ショートトライアル　積分法　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の中から，$2x$ の原始関数であるものを選べ。

① $2x^2+1$　② x^2-x　③ x^2+2　④ $4x$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。
ただし，C を積分係数とする。

(1) $\displaystyle\int 4x dx$

(2) $\displaystyle\int (x^2+x)dx$

(3) $\displaystyle\int x^{100}dx$

(4) $\displaystyle\int (-4x^3+6x^2-1)dx$

(5) $\displaystyle\int (t-1)(t+2)dt$

(6) $\displaystyle\int (v-gt)dt$

(7) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr$

$\boxed{3}$ 次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。
[1] $F'(x)=6x^2-2x$　[2] $F(1)=2$

時間のある人はこちらをどうぞ。

$\boxed{4}$ a を定数とする。次の関数を x について微分せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}(x+a)^2$

(2) $\dfrac{1}{3}(x+a)^3$

$\boxed{5}$ a を定数とする。$\boxed{4}$ の結果を用いて次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分係数とする。

(1) $\displaystyle\int (x+a)dx$

(2) $\displaystyle\int (x+a)^2 dx$

つまり，n を自然数とするとき，

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$$

が成り立つ。

ショートトライアル　積分法　1

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　次の中から，$2x$ の原始関数であるものを選べ。

① $2x^2+1$　② x^2-x　③ x^2+2　④ $4x$

① $(2x^2+1)'=4x$ で×　② $(x^2-x)'=2x-1$ で×

③ $(x^2+2)'=2x$ で○　④ $(4x)'=4$ で×

よって ③

2　次の不定積分を求めよ。
ただし，C を積分係数とする。

(1) $\int 4x dx$

(与式) $= 2x^2+C$

(2) $\int (x^2+x)dx$

(与式) $= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

(3) $\int x^{100}dx$

(与式) $= \frac{1}{101}x^{101}+C$

(4) $\int (-4x^3+6x^2-1)dx$

(与式) $= -x^4+2x^3-x+C$

(5) $\int (t-1)(t+2)dt$

(与式) $= \int (t^2+t-2)dt$

$= \frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t+C$

(6) $\int (v-gt)dt$

(与式) $= vt-\frac{1}{2}gt^2+C$

(7) $\int 4\pi r^2 dr$

(与式) $= \frac{4}{3}\pi r^3+C$

3　次の 2 つの条件をともに満たす関数 $F(x)$ を求めよ。
[1] $F'(x)=6x^2-2x$　[2] $F(1)=2$

$F(x)=\int F'(x)dx=\int(6x^2-2x)dx$

$=2x^3-x^2+C$ （Cは積分定数）

$F(1)=2$ より

$2\times1^3-1^2+C=2$

$\therefore C=1$

よって $F(x)=2x^3-x^2+1$

時間のある人はこちらをどうぞ。

4　a を定数とする。次の関数を x について微分せよ。

(1) $\frac{1}{2}(x+a)^2$

$\frac{1}{2}(x^2+2ax+a^2)$

$\left\{\frac{1}{2}(x+a)^2\right\}'=\left(\frac{1}{2}x^2+ax+\frac{1}{2}a^2\right)'$

$=x+a$

(2) $\frac{1}{3}(x+a)^3$

$\left\{\frac{1}{3}(x+a)^3\right\}'=\left\{\frac{1}{3}(x^3+3x^2a+3xa^2+a^3)\right\}'$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+x^2a+xa^2+\frac{1}{3}a^3\right)'$

$=x^2+2xa+a^2$

$=(x+a)^2$

5　a を定数とする。**4** の結果を用いて次の不定積分を求めよ。ただし，C を積分係数とする。

(1) $\int (x+a)dx$　**4**(1)より

(与式) $= \frac{1}{2}(x+a)^2+C$

(2) $\int (x+a)^2dx$　**4**(2)より

(与式) $= \frac{1}{3}(x+a)^3+C$

つまり，n を自然数とするとき，

$$\int (x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$$

が成り立つ。

ショートトライアル　積分法　2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x^2+2x-1)dx$

(2) $\displaystyle\int (t-1)^2 dt$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 x^2 dx$

(2) $\displaystyle\int_3^{-1} 5dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 (-x^2+4x)dx$

時間のある人はこちらをどうぞ。

(4) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$

ショートトライアル　積分法　2

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3x^2+2x-1)dx$

(与式) $= x^3+x^2-x+C$　(Cは積分定数)

必ず書く!!

(2) $\int (t-1)^2 dt$

(与式) $= \int (t^2-2t+1)dt$

$= \frac{1}{3}t^3-t^2+t+C$　(Cは積分定数)

2　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 x^2 dx$

(与式) $= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\times 3^3-\frac{1}{3}\times 1^3$

$= \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$ //

(2) $\int_3^{-1} 5dx$

(与式) $= [5x]_3^{-1} = 5\times(-1)-5\times 3$

$= -5-15 = -20$ //

(3) $\int_0^1 (-x^2+4x)dx$

(与式) $= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^1$

$= \left(-\frac{1}{3}\times 1^3+2\times 1^2\right)-0$

$= -\frac{1}{3}+2 = \frac{5}{3}$ //

時間のある人はこちらをどうぞ。

(4) $\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$

(与式) $= \int_1^2 (x^2-3x+2)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2$

$= \left(\frac{1}{3}\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^2+2\times 2\right)$

$-\left(\frac{1}{3}\times 1^3-\frac{3}{2}\times 1^2+2\times 1\right)$

$= \left(\frac{8}{3}-6+4\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)$

$= \frac{8}{3}-6+4-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2$

$= \frac{7}{3}+\frac{3}{2}-4$

$= \frac{14+9-24}{6} = -\frac{1}{6}$ //

実は……

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

という公式（6分の1公式）があります。

これを使うと

(与式) $= -\frac{1}{6}(2-1)^3 = -\frac{1}{6}$ //

すごく簡単です。

ショートトライアル　積分法　3

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 x dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 (2x-4)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^4 (3x^2+4x)dx - \int_0^4 (3x^2-4x)dx$

(4) $\displaystyle\int_3^3 (3x^2-4x+5)dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 (x^2-2x)dx - \int_3^1 (x^2-2x)dx$

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x + 3\int_0^1 f(t)dt$$

ショートトライアル　積分法　3

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 x dx$

(与式) $= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

$= \frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 0^2$

$= 2$ //

(2) $\int_1^2 (2x-4)dx$

(与式) $= \left[x^2 - 4x\right]_1^2$

$= (2^2 - 4\times 2) - (1^2 - 4\times 1)$

$= (4-8) - (1-4)$

$= (-4) - (-3) = -1$ //

(3) $\int_0^4 (3x^2+4x)dx - \int_0^4 (3x^2-4x)dx$

(与式) $= \int_0^4 \{(3x^2+4x) - (3x^2-4x)\}dx$

$= \int_0^4 8x dx = \left[4x^2\right]_0^4$

$= 4\times 4^2 - 4\times 0^2$

$= 64$ //

(4) $\int_3^3 (3x^2-4x+5)dx$

(与式) $= 0$ //

(5) $\int_0^1 (x^2-2x)dx - \int_3^1 (x^2-2x)dx$

(与式) $= \int_0^1 (x^2-2x)dx + \int_1^3 (x^2-2x)dx$

$= \int_0^3 (x^2-2x)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_0^3$

$= \left(\frac{1}{3}\times 3^3 - 3^2\right) - 0$

$= 0$ //

のりしろへったん

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x + 3\int_0^1 f(t)dt$$

定積分をAとおく!

$\int_0^1 f(t)dt = A$ とおくと

$f(x) = 2x + 3A$ だから

$A = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (2t+3A)dt$

$A = \left[t^2 + 3At\right]_0^1$

$A = (1^2 + 3A\times 1) - (0^2 - 3A\times 0)$

$A = 1 + 3A$

$\therefore A = -\frac{1}{2}$

よって $f(x) = 2x - \frac{3}{2}$ //

ショートトライアル　積分法　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + 3\int_0^1 f(t)dt$$

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x + 2$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x^3 + 4x)dx$

(2) $\displaystyle\int t(t-2)dt$

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 6x^2 dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 + x + 1)dx$

時間のある人はやってみてください。

$\boxed{5}$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

ショートトライアル　積分法　4

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + 3\int_0^1 f(t)dt$$

$\int_0^1 f(t)dt = A$ とおくと $f(x) = x^2 + 3A$ なので

$A = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (t^2 + 3A)dt$

$A = \left[\frac{1}{3}t^3 + 3At\right]_0^1$

$A = \left(\frac{1}{3}\times 1^3 + 3A\times 1\right) - 0$

$A = \frac{1}{3} + 3A$

$A = -\frac{1}{6}$ だから $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ //

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 - 3x + 2 \quad \cdots\cdots ①$$

① を両辺 x について微分して

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = (x^2 - 3x + 2)'$

$\therefore f(x) = 2x - 3$ //

① に $x = a$ を代入すると

$\int_a^a f(t)dt = a^2 - 3a + 2$

$0 = (a-1)(a-2)$

$\therefore a = 1, 2$ //

3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^3 + 4x)dx$

(与式) $= \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C$ （C は積分定数） //

(2) $\int t(t-2)dt$

(与式) $= \int (t^2 - 2t)dt$

$= \frac{1}{3}t^3 - t^2 + C$ （C は積分定数） //

4　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^2 6x^2 dx$

(与式) $= \left[2x^3\right]_{-1}^2 = 2\times 2^3 - 2\times(-1)^3$

$= 16 - (-2) = 18$ //

(2) $\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x + 1)dx$

(与式) $= 2\int_0^1 (x^2 + 1)dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$

$= 2\left\{\left(\frac{1}{3}\times 1^3 + 1\right) - 0\right\}$

$= 2\times\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ //

$f(x)$ が偶関数のとき

$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

$f(x)$ が奇関数のとき

$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

時間のある人はやってみてください。

5　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ。

(proof)

(左辺) $= \int_\alpha^\beta (x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}\alpha x^2 - \frac{1}{2}\beta x^2 + \alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$

$= \left(\frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^3 + \alpha\beta^2\right)$

$\quad - \left(\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta + \alpha^2\beta\right)$

$= \frac{1}{3}\beta^3 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\beta^3 + \alpha\beta^2$

$\quad - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\beta - \alpha^2\beta$

$= -\frac{1}{6}\beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta + \frac{1}{6}\alpha^3$

(右辺) $= -\frac{1}{6}(\beta^3 - 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta - \alpha^3)$

$= -\frac{1}{6}\beta^3 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta + \frac{1}{6}\alpha^3$

よって (左辺) = (右辺) だから

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つ

■

ショートトライアル　積分法　4．5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 4x - \int_0^1 xf(t)dt$$

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_2^x f(t)dt = x^2 - ax + 6$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x^3 - 4x^2 + 3)dx$

(2) $\displaystyle\int (3t+1)^2 dt$

$\boxed{4}$ 放物線 $y = 2x^2$，2 直線 $x = 1$，$x = 2$，x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

↓時間のある人はやってみましょう。

$\boxed{5}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-3}^1 6x dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)dx$

ショートトライアル　積分法　4．5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 4x - \int_0^1 xf(t)dt$$

$$f(x) = 4x - x\int_0^1 f(t)dt$$

point
xは積分する文字のtとは関係ないので∫の前に出せる

$\int_0^1 f(t)dt = A$ とおくと $f(x) = 4x - Ax$

$$A = \int_0^1 (4t - At)dt = \left[2t^2 - \frac{A}{2}t^2\right]_0^1$$

$$A = \left(2 - \frac{A}{2}\right) - 0$$

$$\frac{3}{2}A = 2 \qquad \therefore A = \frac{4}{3}$$

よって $f(x) = 4x - \frac{4}{3}x = \frac{8}{3}x$ //

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_2^x f(t)dt = x^2 - ax + 6 \quad \cdots\cdots ①$$

①に $x = 2$ を代入して

$$\int_2^2 f(t)dt = 2^2 - a \times 2 + 6$$

$$0 = 4 - 2a + 6$$

$$a = 5 \quad //$$

よって $\int_2^x f(t)dt = x^2 - 5x + 6$

の両辺を x について微分すると

$$\left(\int_2^x f(t)dt\right)' = (x^2 - 5x + 6)'$$

$$\therefore f(x) = 2x - 5 \quad //$$

point
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ を使う。

3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (2x^3 - 4x^2 + 3)dx$

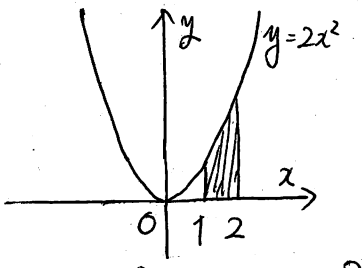
(与式) $= \frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + 3x + C$ （Cは積分定数） //

(2) $\int (3t + 1)^2 dt$

(与式) $= \int (9t^2 + 6t + 1)dt$

$= 3t^3 + 3t^2 + t + C$ （Cは積分定数） //

4　放物線 $y = 2x^2$，2 直線 $x = 1$，$x = 2$，x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



$$S = \int_1^2 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \quad //$$

↓時間のある人はやってみましょう。

5　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-3}^1 6x dx$

(与式) $= \left[3x^2\right]_{-3}^1$

$= 3 - 27 = -24$ //

(2) $\int_{-2}^2 (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)dx$

(与式) $= 2\int_0^2 (x^4 + x^2 + 1)dx$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^2$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= 2 \times \frac{96 + 40 + 30}{15}$$

$$= \frac{332}{15} \quad //$$

point

$$\int_{-a}^a x^n dx = \begin{cases} 0 & n\text{が奇数のとき（奇関数）} \\ 2\int_0^a x^n dx & n\text{が偶数のとき（偶関数）} \end{cases}$$

定数のとき

ショートトライアル　積分法　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2-2x)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x^2-2x+1)dx-\int_1^0 (4x^2+2x-1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4+x^2+x+1)dx$

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_x^1 f(t)dt = 3x^2-ax+1$$

3　次の計算をせよ。ただし，**「6 分の 1 公式」** $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いてよい。

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^5 x(x-5)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)(x-3)dx$

(4) $\displaystyle\int_2^4 2(x-2)(x-4)dx$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 (3x^2-4x+1)dx$

(6) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2-2)dx$

(7) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (x^2-4x+1)dx$

ショートトライアル　積分法　5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (3x^2-2x)dx$

(与式) $=\left[x^3-x^2\right]_0^2=(2^3-2^2)-(0^3-0^2)$

$=8-4=\underline{4}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^1 (2x^2-2x+1)dx-\int_1^0 (4x^2+2x-1)dx$

(与式) $=\displaystyle\int_0^1(2x^2-2x+1)dx+\int_0^1(4x^2+2x-1)dx$

$=\displaystyle\int_0^1\{(2x^2-2x+1)+(4x^2+2x-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_0^1 6x^2dx=\left[2x^3\right]_0^1=2\times1^3-0$

$=\underline{2}$ //

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^4+x^2+x+1)dx$

(与式) $=2\displaystyle\int_0^1(x^4+x^2+1)dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+1\right)-0$

$=2\times\frac{3+5+15}{15}=2\times\frac{23}{15}=\underline{\frac{46}{15}}$ //

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_x^1 f(t)dt=3x^2-ax+1 \quad \cdots\cdots ①$$

①に $x=1$ を代入すると

$\displaystyle\int_1^1 f(t)dt=3\times1^2-a\times1+1$

$0=3-a+1$

$\therefore a=4$

よって $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt=3x^2-4x+1$

両辺 -1 倍して

$-\displaystyle\int_x^1 f(t)dt=-3x^2+4x-1$

$\displaystyle\int_1^x f(t)dt=-3x^2+4x-1 \cdots ②$

②の両辺を x について微分して

$\underline{f(x)=-6x+4}$ //

3　次の計算をせよ。ただし，**「6 分の 1 公式」**

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を用いてよい。

(1) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)dx$

(与式) $=-\frac{1}{6}(2-1)^3=\underline{-\frac{1}{6}}$ //

(2) $\displaystyle\int_0^5 x(x-5)dx$

(与式) $=-\frac{1}{6}(5-0)^3=\underline{-\frac{125}{6}}$ //

(3) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)(x-3)dx$

(与式) $=-\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\underline{-\frac{32}{3}}$ //

(4) $\displaystyle\int_2^4 2(x-2)(x-4)dx$

(与式) $=2\displaystyle\int_2^4(x-2)(x-4)dx=2\times\left\{-\frac{1}{6}(4-2)^3\right\}$

$=-\frac{1}{3}\times2^3=\underline{-\frac{8}{3}}$ //

(5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 (3x^2-4x+1)dx$

$\boxed{3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)}$

(与式) $=3\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)dx=3\times\left\{-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\right\}$

$=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\underline{-\frac{4}{27}}$ //

(6) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2-2)dx$

(与式) $=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})dx=-\frac{1}{6}\{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}^2$

$=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{2})^3=\underline{-\frac{8\sqrt{2}}{3}}$ //

(7) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} (x^2-4x+1)dx$

$\alpha=2-\sqrt{3}$，$\beta=2+\sqrt{3}$ とおくと $\beta-\alpha=2\sqrt{3}$

(与式) $=\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3=-4\sqrt{3}$

ショートトライアル　積分法　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2 + 2$ と x 軸および 2 直線 $x = 1$, $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ 放物線 $y = x^2 - 9$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$ 次の定積分を求めよ。ただし，公式

$$\int (x+a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1} + C$$

（C は積分定数）を使うとよい。

(2)〜(4) は**「3 分の 1 公式」**

(1) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)dx$

(2) $\displaystyle\int_2^3 (x-2)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_2^{-1} (x+1)^2 dx$

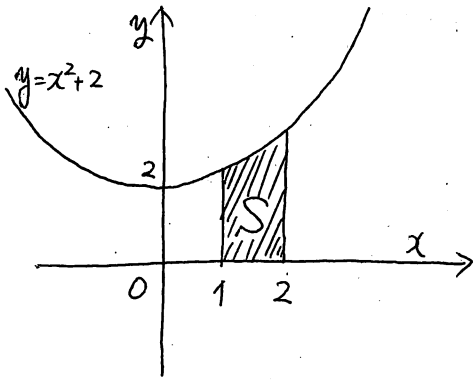
(4) $\displaystyle\int_{-2}^0 (x+2)^2 dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^3 dx$

ショートトライアル　積分法　6

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1　放物線 $y=x^2+2$ と x 軸および 2 直線 $x=1$, $x=2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。



求める面積は

$$S=\int_1^2(x^2+2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)$$

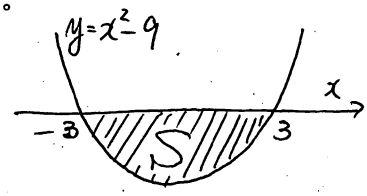
$$=\frac{7}{3}+2=\underline{\frac{13}{3}}$$

2　放物線 $y=x^2-9$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$x=-3, 3$



求める面積は

このマイナスを忘れたら答えが合っていても0点

$$S=\int_{-3}^{3}\{-(x^2-9)\}dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{-3}^{3}$$

$$=(-9+27)-(9-27)=\underline{36}$$

別解　$\frac{1}{6}$公式を使うと

$$S=\int_{-3}^{3}\{-(x^2-9)\}dx=-\int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\{3-(-3)\}^3\right)=\frac{1}{6}\times 6^3=\underline{36}$$

3　次の定積分を求めよ。ただし，公式

$$\int(x+a)^n dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C$$

（C は積分定数）を使うとよい。

(2)〜(4) は「**3 分の 1 公式**」

(1) $\int_1^3(x-1)dx$

$$(与式)=\left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^3=\frac{1}{2}\times 2^2-0=\underline{2}$$

(2) $\int_2^3(x-2)^2dx$

$$(与式)=\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^3=\frac{1}{3}\times 1^3-0=\underline{\frac{1}{3}}$$

(3) $\int_2^{-1}(x+1)^2dx$

$$(与式)=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_2^{-1}=0-\frac{1}{3}\times 3^3=\underline{-9}$$

(4) $\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx$

$$(与式)=\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}=\frac{1}{3}\times 2^3-0=\underline{\frac{8}{3}}$$

(5) $\int_1^2(x-1)^3dx$

$$(与式)=\left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^2=\frac{1}{4}\times 1^4-0=\underline{\frac{1}{4}}$$

別解

$$S=\int_{-3}^{3}\{-(x^2-9)\}dx=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx$$

$$=2\int_0^3(-x^2+9)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_0^3$$

$$=2\{(-9+27)-0\}=\underline{36}$$

ショートトライアル　積分法　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = x + 4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^2 + \int_0^3 xf(t)dt$$

$\boxed{3}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (3x + 2)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^4 (x^2 + 1)dx + \int_4^2 (x^2 + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^3 |\, x - 2 \,|\, dx$

ショートトライアル　積分法　7

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

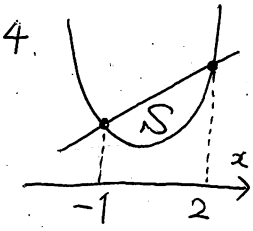
1 放物線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = x + 4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

y 消去して $x^2+2=x+4$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x=-1, 2$



$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+4)-(x^2+2)\}dx$$ ← この式を正しく書く

$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$ ← 計算用紙に $\frac{1}{6}$ 公式で解く

別解

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+4)-(x^2+2)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right)=\frac{1}{6}\times 3^3$$

$$=\frac{9}{2}$$

2 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2+\int_0^3 xf(t)dt$$

$$f(x)=x^2+x\int_0^3 f(t)dt$$

$\int_0^3 f(t)dt=A$ とおくと $f(x)=x^2+Ax$

$$A=\int_0^3(t^2+At)dt=\left[\frac{t^3}{3}+\frac{A}{2}t^2\right]_0^3$$

$$A=\left(9+\frac{9}{2}A\right)-0$$

$$2A=18+9A$$

$$A=-\frac{18}{7}$$

よって $f(x)=x^2-\frac{18}{7}x$

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{1}(3x+2)dx$

$$(与式)=\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(\frac{3}{2}+2\right)-(6-4)$$

$$=\frac{3}{2}$$

(2) $\int_0^4(x^2+1)dx+\int_4^2(x^2+1)dx$

$$(与式)=\int_0^2(x^2+1)dx$$ ← のりしろへったん $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}+2$$

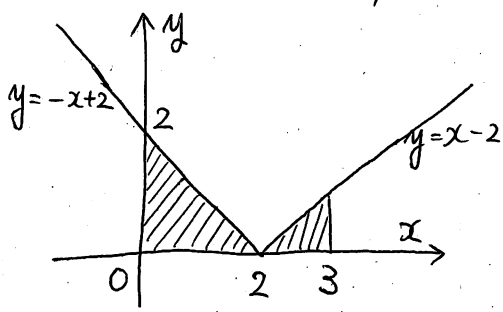
$$=\frac{14}{3}$$

(3) $\int_0^3|x-2|dx$

$$(与式)=\int_0^2(-x+2)dx+\int_2^3(x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$$

$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$



ショートトライアル　積分法　8

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+4x)dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1}(2x-1)dx+\int_{1}^{3}(2x-1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{1}|\,x+1\,|\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{3}|\,x^2-4\,|\,dx$

$\boxed{2}$ 放物線 $y=3x^2+6x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

ショートトライアル　積分法　8

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(-x^2+4x)dx$

$(与式)=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\underline{3}$ //

(2) $\int_{0}^{1}(2x-1)dx+\int_{1}^{3}(2x-1)dx$

$(与式)=\int_{0}^{3}(2x-1)dx$ ← のりしろぺったん

$=\left[x^2-x\right]_{0}^{3}$

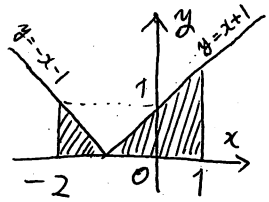
$=(9-3)-0=\underline{6}$ //

(3) $\int_{-2}^{1}|x+1|dx$

$(与式)=\int_{-2}^{-1}(-x-1)dx+\int_{-1}^{1}(x+1)dx$

$=\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{2}+2=\underline{\frac{5}{2}}$ //

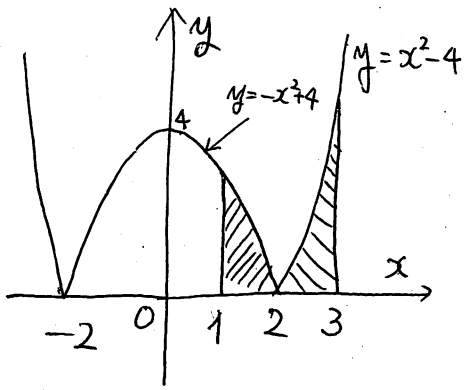


(4) $\int_{1}^{3}|x^2-4|dx$

$(与式)=\int_{1}^{2}(-x^2+4)dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{3}$

$=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=\underline{4}$ //

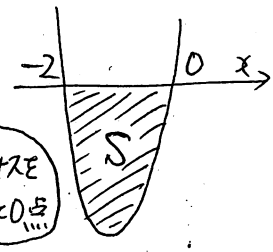


2　放物線 $y=3x^2+6x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$3x^2+6x=0$

$3x(x+2)=0$

$x=-2,\ 0$



このマイナスを忘れると0点…

$S=\int_{-2}^{0}\{-(3x^2+6x)\}dx$ ← 正しく!!

$=\left[-x^3-3x^2\right]_{-2}^{0}=\underline{4}$ //

別解

$S=\int_{-2}^{0}\{-(3x^2+6x)\}dx$

$=-3\int_{-2}^{0}x(x+2)dx=-3\times\left(-\frac{1}{6}\{0-(-2)\}^3\right)$

$=\frac{1}{2}\times 2^3=\underline{4}$ //

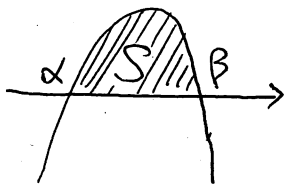
3　放物線 $y=-x^2+6x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$-x^2+6x-7=0$

$x^2-6x+7=0$

$x=3\pm\sqrt{9-7}$

$=3\pm\sqrt{2}$



$\alpha=3-\sqrt{2}$, $\beta=3+\sqrt{2}$ とおくと $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$ …①

$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+6x-7)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-7x\right]_{3-\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}}=\underline{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$ //

別解

$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+6x-7)dx$

$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$ ①を代入

$=\frac{1}{6}\times(2\sqrt{2})=\underline{\frac{8\sqrt{3}}{3}}$ //

ショートトライアル　積分法　9

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ a を正の定数とする。放物線 $y=x(x-3a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 であるときを求めよ。

$\boxed{3}$ 公式 $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$ を用いて次の不定積分を求めよ。
ただし，C を積分定数とする。

(1) $\int(4x+3)^3 dx$

(2) $\int(3x-5)^6 dx$

(3) $\int(2x-1)^4 dx$

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2(x+3)^2 dx-\int_0^2(x-3)^2 dx$

(2) $\int_1^2(2x-1)^4 dx$

ショートトライアル　積分法　9

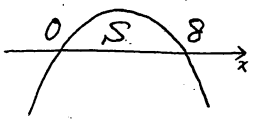
＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$-\frac{1}{2}x^2+4x=0$

$x(x-8)=0$

$x=0,\ 8$



$S=\int_0^8\left(-\frac{1}{2}x^2+4x\right)dx$

$=-\frac{1}{2}\int_0^8 x(x-8)dx$

$=-\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{1}{6}(8-0)^3\right\}=\frac{1}{12}\times 8^3$

$=\frac{128}{3}$ //

別解

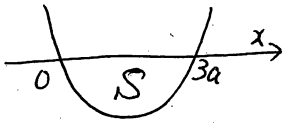
$S=\int_0^8\left(-\frac{1}{2}x^2+4x\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+2x^2\right]_0^8$

$=\frac{128}{3}$ //

2　a を正の定数とする。放物線 $y=x(x-3a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 であるときを求めよ。

$x(x-3a)=0$

$x=0,\ 3a$



$S=\int_0^{3a}\{-x(x-3a)\}dx$

$=-\int_0^{3a}x(x-3a)dx$

$=-\left\{-\frac{1}{6}(3a-0)^3\right\}=\frac{1}{6}\times(3a)^3$

$=\frac{9}{2}a^3$

題意より $S=36$ なので

$\frac{9}{2}a^3=36$

$a^3=8$

a は正の定数なので　$a=2$ //

3　公式 $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+C$ を用いて次の不定積分を求めよ。
ただし，C を積分定数とする。

(1) $\int(4x+3)^3dx$

(与式) $=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(4x+3)^4+C$

$=\frac{1}{16}(4x+3)^4+C$ //

(2) $\int(3x-5)^6dx$

(与式) $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}(3x-5)^7+C$

$=\frac{1}{21}(3x-5)^7+C$ //

(3) $\int(2x-1)^4dx$

(与式) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-1)^5+C$

$=\frac{1}{10}(2x-1)^5+C$ //

4　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2(x+3)^2dx-\int_0^2(x-3)^2dx$

(与式) $=\int_0^2\{(x^2+6x+9)-(x^2-6x+9)\}dx$

$=\int_0^2 12x\,dx=\left[6x^2\right]_0^2$

$=6\times 2^2-0=24$ //

(2) $\int_1^2(2x-1)^4dx$

(与式) $=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-1)^5\right]_1^2=\left[\frac{1}{10}(2x-1)^5\right]_1^2$

$=\frac{1}{10}\times 3^5-\frac{1}{10}\times 1^5$

$=\frac{1}{10}\times(243-1)=\frac{121}{5}$ //

ショートトライアル　積分法　１０

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x^2+2x-5)dx$

(2) $\displaystyle\int (3x-1)^2 dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2-6x)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^3 |\,2x-4\,|\,dx$

$\boxed{3}$ 直線 $y=kx$ が，放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれる図形の面積を 2 等分するように，定数 k の値を定めよ。

ショートトライアル　積分法　１０

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x^2+2x-5)dx$

忘れずに

(与式) $= \dfrac{x^3}{3}+x^2-5x+C$　(Cは積分定数)

(2) $\int (3x-1)^2 dx$

(与式) $= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}(3x-1)^3+C = \dfrac{1}{9}(3x-1)^3+C$

(Cは積分定数)

別解

(与式) $= \int(9x^2-6x+1)dx = 3x^3-3x^2+x+C$

(Cは積分定数)

2　次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^2 (3x^2-6x)dx$

(与式) $= \left[x^3-3x^2\right]_1^2$

$= (8-12)-(1-3)$

$= -2$

(2) $\int_0^3 |2x-4|\,dx$

(i) $2x-4 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 2$ のとき

$|2x-4| = 2x-4$.

(ii) $2x-4<0$ すなわち $x<2$ のとき.

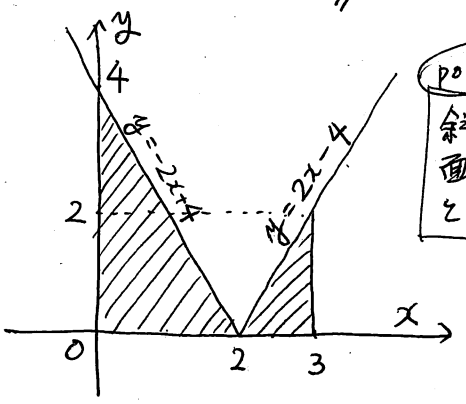
$|2x-4| = -(2x-4) = -2x+4$

←省略してもOK.

(与式) $= \int_0^2(-2x+4)dx + \int_2^3(2x-4)dx$

$= \left[-x^2+4x\right]_0^2 + \left[x^2-4x\right]_2^3$

$= 4+1 = 5$



point

斜線部分の面積がこたえと一致する

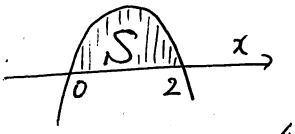
3　直線 $y=kx$ が，放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれる図形の面積を２等分するように，定数 k の値を定めよ。

$y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする

$2x-x^2=0$

$x(x-2)=0$

$x=0, 2$.



$S = \int_0^2(2x-x^2)dx = \left[x^2-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{4}{3}$

$\left[\begin{array}{l} S = \int_0^2(2x-x^2)dx = -\int_0^2 x(x-2)dx \\ \quad = -\left\{-\dfrac{1}{6}(2-0)^3\right\} = \dfrac{4}{3} \end{array}\right]$

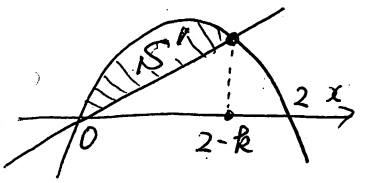
$y=2x-x^2$ と $y=kx$ で囲まれた部分の面積を S' とする.

$2x-x^2=kx$

$x^2-2x+kx=0$

$x(x-2+k)=0$

$x=0, 2-k$.



$S' = \int_0^{2-k}\{(2x-x^2)-kx\}dx$

$= -\int_0^{2-k} x(x-2+k)dx$

$= -\left(-\dfrac{1}{6}\{(2-k)-0\}^3\right)$

$= \dfrac{1}{6}(2-k)^3$

題意より $2S' = S$ だから

$2\times\dfrac{1}{6}(2-k)^3 = \dfrac{4}{3}$

$(2-k)^3 = 4$

$2-k$ は実数なので

$2-k = \sqrt[3]{4}$

$\therefore k = 2-\sqrt[3]{4}$

ショートトライアル　積分法　１１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の直線や曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=-x^2+4\ (x \geqq 1)$,
2 直線 $x=1$, $x=3$, x 軸

(2) 放物線 $y=-3x^2+6x+12$ と x 軸

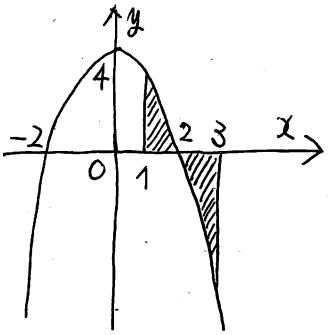
$\boxed{2}$ 原点を通る直線と曲線 $y=x^2-2x$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{32}{3}$ である。このときの直線の方程式を求めよ。

ショートトライアル　積分法　１１

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の直線や曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　放物線 $y=-x^2+4\ (x \geqq 1)$，
2 直線 $x=1$，$x=3$，x 軸



このタイプは
$\frac{1}{6}$とか使えない。
積分計算をガチで
がんばるしかない。

$$S=\int_1^2(-x^2+4)dx+\int_2^3\{-(-x^2+4)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

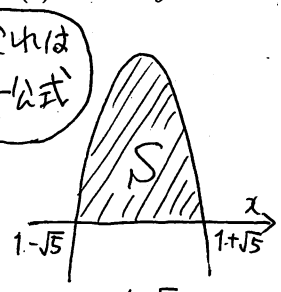
$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right)+(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$

$$=-\frac{8}{3}+8+\frac{1}{3}-4+9-12-\frac{8}{3}+8$$

$$=\underline{4}\ /\!/$$

(2)　放物線 $y=-3x^2+6x+12$ と x 軸

これは
$\frac{1}{6}$公式



$$-3x^2+6x+12=0$$

$$x^2-2x-4=0$$

$$x=1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}$$

$$=1\pm\sqrt{5}$$

$$S=\int_{1-\sqrt{5}}^{1+\sqrt{5}}(-3x^2+6x+12)dx$$

$\alpha=1-\sqrt{5}$，$\beta=1+\sqrt{5}$ とおくと

$\beta-\alpha=2\sqrt{5}$ ……①

$$S=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-3\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\leftarrow ①代入$$

$$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^3=\underline{20\sqrt{5}}\ /\!/$$

2　原点を通る直線と曲線 $y=x^2-2x$ とで囲まれる部分の面積が $\frac{32}{3}$ である。このときの直線の方程式を求めよ。

原点を通る直線を $y=ax$ ……①

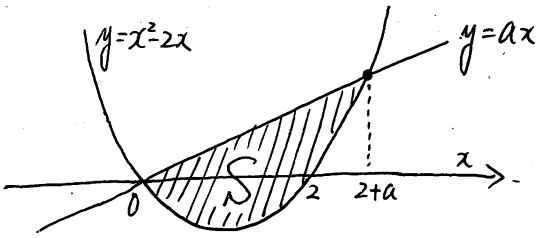
とおくと ①と $y=x^2-2x$ の交点は y 消去して

$$x^2-2x=ax$$

$$x^2-2x-ax=0$$

$$x(x-2-a)=0$$

$$x=0,\ 2+a$$



$$S=\int_0^{2+a}\{ax-(x^2-2x)\}dx$$

$$=-\int_0^{2+a}x(x-2-a)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\{(2+a)-0\}^3\right)$$

$$=\frac{1}{6}(2+a)^3$$

題意より $S=\frac{32}{3}$ だから

$$\frac{1}{6}(2+a)^3=\frac{32}{3}$$

$$(2+a)^3=64$$

$$(2+a)^3=4^3$$

$2+a$ は実数だから

$$2+a=4$$

$$\therefore\ \underline{a=2}\ /\!/$$

ショートトライアル　積分法　１２

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　放物線 $y=x^2+2x$ と点 $(1,\ 5)$ を通る直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ 5)$ を通る直線の傾きを m として，直線 ℓ の方程式を m で表せ。

(2)　直線 ℓ と放物線 $y=x^2+2x$ との交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。α，β を m を用いて表せ。

(3)　面積 S を m を用いて表せ。

(4)　S を最小にするような m の値を求めよ。また，そのときの S の値と，直線 ℓ の方程式を求めよ。

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を，それぞれ求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$

(2)　$\displaystyle\int_0^x tf(t)dt=x^3+2x^2+a$

ショートトライアル　積分法　１２

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　放物線 $y=x^2+2x$ と点 $(1,\ 5)$ を通る直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ 5)$ を通る直線の傾きを m として，直線 ℓ の方程式を m で表せ。

$$y-5=m(x-1)$$

すなわち　$y=mx-m+5$ //

(2)　直線 ℓ と放物線 $y=x^2+2x$ との交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。α，β を m を用いて表せ。

y消去して

$$x^2+2x=mx-m+5$$

$$x^2+(2-m)x+m-5=0$$

解の公式

$$x=\frac{-(2-m)\pm\sqrt{(2-m)^2-4\times1\times(m-5)}}{2}$$

$$=\frac{-2+m\pm\sqrt{m^2-4m+4-4m+20}}{2}$$

$$=\frac{m-2\pm\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$$

$\alpha<\beta$だから

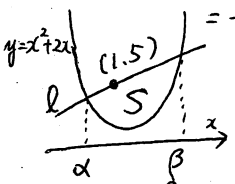
$$\alpha=\frac{m-2-\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$$ //

$$\beta=\frac{m-2+\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$$ //

(3)　面積 S を m を用いて表せ。

(2)より $\beta-\alpha=\dfrac{m-2+\sqrt{m^2-8m+24}}{2}-\dfrac{m-2-\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$

$$=\frac{2\sqrt{m^2-8m+24}}{2}=\sqrt{m^2-8m+24}\cdots①$$



①代入

$$S=\int_\alpha^\beta\{(mx-m+5)-(x^2+2x)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-8m+24}\right)^3$$ //

(4)　S を最小にするような m の値を求めよ。また，そのときの S の値と，直線 ℓ の方程式を求めよ。

$$S=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-8m+24}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-4)^2+8}\right)^3$$

よって $m=4$ のとき最小　このとき

$$S=\frac{1}{6}\times(\sqrt{8})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

直線ℓは　$y=4x-4+5$

$\therefore y=4x+1$

以上より

$m=4$ のとき，$S=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，ℓは $y=4x+1$ //

2　次の等式を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を，それぞれ求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2+2x-3$ ……①とする

①を両辺微分して

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=(x^2+2x-3)'$$

$$\therefore f(x)=2x+2$$ //

①に $x=a$ 代入して

$$\int_a^a f(t)dt=a^2+2a-3$$

$$0=(a+3)(a-1)$$

$$\therefore a=-3,\ 1$$ //

(2)　$\displaystyle\int_0^x tf(t)dt=x^3+2x^2+a$ ……①とする

①を両辺微分して

$$\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=(x^3+2x^2+a)'$$

$$xf(x)=3x^2+4x$$

$$\therefore f(x)=3x+4$$ //

①に $x=0$ を代入して

$$\int_0^0 tf(t)dt=0^3+2\times0^2+a$$

$$a=0$$ //

ショートトライアル　積分法　１３

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の曲線と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) $y = -x^2 + 3$

(2) $y = 2x^2 - 6x - 8$

$\boxed{2}$ 関数 $\displaystyle\int_0^1 (6x^2 + 4ax + a^2)dx$ の最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 放物線 $y = x^2 - 2x + 2$ と点 $(2,\ 3)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。

ショートトライアル　積分法　１３

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の曲線と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3$

$-x^2+3=0$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x=\pm\sqrt{3}$

この式を正しく!!

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx=-\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})\}^3\right)=\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3$$

$$=4\sqrt{3}$$

別解　$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$

(2)　$y=2x^2-6x-8$

$2x^2-6x-8=0$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x=-1,\ 4$

マイナス忘れるな!

$$S=\int_{-1}^{4}\{-(2x^2-6x-8)\}dx$$ ← この式を正しく!

$$=-2\int_{-1}^{4}(x-4)(x+1)dx=-2\times\left(-\frac{1}{6}\{4-(-1)\}^3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times5^3=\frac{125}{3}$$

別解　$S=\int_{-1}^{4}\{-(2x^2-6x-8)\}dx$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2+8x\right]_{-1}^{4}=\frac{125}{3}$$

2　関数 $\int_0^1(6x^2+4ax+a^2)dx$ の最小値を求めよ。

$\int_0^1(6x^2+4ax+a^2)dx$

$=\left[2x^3+2ax^2+a^2x\right]_0^1$

$=(2+2a+a^2)-0$

$=a^2+2a+2$

$=(a+1)^2+1$

よって　$a=-1$ のとき最小値 1

3　放物線 $y=x^2-2x+2$ と点 $(2,\ 3)$ を通る直線とで囲まれた図形の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。

求める直線を l とする。l の傾きを m とすると l の方程式は

$y-3=m(x-2)$

$\therefore\ y=mx-2m+3$ ……①

①と $y=x^2-2x+2$ の共有点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とする

y 消去して　$x^2-2x+2=mx-2m+3$

$x^2-(m+2)x+2m-1=0$

$$x=\frac{(m+2)\pm\sqrt{(m+2)^2-4\times1\times(2m-1)}}{2}$$

$$=\frac{m+2\pm\sqrt{m^2+4m+4-8m+4}}{2}$$

$$=\frac{m+2\pm\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$$

よって

$$\alpha=\frac{m+2-\sqrt{m^2-4m+8}}{2},\quad \beta=\frac{m+2+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$$

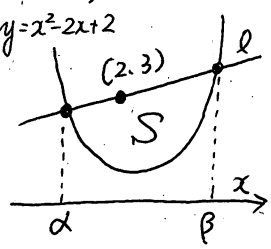
$$\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{m^2-4m+8}}{2}=\sqrt{m^2-4m+8}\ \cdots\cdots②$$

①と $y=x^2-2x+2$ で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{(mx-2m+3)-(x^2-2x+2)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$ ←②代入



$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-4m+8}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

$m=2$ のとき S は最小になるので

①より　$y=2x-2\times2+3$

求める直線は　$y=2x-1$

ちなみに

S の最小値は

$$\frac{1}{6}\times(\sqrt{4})^3=\frac{4}{3}$$

ショートトライアル　積分法　１４

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線 $C : y = x^3 - 2x$ と，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ における接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{-1} (t^2 - 1)dt$ の極値を求めよ。

ショートトライアル　積分法　１４

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　放物線 $y=x^2-4x+3$ と，この放物線上の点 $(4,\ 3)$，$(0,\ 3)$ における接線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$y'=2x-4$ より $(4,3)$ における接線の傾きは $2\times4-4=4$. なので接線の方程式は

$y-3=4(x-4)$

$\therefore y=4x-13$ ……①

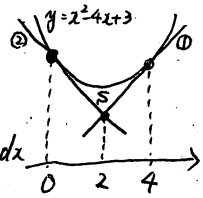
$(0,3)$ における接線の傾きは $2\times0-4=-4$ なので接線の方程式は

$y-3=-4(x-0)$

$\therefore y=-4x+3$ ……②

①，②の交点は y 消去して

$4x-13=-4x+3$ より $x=2$



$$S=\int_0^2\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx+\int_2^4\{(x^2-4x+3)-(4x-13)\}dx$$

$$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4$$

$$=\frac{2^3}{3}-0+0-\frac{1}{3}\times(-2)^3$$

$$=\frac{16}{3}$$

2　曲線 $C:y=x^3-2x$ と，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$ における接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$y'=3x^2-2$ より 傾きは $3(-1)^2-2=1$

接線の方程式は

$y-1=1\times\{x-(-1)\}$

$\therefore y=x+2$ ……①

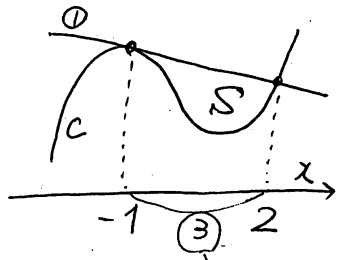
①と C で y 消去して

$x^3-2x=x+2$

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$



$$S=\int_{-1}^2\{(x+2)-(x^3-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)dx$$

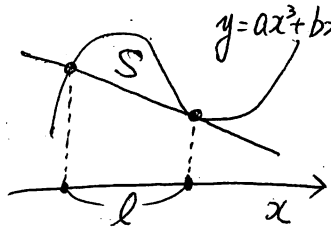
$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2=\frac{27}{4}$$

$$\boxed{S=\frac{1}{12}\times3^4=\frac{27}{4}}$$

12分の1公式

3次関数とその接線で囲まれる部分の面積

⟶ 12分の1 公式（4乗する式）



$$S=\frac{|a|}{12}\times\ell^4$$

（x^3の係数）

（x座標の幅）

3　関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{-1}(t^2-1)dt$ の極値を求めよ。

$$f(x)=\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_x^{-1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)$$

$$=-\frac{x^3}{3}+x+\frac{2}{3}$$

$$f'(x)=-x^2+1$$

$$=-(x+1)(x-1)$$

$$f(-1)=-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)+\frac{2}{3}=0 \leftarrow f(-1)=\int_{-1}^{-1}(t^2-1)dt=0$$

としてもよい

$$f(1)=-\frac{1}{3}+1+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

x	……	-1	……	1	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘

$x=1$ で極大値 $\frac{4}{3}$

$x=-1$ で極小値 0