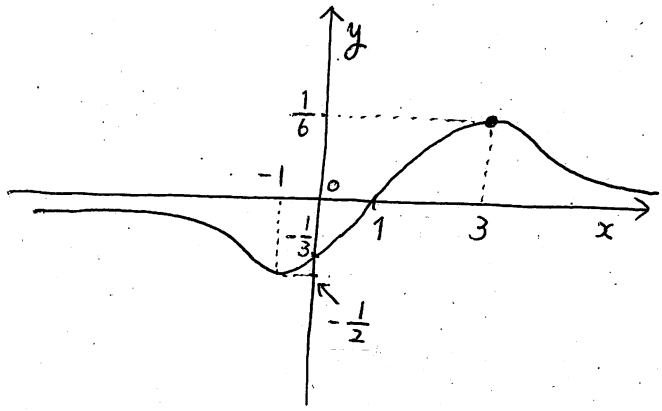


$x=-1$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{2}$

$x=3$ のとき極大値 $\dfrac{1}{6}$

$x=0$ のとき $y=-\dfrac{1}{3}$ (y切片)

$\lim_{x\to\pm\infty} y=0$ なので x 軸を漸近線にもつ



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(1+\sin 3x)\cos 2x$

(2)　$y=\dfrac{x}{\sin x}$

2　a は定数とする。方程式 $e^x-ax=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(1+\sin 3x)\cos 2x$

$y'=3\cos 3x\cdot\cos 2x+(1+\sin 3x)\cdot(-2\sin 2x)$

$=3\cos 3x\cos 2x-2\sin 2x-2\sin 3x\sin 2x$ //

(2)　$y=\dfrac{x}{\sin x}$

$y'=\dfrac{1\cdot\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$ //

2　a は定数とする。方程式 $e^x-ax=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

$a=\dfrac{e^x}{x}$ ……①

$\begin{cases} y=a & \cdots\cdots② \\ y=\dfrac{e^x}{x} & \cdots\cdots③ \end{cases}$　定義域は $x\neq 0$.

③について $y'=\dfrac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

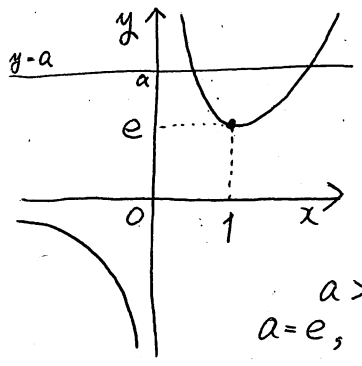
$y'=0$ を解くと $x=1$.　$x=1$ のとき $y=e$.

x	…	0	…	1	…
y'	−	/	−	0	+
y	↘	/	↘	e	↗

$x=-t$ とおくと
$x\to-\infty$ のとき
$t\to\infty$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{e^{-t}}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\dfrac{t}{e^t}\right)=0$

$\lim_{x\to+0}\dfrac{e^x}{x}=\infty$, $\lim_{x\to-0}\dfrac{e^x}{x}=-\infty$　x軸とy軸を漸近線にもつ



①の異なる実数解の個数は②と③の共有点の個数と一致するから、グラフより

$a>e$ のとき 2個
$a=e$, $a<0$ のとき 1個
$0\leqq a<e$ のとき 0個 //

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \sqrt{x}\sin 4x$

(2)　$y = \dfrac{\cos 3x}{x^2}$

2　関数 $f(x) = (x+1)e^{-x}$ の増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線を調べてグラフをかけ。
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ を使ってもよい。

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \sqrt{x}\sin 4x = x^{\frac{1}{2}}\sin 4x$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin 4x + x^{\frac{1}{2}}\cdot 4\cos 4x = \frac{\sin 4x}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\cos 4x$$

$$= \frac{\sin 4x + 8x\cos 4x}{2\sqrt{x}} \quad //$$

(2)　$y = \dfrac{\cos 3x}{x^2}$

$$y' = \frac{(-3\sin 3x)\cdot x^2 - (\cos 3x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-3x\sin 3x - 2\cos 3x}{x^3} \quad //$$

2　関数 $f(x) = (x+1)e^{-x}$ の増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線を調べてグラフをかけ。
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ を使ってもよい。

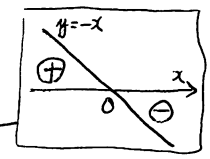
定義は すべての実数

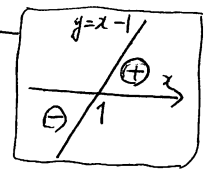
$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+1)\cdot(-e^{-x}) = -xe^{-x}$$

$$f''(x) = -\{1\cdot e^{-x} + x\cdot(-e^{-x})\} = -(1-x)e^{-x}$$

$$= (x-1)e^{-x}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{2}{e}$	↘





$f(0) = (0+1)e^0 = 1$　　$x=0$ で極大値 1

$f(1) = (1+1)e^{-1} = \dfrac{2}{e}$　　変曲点は $\left(1, \dfrac{2}{e}\right)$

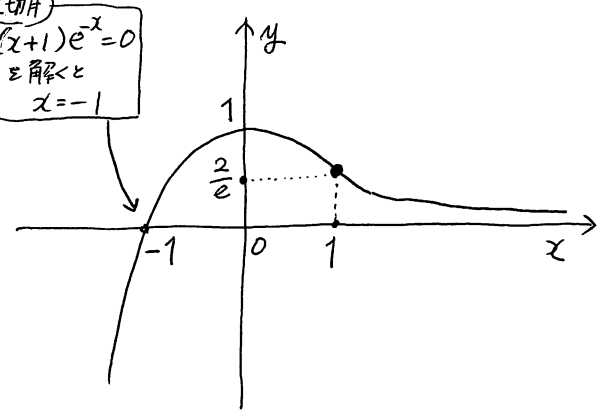
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^x} = 0$$

（$x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$）

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{e^{-t}} = \lim_{t\to\infty}(-t+1)e^t = -\infty$$

よって x 軸を漸近線にもつ

x 切片
$(x+1)e^{-x}=0$
を解くと
$x=-1$



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+3}$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と極値を求めよ。

2　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ の増減を調べ，グラフをかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ を使ってもよい。

1　関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+3}$ が $x=1$ で極値をもつとき，定数 a の値と極値を求めよ。

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2+3-2x^2-2ax}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2ax+3}{(x^2+3)^2}$$

$x=1$ で極値をもつので $f'(1)=0$ だから $f'(x)$ の分子について

$$-1^2-2a\times 1+3=0 \qquad \therefore\ a=1$$

このとき $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x-1)(x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$f(-3)=\dfrac{-3+1}{9+3}=-\dfrac{1}{6}$

$f(1)=\dfrac{1+1}{1+3}=\dfrac{1}{2}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

$x=1$ のとき 極大値 $\dfrac{1}{2}$

$x=-3$ のとき 極小値 $-\dfrac{1}{6}$

2　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ の増減を調べ，グラフをかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ を使ってもよい。

定義域は $x>0$.

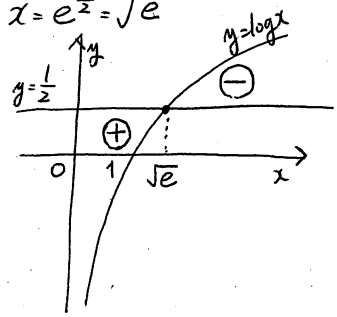
分子を $2\left(\frac{1}{2}-\log x\right)$ として見る

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{(x^2)^2}=\frac{x-2x\log x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ を解くと $1-2\log x=0$ より $\log x=\frac{1}{2}$

$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

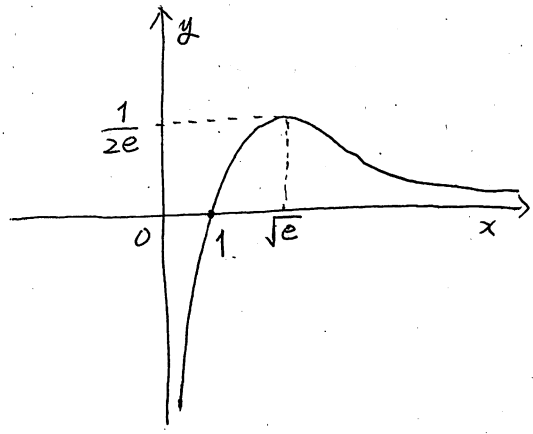
x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2e}$	↘



$f(\sqrt{e})=\dfrac{\log_e\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\dfrac{1}{2e}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ より x 軸を漸近線にもつ

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^2}=-\infty$ より y 軸を漸近線にもつ



1　$h \fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の１次の近似式を作れ。

2　p を有理数とするとき，次の近似式を導け。
$x \fallingdotseq 0$ のとき，$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

3　数直線上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として，$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α を求めよ。

4　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。
$0 < a < b$ のとき，$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}$

1　$h \fallingdotseq 0$ のとき，$\sin(a+h)$ の１次の近似式を作れ。

$f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$

$(a, \sin a)$ における接線は $y - \sin a = \cos a(x-a)$

$\therefore y = \cos a(x-a) + \sin a$

$h \fallingdotseq 0$ のとき $f(a+h) \fallingdotseq \cos a\{(a+h)-a\} + \sin a$

$\therefore \sin(a+h) \fallingdotseq h\cos a + \sin a$ //

2　p を有理数とするとき，次の近似式を導け。
$x \fallingdotseq 0$ のとき，$(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$

(proof) $f(x) = (1+x)^p$ とおくと $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$

$f(0) = 1$ より $(0, 1)$ における接線は $f'(0) = p$ だから

$y - 1 = p(x-0)$

$\therefore y = px + 1$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq px + 1$

$\therefore (1+x)^p \fallingdotseq 1 + px$ ▨

3　数直線上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として，$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ で表されるとき，時刻 t における P の速度 v，加速度 α を求めよ。

$v = \frac{dx}{dt} = -4\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = -2\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ //

$\alpha = \frac{dv}{dt} = -2\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ //

4　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。
$0 < a < b$ のとき，$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}$

(proof) $f(x) = \log x$ は $x > 0$ で微分可能　$f'(x) = \frac{1}{x}$

$[a, b]$ で平均値の定理により

$\frac{\log b - \log a}{b-a} = f'(c) = \frac{1}{c}$ ……①，$a < c < b$ ……②

をみたす実数 c が存在する

②より $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$ だから ①を代入して

$\frac{1}{b} < \frac{\log b - \log a}{b-a} < \frac{1}{a}$ が成り立つ

▨

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　数直線上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として，$x = 3t - t^3$ で表されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 $t = 1$ における P の速度 v_1，加速度 α_1 を求めよ。

(2)　時刻 $t = 2$ における P の速さ $|v_2|$，加速度の大きさ $|\alpha_2|$ を求めよ。

2　1 次の近似式を用いて，$\log 1.02$ の近似値を求めよ。

3　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$a > 0$ のとき，$\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$

1　数直線上を運動する点 P の座標が，時刻 t の関数として，$x = 3t - t^3$ で表されるとき，次の問いに答えよ。

(1)　時刻 $t = 1$ における P の速度 v_1，加速度 α_1 を求めよ。

$v = \dfrac{dx}{dt} = 3 - 3t^2$, $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = -6t$

$t = 1$ のとき

$v_1 = 3 - 3 \times 1^2 = \underline{0}$ //

$\alpha_1 = -6 \times 1 = \underline{-6}$ //

(2)　時刻 $t = 2$ における P の速さ $|v_2|$，加速度の大きさ $|\alpha_2|$ を求めよ。

(1)より $t = 2$ のとき $v_2 = 3 - 3 \cdot 2^2 = 3 - 12 = -9$

$\alpha_2 = -6 \times 2 = -12$ だから

$\underline{|v_2| = 9, \ |\alpha_2| = 12}$ //

2　1 次の近似式を用いて，$\log 1.02$ の近似値を求めよ。

$f(x) = \log(1+x)$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$f(0) = 0$ より $(0, 0)$ における接線は $f'(0) = 1$ だから

$y - 0 = 1 \times (x - 0)$　　$\therefore y = x$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq x$ すなわち $\log(1+x) \fallingdotseq x$

なので $\log 1.02 = \log(1 + 0.02) \fallingdotseq \underline{0.02}$ //

3　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$a > 0$ のとき，$\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$

(proof)

$f(x) = \log x$ は $x > 0$ で微分可能で $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$[a, a+1]$ で平均値の定理により

$\dfrac{\log(a+1) - \log a}{(a+1) - a} = f'(c) = \dfrac{1}{c}$ すなわち

$\log(a+1) - \log a = \dfrac{1}{c}$ ……①

$a < c < a+1$ ……②

をみたす実数 c が存在する

②より $\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ として①を代入すると

$\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$ が成り立つ

▨

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) $y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ。
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は使ってもよい。

(4) 方程式 $ax=\log x$ の実数解の個数が 1 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(5) e^{π} と π^{e} の大小を調べよ。

1　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$ //

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

$f'(1)=\dfrac{1-\log 1}{1^2}=1$ より 接線は

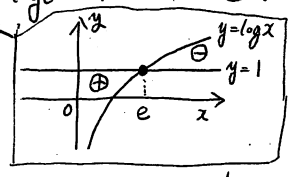
$y-0=1(x-1)$

$\therefore\ y=x-1$ //

(3) $y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ。
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は使ってもよい。

x	0	…	e	…
$f'(x)$	/	+	0	−
$f(x)$	/	↗	$\frac{1}{e}$	↘

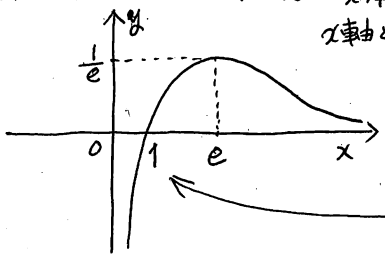
$f(x)=0$ を解くと $1-\log_e x=0$ より
$\log_e x=1 \Leftrightarrow x=e$.



$f(e)=\dfrac{\log e}{e}=\dfrac{1}{e}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$. $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to+0}\log x\cdot\frac{1}{x}=-\infty$

x軸と y軸を漸近線にもつ



x切片
$\log_e x=0$ より
$x=e^0=1$

(4) 方程式 $ax=\log x$ の実数解の個数が 1 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$a=\dfrac{\log x}{x}$ …①

$\begin{cases} y=a & \cdots ② \\ y=\dfrac{\log x}{x} & \cdots ③ \end{cases}$

①の実数解の個数は
②と③の共有点の個数と一致.
よって(3)より
$a=\dfrac{1}{e}$, $a\leqq 0$ //

(5) e^{π} と π^{e} の大小を調べよ。

(3)より $x>e$ で単調減少. $e<\pi$ より

$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$ だから 両辺 $e\pi$ 倍して

$\pi\log e>e\log\pi$

$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$ ここで底 e は 1 より大きいから

$e^{\pi}>\pi^{e}$ である //

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

2　次の関数の最大値，最小値を求めよ。
$y=(1+\sin x)\cos x\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

1　曲線 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

両辺をxについて微分して

$$\frac{2x}{8}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{y^2}{18}=0$$

$$\frac{x}{4}+\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{18}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{x}{4}+\frac{2y}{18}\times\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

$(-2,3)$における接線の傾きは $-\dfrac{9\times(-2)}{4\times3}=\dfrac{3}{2}$

求める接線は

$$y-3=\frac{3}{2}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x+6$$

2　次の関数の最大値，最小値を求めよ。
$y=(1+\sin x)\cos x\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$

$$y'=(1+\sin x)'\cos x+(1+\sin x)(\cos x)'$$

$$=\cos x\cdot\cos x+(1+\sin x)\cdot(-\sin x)$$

$$=1-\sin^2 x-\sin x-\sin^2 x$$

$$=-2\sin^2 x-\sin x+1$$

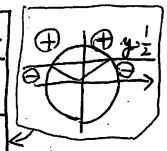
$$=-(2\sin^2 x+\sin x-1)$$

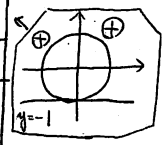
$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & -1 \\ 1 & & 1 \end{array}\ \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$=-(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

$y'=0$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ で解くと $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
-1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2\sin x-1$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\sin x+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$+$
y	1	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1





$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(1+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき $y=\left(1+\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)\cos\dfrac{5}{6}\pi=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $y=\left(1+\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)\cos\dfrac{3}{2}\pi=(1-1)\cdot0=0$

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　曲線 $y=e^{-2x}$ 上の点 $(-1,\ e^2)$ における接線の方程式を求めよ。

2　関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　対数微分法を用いて $f'(x)$ を求めよ。　($x>0$ とする)

(2)　$y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ。
ただし，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x}}=0$ である

(3)　e^{π} と π^{e} の大小を調べよ。

1　曲線 $y=e^{-2x}$ 上の点 $(-1,\ e^2)$ における接線の方程式を求めよ。

$y'=-2e^{-2x}$ より接線の傾きは $-2e^2$

よって接線の方程式は

$$y-e^2=-2e^2\{x-(-1)\}$$
$$y=-2e^2x-2e^2+e^2$$
$$\therefore\ y=-2e^2x-e^2$$

2　関数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ について，次の問いに答えよ。　($x>0$ とする)

(1)　対数微分法を用いて $f'(x)$ を求めよ。

$y=x^{\frac{1}{x}}$ で自然対数をとると $\log y=\log x^{\frac{1}{x}}$

すなわち $\log y=\dfrac{\log x}{x}$ となり 両辺を x で微分

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{(\log x)'\times x-\log x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x-\log x\cdot 1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dy}(\log y)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1-\log x}{x^2}\Leftrightarrow\frac{1}{y}\times f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

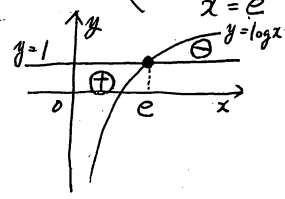
$$\Leftrightarrow f'(x)=y\times\frac{1-\log x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\times\frac{1-\log x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

(2)　$y=f(x)$ の増減を調べ，グラフをかけ。
ただし，$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim_{x\to+0} x^{\frac{1}{x}}=0$ である。

($f'(x)=0$ は $1-\log x=0$ より $x=e$)

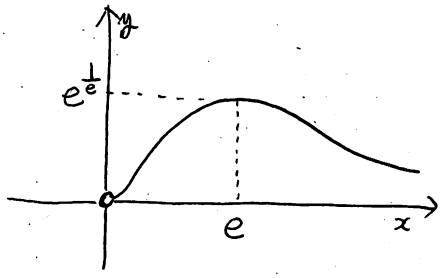
(1) より増減表をかく。

x	0	……	e	……
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘



$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=0$ なので x 軸を漸近線にもつ



(3)　e^{π} と π^{e} の大小を調べよ。

$f(x)$ は $x>e$ で減少だから $e<\pi$ より

$f(e)>f(\pi)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{e}}>\pi^{\frac{1}{\pi}}$ 両辺を $e\pi$ 乗して

$(e^{\frac{1}{e}})^{e\pi}>(\pi^{\frac{1}{\pi}})^{e\pi}$ なので $e^{\pi}>\pi^{e}$ である

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+1}$ が極値をもつように a の値の範囲を定めよ。

2　関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ について，増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線を調べてグラフをかけ。

1　関数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{x+1}$ が極値をもつように a の値の範囲を定めよ。

$$f'(x)=\frac{(x^2+ax)'(x+1)-(x^2+ax)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax)\times 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x+ax+a-x^2-ax}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+a}{(x+1)^2}$$ ← 分母は正

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもてばよい

$x^2+2x+a=0$ で判別式 $D>0$ だから

$\dfrac{D}{4}=1^2-1\times a>0$　すなわち　$a<1$ //

2　関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ について，増減，極値，凹凸，変曲点，漸近線を調べてグラフをかけ。

定義域は実数全体

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x)=-\left\{(x)'e^{-\frac{x^2}{2}}+x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\right\}$$

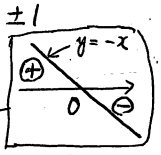
$f'(x)$ の計算がもう1回使える

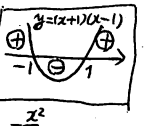
$$=-\left\{1\times e^{-\frac{x^2}{2}}+x\times\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right\}$$

$$=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}=(x+1)(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$f'(x)=0$ を解くと $x=0$，$f''(x)=0$ を解くと $x=\pm1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘



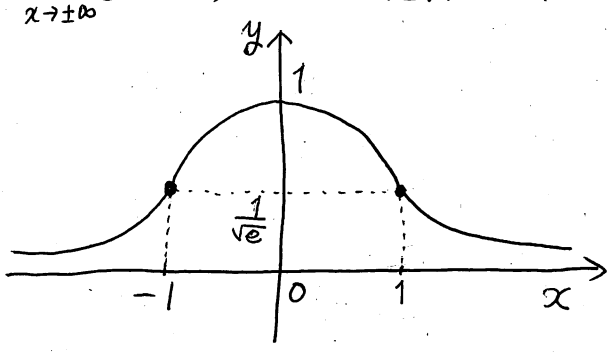


※ $e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正

$$\left(\begin{array}{l} f(0)=e^0=1 \\ f(1)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},\ f(-1)=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{array}\right)$$

$x=0$ で極大値 1，変曲点は $\left(\pm1,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ より x 軸を漸近線にもつ



ショートトライアル　数 III 微分法の応用　２０

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　$x>0$ のとき，$\log(1+x)<x$ を証明せよ。

2　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$0<a<b$ のとき，$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

3　関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

1　$x>0$ のとき，$\log(1+x)<x$ を証明せよ。

(proof) $f(x)=x-\log(1+x)$ とおくと

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$

$(\because x>0)$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

増減表より $x>0$ で $f(x)>0$ だから

$x-\log(1+x)>0$ より

$\log(1+x)<x$ である ■

2　平均値の定理を用いて，次のことを証明せよ。

$0<a<b$ のとき，$e^a<\dfrac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$

(proof)

$f(x)=e^x$ とおくと すべての実数 x で

連続かつ微分可能だから

平均値の定理により

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=e^c \cdots\cdots ①$$

$$a<c<b \cdots\cdots ②$$

② で底 e は 1 より大きいから $e^a<e^c<e^b$

これに ① を代入すると

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$$

が成り立つ ■

3　関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ。

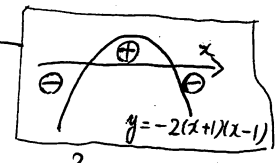
定義域はすべての実数.

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

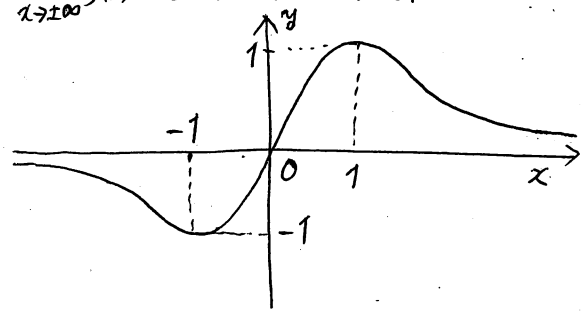
$f'(x)=0$ とおくと $x=-1, 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$



$f(-1)=\dfrac{-2}{1+1}=-1$, $f(1)=\dfrac{2}{1+1}=1$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ より x 軸を漸近線にもつ



＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $y = \tan x$ 上の点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 平均値の定理を用いて次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x - \sin x^2}{x - x^2}$$

$\boxed{3}$ 次の関数のグラフをかけ。

$$y = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$$

$\boxed{4}$ p を有理数とするとき，近似式

$x \fallingdotseq 0$ のとき，$(1+x)^p \fallingdotseq 1 + px$

を導き，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

$\boxed{5}$ 点 $(a,\ 0)$ から曲線 $y = xe^x$ に 2 本の接線が引けるとき，a の値の範囲を求めよ。

1　関数 $y=\tan x$ 上の点 $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ における接線の方程式を求めよ。

$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ だから接線の傾きは $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=2$.

接線の方程式は

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ y=2x-\frac{\pi}{2}+1$$

2　平均値の定理を用いて次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}$$

$f(x)=\sin x$ とおくと $f'(x)=\cos x$

$f(x)$ は実数全体で連続で微分可能なので

平均値の定理より

$$\frac{f(x)-f(x^2)}{x-x^2}=f'(c)=\cos c \quad \cdots\cdots ①$$

c は x と x^2 の間の数として存在する

$x\to+0$ のとき $x^2\to+0$ だから、はさみうちの原理により $c\to+0$、よって ① より

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-\sin x^2}{x-x^2}=\lim_{c\to+0}\cos c=\cos 0=1$$

3　次の関数のグラフをかけ。

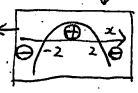
$$y=\frac{x}{(x-1)(x-4)}$$

$f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-4)}$ とおく

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2-5x+4)-x\times(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$$=\frac{-x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2}=\frac{-(x+2)(x-2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$	/	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	/	↗	-1	↘	/	↘

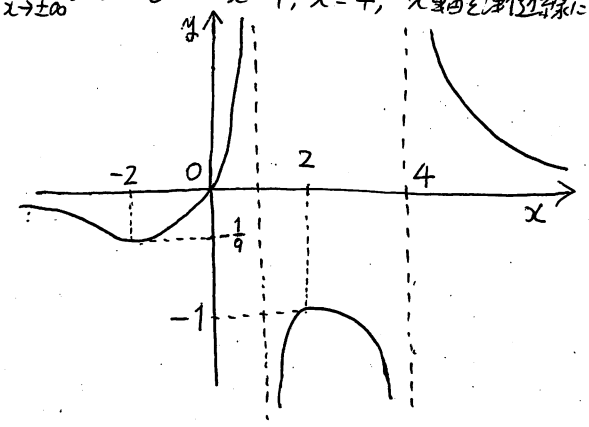


$f(-2)=\frac{-2}{(-3)\times(-6)}=-\frac{1}{9}$, $f(2)=\frac{2}{1\times(-2)}=-1$

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1+0}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to4-0}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to4+0}f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$　　$x=1$, $x=4$, x 軸を漸近線にもつ



4　p を有理数とするとき，近似式 $(1+x)^p \fallingdotseq 1+px$ を導き，$\sqrt[3]{1.006}$ の近似値を小数第 3 位まで求めよ。

$x\fallingdotseq0$ のとき

$f(x)=(1+x)^p$ とおくと $f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

$f(0)=(1+0)^p=1$, $f'(0)=p(1+0)^{p-1}=p$ より

$(0,1)$ における接線は $y-1=p(x-0)$ ← $x\fallingdotseq0$ のときは y 切片で接線を作る

すなわち $y=px+1$.

$x\fallingdotseq0$ のとき $f(x)\fallingdotseq px+1$ なので

$$(1+x)^p\fallingdotseq1+px \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sqrt[3]{1.006}=1.006^{\frac{1}{3}}=(1+0.006)^{\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{3}\times0.006$$

← ① で $p=\frac{1}{3}$, $x=0.006$

$$=1.002$$

5　点 $(a,\ 0)$ から曲線 $y=xe^x$ に 2 本の接線が引けるとき，a の値の範囲を求めよ。

$y'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(x+1)e^x$. 接点を $(t,\ te^t)$ とおくと

接線の方程式は

$$y-te^t=(t+1)e^t(x-t)$$

$$y=(t+1)e^tx+(-t^2-t)e^t+te^t$$

$$y=(t+1)e^tx-t^2e^t \quad \cdots\cdots ①$$

① が $(a,0)$ を通るので

$$0=(t+1)e^t\times a-t^2e^t$$

$e^t>0$ より

$$0=(t+1)\times a-t^2$$

$$\therefore\ t^2-at-a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

接線が 2 本引けるとき接点が 2 個存在する。

このとき方程式 ② が異なる 2 個の実数解をもつから、判別式 D について $D>0$

よって　$D=(-a)^2-4\times1\times(-a)>0$

$$a^2+4a>0$$

$$a(a+4)>0$$

$$\therefore\ a<-4,\ 0<a$$