ショートトライアル　微分法　1

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = x^2 + x$

(2)　$y = -10$

(3)　$y = 3x^3 - 4x^2 + 6x$

(4)　$y = -\frac{7}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 1$

(5)　$y = (x+1)(x-4)$

(6)　$y = (3x-1)^2$

2　$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ について，次の x の値における微分係数を求めよ。

(1)　$x = 1$

(2)　$x = 3a$

3　次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
$f'(0) = 3,\ f'(1) = -1,\ f(2) = -2,$

4　次の関数を [ ] 内の文字について微分せよ。

(1)　$y = ax^2 + bx + c$　　$[x]$

(2)　$y = ax^2 + bx + c$　　$[a]$

(3)　$y = ax^2 + bx + c$　　$[c]$

(4)　$x = s + vt + \frac{1}{2}gt^2$　　$[t]$

(5)　$S = \pi r^2$　　$[r]$

(6)　$V = \frac{4}{3}\pi r^3$　　$[r]$

ショートトライアル　微分法　1

＿＿組＿＿番　氏名 解答例

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^2 + x$

$y' = 2x + 1$ //

(2) $y = -10$

$y' = 0$ //

(3) $y = 3x^3 - 4x^2 + 6x$

$y' = 9x^2 - 8x + 6$ //

(4) $y = -\frac{7}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 1$

$y' = -\frac{21}{4}x^2 - 3x$

(5) $y = (x+1)(x-4)$ $= x^2 - 3x - 4$

$y' = 2x - 3$ //

(6) $y = (3x-1)^2$ $= 9x^2 - 6x + 1$

$y' = 18x - 6$ //

2 $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ について，次の x の値における微分係数を求めよ。

$f'(x) = 4x - 6$

(1) $x = 1$

$f'(1) = 4 \times 1 - 6 = -2$ //

(2) $x = 3a$

$f'(3a) = 4 \times 3a - 6$

$= 12a - 6$ //

3 次の条件をすべて満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。
$f'(0) = 3,\ f'(1) = -1,\ f(2) = -2,$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと $f'(x) = 2ax + b$

$f'(0) = 3$ より $2a \times 0 + b = 3$ すなわち $b = 3$ ……①

$f'(1) = -1$ より $2a \times 1 + b = -1$ すなわち $2a + b = -1$ ……②

$f(2) = -2$ より $a \times 2^2 + b \times 2 + c = -2$

すなわち $4a + 2b + c = -2$ ……③

①・②・③を解くと

$a = -2,\ b = 3,\ c = 0$

よって $f(x) = -2x^2 + 3x$ //

4 次の関数を [ ] 内の文字について微分せよ。

(1) $y = ax^2 + bx + c$　[x]

$y' = 2ax + b$ //

(2) $y = ax^2 + bx + c$　[a]

$y' = x^2$ //

(3) $y = ax^2 + bx + c$　[c]

$y' = 1$ //

(4) $x = s + vt + \frac{1}{2}gt^2$　[t]

$x' = v + gt$ //

(5) $S = \pi r^2$　[r]

$S' = 2\pi r$ //

(6) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$　[r]

$V' = 4\pi r^2$ //

ショートトライアル　微分法　2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $y=-x^2+4x$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 A(1, 3) における接線の方程式を求めよ。

(2) 傾きが -4 であるような C の接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 C(1, 0) から引いた接線の方程式を求めよ。

ショートトライアル　微分法　2

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $y=-x^2+4x$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 A(1, 3) における接線の方程式を求めよ。

$y=-x^2+4x$ を微分して

$y'=-2x+4$.

点A(1, 3)における接線の傾きは

$-2\times1+4=2$. ←（接点の x 座標を y' の式に代入）

求める接線の方程式は

$y-3=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x+1$ //

Point　点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線の方程式は
$y-y_1=m(x-x_1)$

(2)　傾きが -4 であるような C の接線の方程式を求めよ。

◎接点を設定せよ!!

接点を $(t, -t^2+4t)$ とおく.

$y'=-2x+4$ より接点における接線の傾きは $-2t+4$ であり、これが -4 と等しいので

$-2t+4=-4$

$-2t=-8$

$t=4$ ←（接点の x 座標が4とわかった!）

$(-t^2+4t=)-4^2+4\times4=0$

↑（接点の y 座標が0とわかった!）

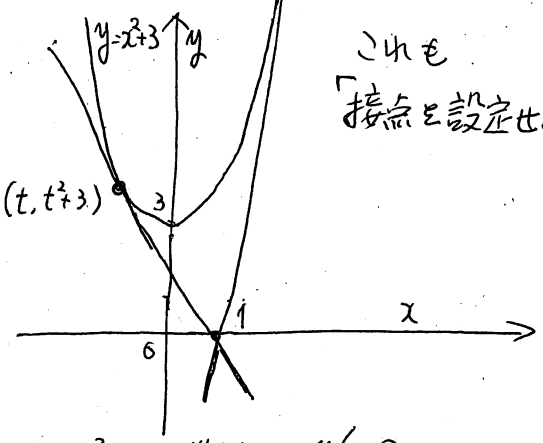
接点は(4, 0)なので

求める接線は

$y-0=-4(x-4)$

$\therefore\ y=-4x+16$ //

2　関数 $y=x^2+3$ のグラフに点 C(1, 0) から引いた接線の方程式を求めよ。



これも「接点を設定せよ!」

$y=x^2+3$ を微分して $y'=2x$

接点を (t, t^2+3) とおくと接線の方程式は

$y-(t^2+3)=2t(x-t)$

$y-(t^2+3)=2tx-2t^2$

$y=2tx-2t^2+(t^2+3)$

$y=2tx-t^2+3$ ……①

（この計算とにかく正しくやる。やり方をいつも決めておくとよい。）

①が C(1, 0) を通るので

$0=2t\times1-t^2+3$

$t^2-2t-3=0$.

$(t-3)(t+1)=0$

$t=-1, 3$ ←（接点の x 座標が -1 と3とわかった!）

$t=-1$ を①に代入 $y=2\cdot(-1)x-(-1)^2+3$

$\therefore\ y=-2x+2$

$t=3$ を①に代入 $y=2\times3x-3^2+3$

$\therefore\ y=6x-6$

以上より

$y=-2x+2$ と $y=6x-6$

ちなみに接点は (t, t^2+3) より

$(-1)^2+3=4$ と $3^2+3=12$ で

$(-1, 4)$ と $(3, 12)$ である

ショートトライアル　微分法　3

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 曲線 $y = x^3 - x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 接線の傾きが -3 になる点の座標を求めよ。

(2) 接線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 点 $(0,\ 2)$ から曲線 $y = x^3 - x^2 - 1$ に引いた接線の方程式をすべて求めよ。

ショートトライアル　微分法　3

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　曲線 $y = x^3 - x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

$y = x^3 - x$ を微分して $y' = 3x^2 - 1$

$(1, 0)$ における接線の傾きは

$3 \times 1^2 - 1 = 2$.

よって求める接線の方程式は

$y - 0 = 2(x - 1)$

$\therefore y = 2x - 2$ //

2　関数 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ について，次の問いに答えよ。

(1) 接線の傾きが -3 になる点の座標を求めよ。

$y = x^3 - 3x^2 + 1$ を微分して $y' = 3x^2 - 6x$

接点を $(t,\ t^3 - 3t^2 + 1)$ とおくと接線の傾きは

$3t^2 - 6t$ であり，これが -3 と一致する

$3t^2 - 6t = -3$

$3t^2 - 6t + 3 = 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

$t = 1$

これを $t^3 - 3t^2 + 1$ に代入

$1^3 - 3 \times 1^2 + 1 = -1$

よって 接点は $(1, -1)$ //

(2) 接線の方程式を求めよ。

(1)より $y - (-1) = -3(x - 1)$

$\therefore y = -3x + 2$ //

3　点 $(0,\ 2)$ から曲線 $y = x^3 - x^2 - 1$ に引いた接線の方程式をすべて求めよ。

$y = x^3 - x^2 - 1$ を微分して $y' = 3x^2 - 2x$

接点を $(t,\ t^3 - t^2 - 1)$ とおくと接線の方程式は

$y - (t^3 - t^2 - 1) = (3t^2 - 2t)(x - t)$　分配

$y - (t^3 - t^2 - 1) = (3t^2 - 2t)x - t(3t^2 - 2t)$

展開しない↑　展開する↑

$y - (t^3 - t^2 - 1) = (3t^2 - 2t)x - 3t^3 + 2t^2$

移項

$y = (3t^2 - 2t)x - 3t^3 + 2t^2 + (t^3 - t^2 - 1)$

$\therefore y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 - 1$ ……①

①が $(0, 2)$ を通るので

$2 = (3t^2 - 2t) \times 0 - 2t^3 + t^2 - 1$

$2t^3 - t^2 + 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ & & -2 & 3 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

$(t+1)(2t^2 - 3t + 3) = 0$

$2t^2 - 3t + 3 = 0$ について判別式 D とすると

$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 9 - 24 = -15 < 0$.

t は実数なので　$t = -1$.

①に代入して

$(y = (3+2)x + 2 + 1 - 1)$

求める接線の方程式は　$y = 5x + 2$ //

（接点は

$(-1)^3 - (-1)^2 - 1 = -3$ より $(-1, -3)$）

ショートトライアル　微分法　4

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $y = 2x^2 - 4$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$ の極値を求め，グラフをかけ。

$\boxed{3}$ 関数 $y = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$ の極値を求め、そのグラフをかけ。

ショートトライアル　微分法　4

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $y = 2x^2 - 4$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$y = 2x^2 - 4$ を微分して $y' = 4x$

接線の傾きは $4 \times 1 = 4$ なので

求める接線の方程式は

$y - (-2) = 4(x - 1)$

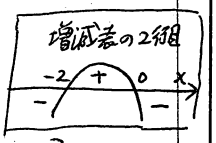
$\therefore\ y = 4x - 6$ //

2　関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 1$ の極値を求め，グラフをかけ。

$f'(x) = -3x^2 - 6x$

$= -3x(x+2)$ →

増減表の2行目



$f'(x) = 0$ を解くと $x = -2, 0$

$f(-2) = 8 - 12 + 1 = -3$

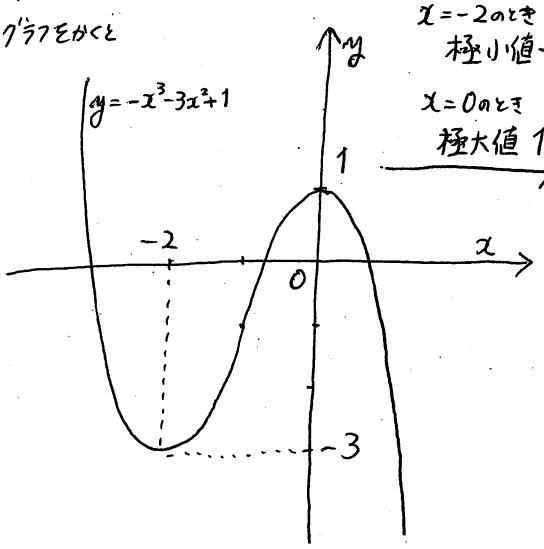
$f(0) = 1$

x^3 の係数の符号と一致する

増減表をかくと

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3	↗	1	↘

グラフをかくと



$x = -2$ のとき 極小値 -3

$x = 0$ のとき 極大値 1 //

3　関数 $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$ の極値を求め、そのグラフをかけ。

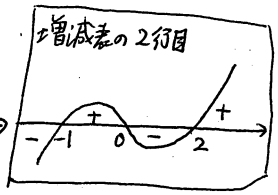
$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$ とおくと

$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$

$= 3x(x^2 - x - 2)$

$= 3x(x+1)(x-2)$ →

増減表の2行目



$f'(x) = 0$ を解くと $x = -1, 0, 2$

$f(-1) = \frac{3}{4} + 1 - 3 = -\frac{5}{4}$

$f(0) = 0$

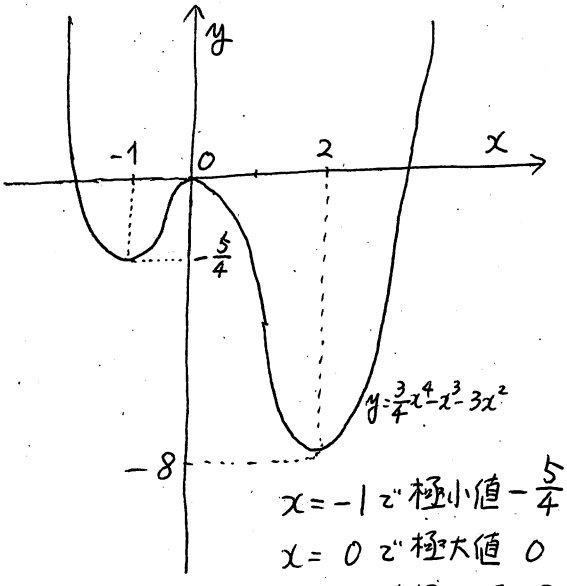
$f(2) = 12 - 8 - 12 = -8$

x^4 の係数の符号と一致する

増減表をかくと

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	0	↘	-8	↗

グラフをかくと



$x = -1$ で極小値 $-\frac{5}{4}$

$x = 0$ で極大値 0

$x = 2$ で極小値 -8 //

注意

グラフをかくときは必ず増減表を根拠とすること．増減表無しでグラフをかくと0点です

※3次関数，4次関数… の場合です．

ショートトライアル　微分法　5．5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
$y = -x^3 + 12x - 5 \ (-1 \leqq x \leqq 3)$

$\boxed{2}$ 関数 $y = -2x^2 - 4x + 1$ のグラフについて，傾きが 4 であるような接線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $y = x^2 - 3x + 3$ のグラフに点 C(1, 0) から引いた接線の方程式を求めよ。

ショートトライアル　微分法　5．5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$y=-x^3+12x-5\ (-1\leqq x\leqq 3)$

$y'=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ を解くと $x=-2,\ 2$.

定義域が $-1\leqq x\leqq 3$ なので

$x=-1$ のとき $y=1-12-5=-16$

$x=2$ のとき $y=-8+24-5=11$

$x=3$ のとき $y=-27+36-5=4$

増減表をかくと

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-16	↗	11	↘	4

よって

$x=2$ のとき最大値 11

$x=-1$ のとき最小値 -16 //

2　関数 $y=-2x^2-4x+1$ のグラフについて，傾きが 4 であるような接線の方程式を求めよ。

接点を $(t,\ -2t^2-4t+1)$ とおく.

$y'=-4t-4$ より，接点における接線の傾きは $-4t-4$ であり，これが 4 と等しいので

$-4t-4=4$

$-4t=8$

$t=-2$ ← (これが接点の x 座標)

($-2t^2-4t+1$ より)

$-2(-2)^2-4(-2)+1=-8+8+1=1$ ← (接点の y 座標)

接点は $(-2,\ 1)$ なので

求める接線は

$y-1=4\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=4x+9$ //

3　関数 $y=x^2-3x+3$ のグラフに点 C(1, 0) から引いた接線の方程式を求めよ。

接点を $(t,\ t^2-3t+3)$ とおく

$y'=2x-3$ より接線の方程式は

$y-(t^2-3t+3)=(2t-3)(x-t)$

$y-(t^2-3t+3)=(2t-3)x-2t^2+3t$

$y=(2t-3)x-2t^2+3t+(t^2-3t+3)$

$\therefore\ y=(2t-3)x-t^2+3$ …… ①

① が C(1, 0) を通るから

$0=(2t-3)\times 1-t^2+3$

$t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$

$t=0,\ 2$

$t=0$ を ① に代入して $y=-3x+3$

$t=2$ を ① に代入して $y=x-1$

以上より

$y=-3x+3$ と $y=x-1$ //

ショートトライアル　微分法　5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　関数 $y=-x^3-3x^2+9x+10$ の増減表を作り，グラフをかけ。

2　関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が，$x=0$ で極大値 3 をとり，$x=1$ で極小値 0 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

ショートトライアル　微分法　5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $y=-x^3-3x^2+9x+10$ の増減表を作り，グラフをかけ。

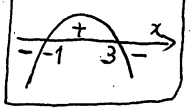
$f(x)=-x^3-3x^2+9x+10$ とおく

$f'(x)=-3x^2-6x+9$

$=-3(x^2+2x-3)$

$=-3(x+3)(x-1)$ →

増減表の2行目



$f'(x)=0$ を解くと $x=-3,\ 1$

$f(-3)=-(-3)^3-3(-3)^2+9(-3)+10$

$=27-27-27+10=-17$

$f(1)=-1^3-3\times1^2+9\times1+10$

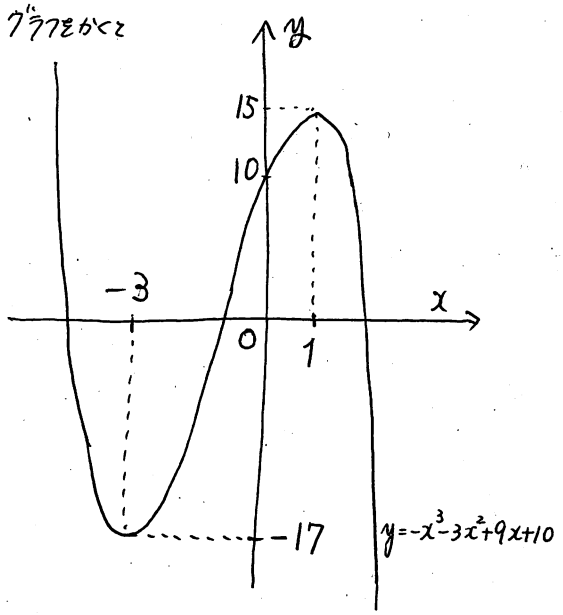
$=-1-3+9+10=15$

増減表をかくと

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-17	↗	15	↘

x^3の係数の符号と一致する

グラフをかくと



2　関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が，$x=0$ で極大値 3 をとり，$x=1$ で極小値 0 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=0$ で極大値 3 だから

$f(0)=3$ かつ $f'(0)=0$

$a\times0^3+b\times0^2+c\times0+d=3$，$3a\times0^2+2b\times0+c=0$

すなわち $d=3$，$c=0$

$x=1$ で極小値 0 だから

$f(1)=0$ かつ $f'(1)=0$

$a\times1^3+b\times1^2+c\times1+d=0$，$3a\times1^2+2b\times1+c=0$

すなわち $a+b+c+d=0$，$3a+2b+c=0$

$$\begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

これを解くと $a=6,\ b=-9,\ c=0,\ d=3$

（これで終わりにしたら ほとんど0点の答案）

逆に（⇐）このとき

$f(x)=6x^3-9x^2+3$

$f'(x)=18x^2-18x=18x(x-1)$

増減表をかくと

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	0	↗

$x=0$ で極大値 3，$x=1$ で極小値 0 をとる

以上より

$a=6,\ b=-9,\ c=0,\ d=3$ //

何よりも大切なのはココです。

こたえは最後にまとめて下さい。

---

2 は増減表を必ず書かないと満点にならない（ほとんど0点）

教科書にもあるが

$\boxed{f(x)\text{は}x=a\text{で極値} \Longrightarrow f'(a)=0}$

この矢印は一方通行だから逆⇐を増減表で説明する

ショートトライアル　微分法　6

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 方程式 $-2x^3+3x^2-1=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。（グラフを用いること）

$\boxed{2}$ 方程式 $x^3-3x-1-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3-3x^2+3$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。そのグラフをかけ。

(2) $y=f(x)$ と $y=3$ の交点の座標を求めよ。

(3) $y=f(x)$ と $y=-1$ の交点の座標を求めよ。

ショートトライアル　微分法　6

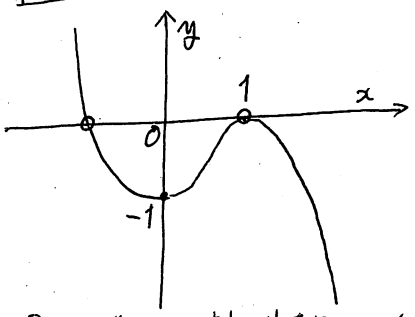
＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　方程式 $-2x^3+3x^2-1=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。（グラフを用いること）

$f(x)=-2x^3+3x^2-1$ とおくと

$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−1	↗	0	↘



$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点が2個なので方程式は異なる2個の実数解をもつ //

2　方程式 $x^3-3x-1-a=0$ が異なる3個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

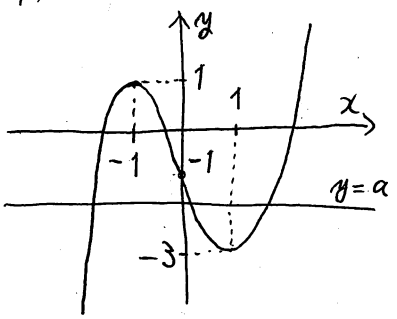
（変数と定数は分離せよ!!）

$x^3-3x-1=a$ ……①

$f(x)=x^3-3x-1$ とおく.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	…	−1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗



$y=a$ と $y=f(x)$ の共有点の個数と方程式の異なる実数解の個数は一致するから，グラフより求める a の値の範囲は

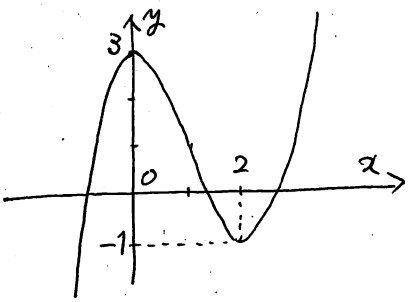
$-3<a<1$ //

3　$f(x)=x^3-3x^2+3$ とする。次の問いに答えよ。

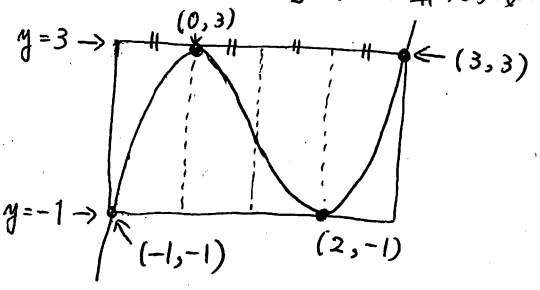
(1)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。そのグラフをかけ。

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	−1	↗



(2)(3)は「3次関数は箱入り娘」を使うと計算する必要は無い.



(2)　$y=f(x)$ と $y=3$ の交点の座標を求めよ。

y 消去して　$x^3-3x^2+3=3$

$x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

$(0,3)$ と $(3,3)$ //

(3)　$y=f(x)$ と $y=-1$ の交点の座標を求めよ。

y 消去して　$x^3-3x^2+3=-1$

$x^3-3x^2+4=0$

$(x-2)^2(x+1)=0$

$x=-1,\ 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & 2 & -2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ & & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$(-1,-1)$ と $(2,-1)$ //

ショートトライアル　微分法　7

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1　方程式 $x^3-3x+1-a=0$ ……①
について次の問いに答えよ。

(1)　方程式①が異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　方程式①が異なる2個の負の解と1個の正の解をもつような a の値の範囲を求めよ。
※(1)のグラフを用いてよい。

2　関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減表をかき，グラフをかけ。

(2)　正の定数 a に対し，関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を求めよ。

ショートトライアル　微分法　7

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　方程式 $x^3-3x+1-a=0$ ……①
について次の問いに答えよ。

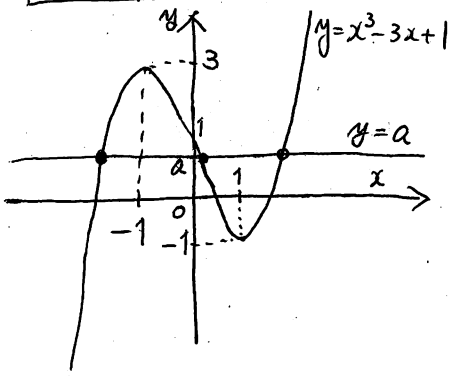
(1)　方程式①が異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

①⇔ $x^3-3x+1=a$

$\begin{cases} y=x^3-3x+1 & \cdots\cdots② \\ y=a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

②について $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

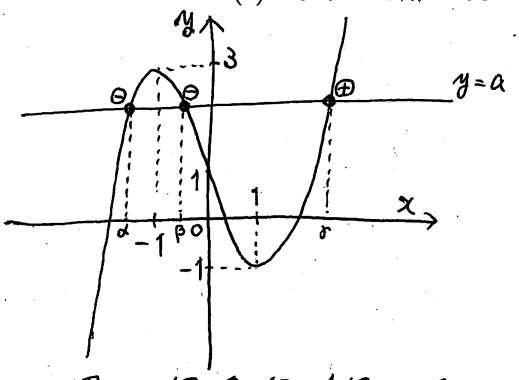
x	…	-1	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗



①が異なる3個の実数解をもつには
②と③が共有点を3個もてばよい。
よって グラフより

$-1<a<3$ //

(2)　方程式①が異なる2個の負の解と1個の正の解をもつような a の値の範囲を求めよ。
※(1)のグラフを用いてよい。



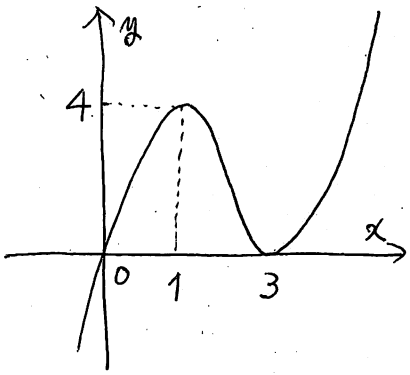
①が異なる2個の負の解と1個の正の解をもつには、
②と③の共有点の x 座標を α、β、γ とおくと
$\alpha<0$, $\beta<0$ で $\gamma>0$ であればよい。
2つが負　1つが正
グラフより　$1<a<3$ //

2　関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ の増減表をかき，グラフをかけ。

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

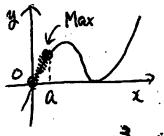
x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



(2)　正の定数 a に対し，関数 $f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq a$ における最大値を求めよ。

aで場合分けが必要

(i) $0<a\leqq 1$ のとき

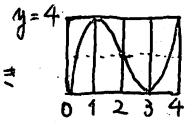


$x=a$ のとき 最大値 $f(a)=a^3-6a^2+9a$

$\begin{cases} y=x^3-6x^2+9x \\ y=4 \end{cases}$ で y 消去して

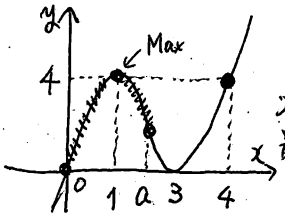
$x^3-6x^2-9x=4 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)=0$

$x=1, 4$



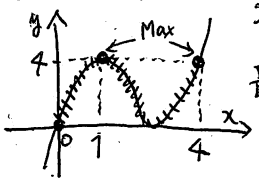
『箱入り娘』を数えばあたりまえ

(ii) $1<a<4$ のとき



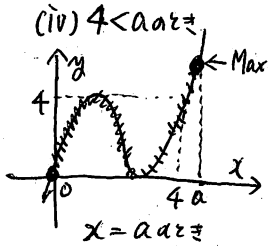
$x=1$ のとき
最大値 4

(iii) $a=4$ のとき



$x=1, 4$ のとき
最大値 4

(iv) $4<a$ のとき



$x=a$ のとき
最大値
$f(a)=a^3-6a^2+9a$

以上より

$\begin{cases} 0<a\leqq 1,\ 4<a \text{ のとき} & x=a \text{ で最大値 } a^3-6a^2+9a \\ 1<a<4 \text{ のとき} & x=1 \text{ で最大値 } 4 \\ a=4 \text{ のとき} & x=1, 4 \text{ で最大値 } 4 \end{cases}$ //

ショートトライアル　微分法　7．5

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 方程式 $2x^3-6x+3+a=0$ ……①
について次の問いに答えよ。

(1) 方程式①が異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2) 方程式①が異なる2個の正の解と1個の負の解をもつような a の値の範囲を求めよ。
※(1)のグラフを用いてよい。

$\boxed{2}$ $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3+4 \geqq 3x^2$$

$\boxed{3}$ 点 $(1,\ -4)$ から放物線 $C: y=x^2-1$ に引いた接線の方程式を求めよ。および，それぞれの接点の座標を求めよ。

ショートトライアル　微分法　7．5

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　方程式 $2x^3-6x+3+a=0$ ……①
について次の問いに答えよ。

(1)　方程式①が異なる3個の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

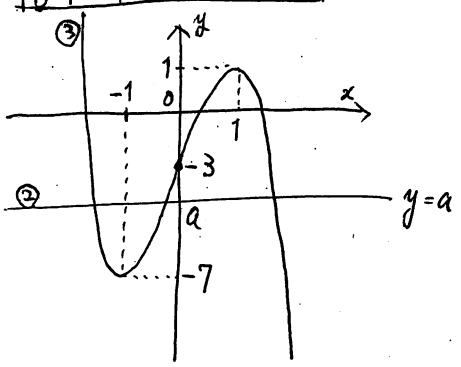
変数と定数は分離せよ！

$-2x^3+6x-3=a$

$\begin{cases} y=-2x^3+6x-3 \cdots ② \\ y=a \cdots\cdots ③ \end{cases}$

②について $y'=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

x	…	-1	…	1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-7	↗	1	↘

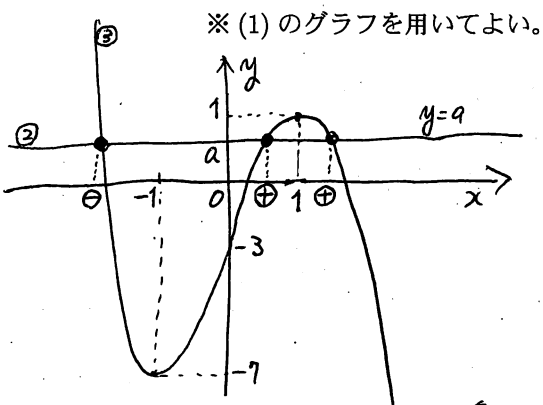


①が異なる3個の実数解をもつには
②と③が共有点を3個もてばよい
グラフより

$-7<a<1$ //

(2)　方程式①が異なる2個の正の解と1個の負の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

※(1)のグラフを用いてよい。



①が異なる2個の正の解と1個の負の解をもつには、②、③の共有点の x 座標が正のものを2個、負のものを1個もつようにすればよい。　グラフから

$-3<a<1$ //

2　$x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$x^3+4 \geqq 3x^2$

(proof)
$f(x)=$(左辺)$-$(右辺)$=(x^3+4)-3x^2$ とおく
ゆえに $f(x)=x^3-3x^2+4$
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

x	0	…	2	…
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0	↗

増減表より $x \geqq 0$ において $f(x) \geqq f(2)=0$.
すなわち (左辺)$-$(右辺)$\geqq 0$ だから

$x \geqq 0$ のとき $x^3+4 \geqq 3x^2$ である
▨

3　点 $(1,\ -4)$ から放物線 $C: y=x^2-1$ に引いた接線の方程式を求めよ。および，それぞれの接点の座標を求めよ。

接点を設定せよ！

接点を $(t,\ t^2-1)$ とおく
$y'=2x$ より接線の方程式は
$y-(t^2-1)=2t(x-t)$
$y=2tx-2t^2+(t^2-1)$
$\therefore y=2tx-t^2-1$ ……①
①が $(1,-4)$ を通るので
$-4=2t\times1-t^2-1$
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$t=-1,\ 3$
$t=-1$ のときの①より $y=-2x-2$.
また $(-1)^2-1=0$ より接点は $(-1,0)$
$t=3$ のときの①より $y=6x-10$
$3^2-1=8$ より 接点 $(3,8)$
以上より 接線と接点は
$y=-2x-2$ で $(-1,0)$
$y=6x-10$ で $(3,8)$ //

ショートトライアル　微分法　8

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ x の方程式 $2x^3+3x^2-12x-3-a=0$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 曲線 $C: y=x^3+3x^2+x$ と点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ショートトライアル　微分法　8

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　x の方程式 $2x^3+3x^2-12x-3-a=0$ が異なる 2 個の正の解と 1 個の負の解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

$2x^3+3x^2-12x-3=a$ ……①

$\begin{cases} y=2x^3+3x^2-12x-3 \cdots\cdots ② \\ y=a \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

②の右辺を $f(x)$ とおくと

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x^2+x-2)$

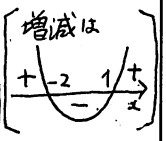
$=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ を解くと $x=-2,\ 1$

$f(-2)=-16+12+24-3=17$

$f(1)=2+3-12-3=-10$

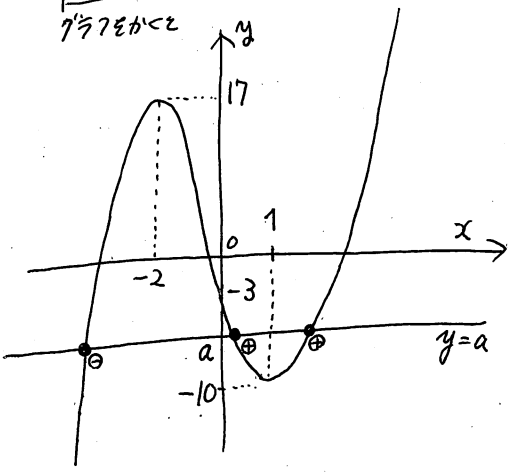
増減は



増減表をかくと

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	17	↘	-10	↗

グラフをかくと



①が異なる2個の正の解と1個の負の解をもつには、②と③が3個の共有点をもち、共有点の x 座標が正のものを2個（←図の⊕⊕）負のものを1個（↑図の⊖）もてばよいから、グラフより

$-10<a<-3$ //

2　曲線 $C: y=x^3+3x^2+x$ と点 A(1, a) がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

曲線C上の点を $(t,\ t^3+3t^2+t)$ とおく。

$y'=3x^2+6x+1$ より接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$

$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)x-t(3t^2+6t+1)$

$y=(3t^2+6t+1)x-3t^3-6t^2-t+(t^3+3t^2+t)$

$\therefore y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2 \cdots$①

①がA(1, a)を通るから

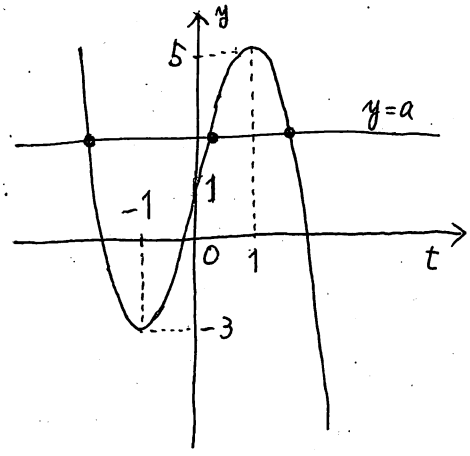
$a=(3t^2+6t+1)\times 1-2t^3-3t^2$

$a=-2t^3+6t+1$ ……②

$f(t)=-2t^3+6t+1$ とおくと

$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-3	↗	5	↘



接線が3本引けるとき、接点が3個存在するので方程式②は異なる3個の実数解をもつ。そのためには $y=a$ と $y=f(t)$ が共有点を3個もてばよいからグラフより

$-3<a<5$ //

ショートトライアル　微分法　9

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の条件を満たす3次関数 $f(x)$ を求めよ。
$f'(1) = f'(-1) = 1$，$f(1) = 0$，$f(-1) = 2$

$\boxed{2}$ 関数 $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。

$\boxed{3}$ 曲線 $y = x^3 + x^2 + ax$ (a は定数) と曲線 $y = x^2 - 2$ は，ともにある点Pを通り，点Pにおいて共通の接線をもっている。このとき，a の値と接点Pの座標を求めよ。

ショートトライアル　微分法　9

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　次の条件を満たす3次関数 $f(x)$ を求めよ。
$f'(1)=f'(-1)=1,\ f(1)=0,\ f(-1)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

$f'(1)=1$ より $3a+2b+c=1$ ‥‥①

$f'(-1)=1$ より $3a-2b+c=1$ ‥‥②

$f(1)=0$ より $a+b+c+d=0$ ‥‥③

$f(-1)=2$ より $-a+b-c+d=2$ ‥‥④

①−②より $4b=0$ だから $b=0$

よって ①は $3a+c=1$ ‥‥⑤

③は $a+c+d=0$ ‥‥⑥

④は $-a-c+d=2$ ‥‥⑦

⑥+⑦より $2d=2$ だから $d=1$

よって ⑥は $a+c=-1$ ‥‥⑧

⑤−⑧より $2a=2$ だから $a=1$.

⑧より $1+c=-1$ だから $c=-2$.

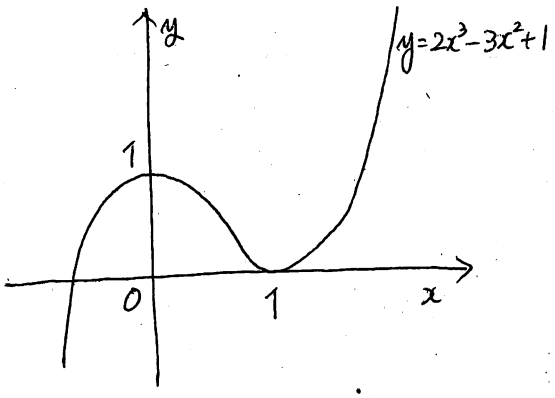
$a=1,\ b=0,\ c=-2,\ d=1$

よって $f(x)=x^3-2x+1$ //

2　関数 $y=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

x	‥‥	0	‥‥	1	‥‥
y'	+	0	−	0	+
y	↗	1	↘	0	↗



3　曲線 $y=x^3+x^2+ax$ (a は定数) と曲線 $y=x^2-2$ は，ともにある点Pを通り，点Pにおいて共通の接線をもっている。このとき，a の値と接点Pの座標を求めよ。

$f(x)=x^3+x^2+ax,\ g(x)=x^2-2$ とおくと

$f'(x)=3x^2+2x+a,\ g'(x)=2x$

接点の x 座標を t とおくと題意より

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} t^3+t^2+at=t^2-2 \\ 3t^2+2t+a=2t \end{cases}$$

整理して $\begin{cases} t^3+at+2=0 \cdots ① \\ a=-3t^2 \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入すると

$t^3+(-3t^2)t+2=0$

$-2t^3+2=0$

$t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0$

$t^2+t+1=0$ の判別式をDとすると

$D=1^2-4\times1\times1=-3<0$ で虚数解

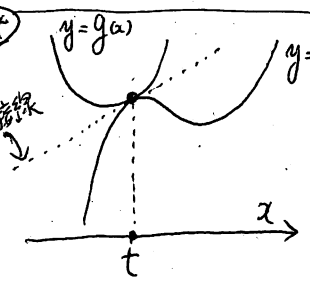
t は実数なので $t=1$.

接点の y 座標は $g(1)=1^2-2=-1$.

②より $a=-3\times1^2=-3$

以上より $a=-3$，接点は $P(1,-1)$ //

point



接点が共通な共通接線の場合

$\begin{cases} f(t)=g(t) \leftarrow y\text{座標が等しい} \\ f'(t)=g'(t) \leftarrow \text{接線の傾きが等しい} \end{cases}$

ショートトライアル　微分法　１０

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x + 2$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2kx + 1$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$ 方程式 $x^3 + 3x^2 - 1 - a = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{4}$ 2 次関数 $f(x)$ が次の等式を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$3f(x) = xf'(x) + x^2 + 4x - 9$$

$\boxed{5}$ 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^4 - 2x^3 + 3 \quad (-1 \leqq x \leqq 2)$$

ショートトライアル　微分法　１０

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $f(x)=x^3-ax^2+4x+2$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2-2ax+4$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもてばよいから

判別式Dとおくと

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\times4>0$$

$$a^2-12>0$$

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})>0$$

$$a<-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}<a$$

2　関数 $f(x)=x^3+2x^2+2kx+1$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2+4x+2k$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもたなければよいから、判別式Dとおくと

$$\frac{D}{4}=2^2-3\times2k\leqq0$$

$$4-6k\leqq0$$

$$k\geqq\frac{2}{3}$$

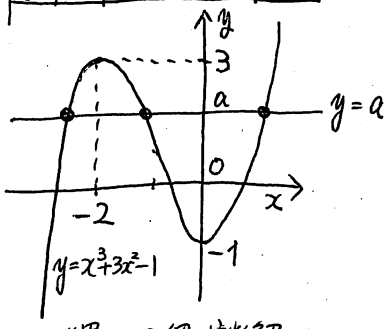
3　方程式 $x^3+3x^2-1-a=0$ が異なる3つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$x^3+3x^2-1=a$ ……①

$$\begin{cases} y=x^3+3x^2-1 & \cdots\cdots ② \\ y=a & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②について $y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

x	…	-2	…	0	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗



①が異なる3個の実数解をもつとき

②と③が共有点を3個もつ。

グラフより　$-1<a<3$

4　2次関数 $f(x)$ が次の等式を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$$3f(x)=xf'(x)+x^2+4x-9$$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$　を等式に代入して

$3(ax^2+bx+c)=x(2ax+b)+x^2+4x-9$

$3ax^2+3bx+3c=(2a+1)x^2+(b+4)x-9$ ……①

①が x についての恒等式だから

$$\begin{cases} 3a=2a+1 \\ 3b=b+4 \\ 3c=-9 \end{cases}$$

これを解くと

$a=1,\ b=2,\ c=-3$

よって　$f(x)=x^2+2x-3$

5　次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$y=x^4-2x^3+3\ (-1\leqq x\leqq2)$

$y'=4x^3-6x^2=4x^2(2x-3)$

$y'=0$ を解くと $x=0,\ \frac{3}{2}$

$x=-1$ のとき $y=1+2+3=6$

$x=0$ のとき $y=3$

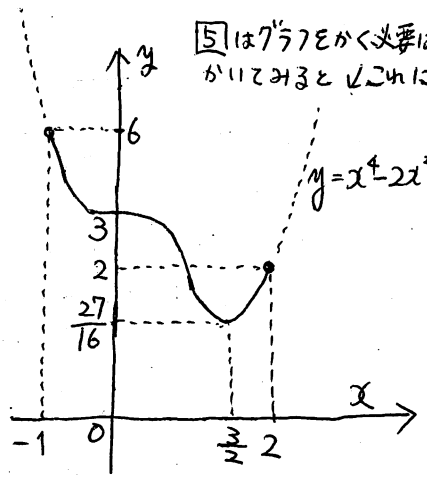
$x=\frac{3}{2}$ のとき $y=\frac{81}{16}-\frac{27}{4}+3=\frac{81-108+48}{16}=\frac{21}{16}$

$x=2$ のとき $y=16-16+3=3$

x	-1	…	0	…	$\frac{3}{2}$	…	2
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	6	↘	3	↘	$\frac{21}{16}$	↗	3

$x=-1$ のとき最大値6，$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{21}{16}$

5はグラフをかく必要は無いのだが、かいてみると↓これになる。



ショートトライアル　微分法　１０．５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

強化演習「共通接線 ①（接点がずれる編）」

$\boxed{1}$　2 曲線 $y = x^3 + 4$，$y = x^3$ のどちらにも接する接線の方程式を求めよ。

強化演習「共通接線 ①（接点が共通編）」

$\boxed{2}$　2 曲線 $y = x^3 + 3$，$y = ax^2 + x - 2$ が接するように定数 a の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１０．５

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

強化演習「共通接線①（接点がずれる編）」

1　2曲線 $y=x^3+4$, $y=x^3$ のどちらにも接する接線の方程式を求めよ。

$y=x^3+4$ 上の接点を $(s,\ s^3+4)$ とおく

$y'=3x^2$ より接線は

$$y-(s^3+4)=3s^2(x-s)$$

$$\therefore\ y=3s^2x-2s^3+4 \cdots ①$$

$y=x^3$ 上の接点を $(t,\ t^3)$ とおく

$y'=3x^2$ より接線は

$$y-t^3=3t^2(x-t)$$

$$\therefore\ y=3t^2x-2t^3 \cdots ②$$

①と②は一致するので

$$\begin{cases} 3s^2=3t^2 \cdots\cdots ③ \\ -2s^3+4=-2t^3 \cdots ④ \end{cases}$$

③より　$s^2=t^2$

$s^2-t^2=0$

$(s+t)(s-t)=0$ だから

$s=t$ または $s=-t$.

$s=t$ のとき④は $-2t^3+4=-2t^3$ となり不適

$s=-t$ のとき④は $-2(-t)^3+4=-2t^3$

$2t^3+4=-2t^3$

$4t^3+4=0$.

$t^3+1=0$

$(t+1)(t^2-t+1)=0$

t は実数なので　$t=-1$.

$s=-t$ より　$s=1$.

$s=1$ を①に代入して　$y=3x+2$

$t=-1$ を②に代入して　$y=3x+2$

よって求める接線は　$y=3x+2$ //

強化演習「共通接線①（接点が共通編）」

2　2曲線 $y=x^3+3$, $y=ax^2+x-2$ が接するように定数 a の値を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

$f(x)=x^3+3$, $g(x)=ax^2+x-2$ とおくと

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+1$

接点の x 座標を t とおくと

$f(t)=g(t)$ より　$t^3+3=at^2+t-2 \cdots ①$

$f'(t)=g'(t)$ より　$3t^2=2at+1 \cdots\cdots ②$

②より　$2at=3t^2-1$

$$at=\frac{3t^2-1}{2} \cdots ③$$

①より　$t^3+3=\underbrace{at}_{③}\times t+t-2$ に③を代入

$$t^3+3=\frac{3t^2-1}{2}\times t+t-2$$

両辺×2

$$2t^3+6=3t^3-t+2t-4$$

整理して　$t^3+t-10=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 1 & -10 \\ & & 2 & 4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

$(t-2)(t^2+2t+5)=0$

t は実数なので　$t=2$.

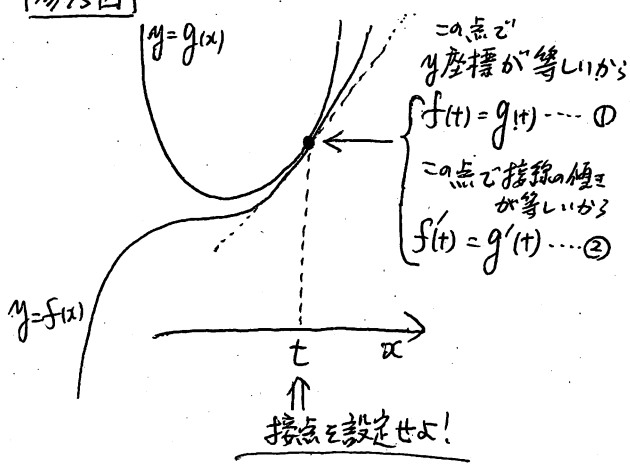
③より　$a\times 2=\dfrac{3\times 2^2-1}{2}$

$$\therefore\ a=\frac{11}{4}$$

また　$f(2)=2^3+3=11$

よって　$a=\dfrac{11}{4}$. 接点は $(2,\ 11)$ //

参考図



ショートトライアル　微分法　１１

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$　関数 $f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3kx + 1$ が極値をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{2}$　関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$　方程式 $2x^3 + 6x^2 - 3 - a = 0$ がただ１つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{4}$　$x > 2$ のとき，不等式 $x^3 + 4x^2 > 3x + 17$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{5}$　点 $(1,\ 1)$ を通り，曲線 $y = x^3 - 4x$ に接する直線の方程式を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１１

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $f(x)=x^3-3kx^2+3kx+1$ が極値をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2-6kx+3k=3(x^2-2kx+k)$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもてばよいから

判別式をDとおくと

$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\times k>0$

$k(k-1)>0$

$k<0,\ 1<k$ //

2　関数 $f(x)=x^3+3x^2+ax$ が常に増加するように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2+6x+a$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもたなければよいから 判別式をDとおくと

$\frac{D}{4}=3^2-3\times a\leqq 0$

$9-3a\leqq 0$

$a\geqq 3$ //

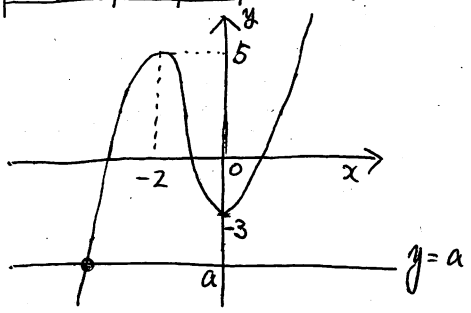
3　方程式 $2x^3+6x^2-3-a=0$ がただ1つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$2x^3+6x^2-3=a$ ……①

$\begin{cases} y=2x^3+6x^2-3 & \cdots ② \\ y=a & \cdots ③ \end{cases}$

②について $y'=6x^2+12x=6x(x+2)$

x	…	-2	…	0	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	5	↘	−3	↗



①がただ1個の実数解をもつとき

②と③は共有点を1個だけもつ

$a<-3,\ 5<a$ //

4　$x>2$ のとき，不等式 $x^3+4x^2>3x+17$ が成り立つことを証明せよ。

(proof) $f(x)=$(左辺)$-$(右辺)$=x^3+4x^2-3x-17$ とおく

$f'(x)=3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)$

x	2	……
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	↗

よって $x>2$ で $f(x)$ は増加.

$f(2)=8+16-6-17=1$

増減表より $x>2$ のとき $f(x)>f(2)=1>0$

すなわち　$x>2$ で $f(x)>0$ だから

(左辺) > (右辺)

よって

$x>2$ のとき $x^3+4x^2>3x+17$ が成り立つ

■

5　点 (1, 1) を通り，曲線 $y=x^3-4x$ に接する直線の方程式を求めよ。

接点を $(t,\ t^3-4t)$ とおく

$y'=3x^2-4$ より 接線の方程式は

$y-(t^3-4t)=(3t^2-4)(x-t)$

$y-(t^3-4t)=(3t^2-4)x-3t^3+4t$

$y=(3t^2-4)x-3t^3+4t+(t^3-4t)$

$y=(3t^2-4)x-2t^3$ ……①

①が点 (1, 1) を通るから

$1=(3t^2-4)\times 1-2t^3$

$2t^3-3t^2+5=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -3 & 0 & 5 \\ & & -2 & 5 & -5 \\ \hline & 2 & -5 & 5 & 0 \end{array}$$

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$.

$2t^2-5t+5=0$ の判別式をDとすると

$D=25-40=-15<0$ であり，tは実数なので

$t=-1$

$t=-1$ を①に代入して $(y=\{3(-1)^2-4\}x-2\cdot(-1)^3)$

$\therefore\ y=-x+2$ //

---

5 の接点は t^3-4t に $t=-1$ 代入して

$(-1)^3-4(-1)=3$ だから $(-1,\ 3)$

傾きも $3\times(-1)^2-4=-1$ なので $y-3=(-1)\{x-(-1)\}$ でも

$y=-x+2$ が出せる.

ショートトライアル　微分法　１１．５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

強化演習「接線の本数」

$\boxed{1}$ 曲線 $C : y = x^3 + 3x^2$ について，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る C の接線が 3 本存在するとき，a の値の範囲を求めよ。

強化演習「3 次関数変数定数が分離できない」

$\boxed{2}$ 3 次方程式 $x^3 - 3ax^2 + 4a = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１１．５

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

強化演習「接線の本数」

1　曲線 $C : y = x^3 + 3x^2$ について，点 $A(0,\ a)$ を通る C の接線が 3 本存在するとき，a の値の範囲を求めよ。

C上の点を $(t,\ t^3+3t^2)$ とおくと

$y' = 3x^2+6x$ より　接線の方程式は

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)x-3t^3-6t^2$

$y=(3t^2+6t)x-3t^3-6t^2+(t^3+3t^2)$

$y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$ ……①

①は $A(0,\ a)$ を通るから

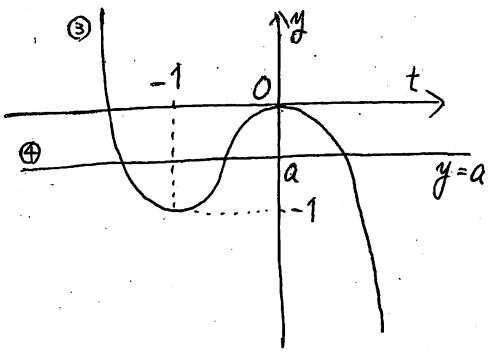
$a=(3t^2+6t)\times 0-2t^3-3t^2$

$-2t^3-3t^2=a$ ……②

$\begin{cases} y=-2t^3-3t^2 \cdots ③ \\ y=a \cdots\cdots ④ \end{cases}$

③について $y'=-6t^2-6t=-6t(t+1)$

t	…	-1	…	0	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-1	↗	0	↘



接線を3本引くには接点が3個必要なので

②が異なる3個の実数解をもつ。

このとき③と④の共有点が3個だから

グラフより

$-1<a<0$ //

強化演習「3 次関数変数定数が分離できない」

2　3 次方程式 $x^3-3ax^2+4a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-3ax^2+4a$ とおく

$f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつには

$y=f(x)$ と $y=0$ が共有点を3個もてばよい

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

(i) $a<0$ すなわち $2a<0$ のとき

x	…	$2a$	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(2a)$	↘	$f(0)$	↗

(ii) $a=0$ のとき　$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2\geqq 0$ だから

$f(x)$は単調増加するで共有点を3個もつことは無い

(iii) $0<a$ すなわち $0<2a$ のとき

x	…	0	…	$2a$	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2a)$	↗

(i)(iii) ともに $y=f(x)$ と $y=0$ が共有点3個もつには

$f(0)\times f(2a)<0$ ……① であればよい

$f(0)=4a$

$f(2a)=(2a)^3-3a(2a)^2+4a$

$=-4a^3+4a$

①より $4a\times(-4a^3+4a)<0$

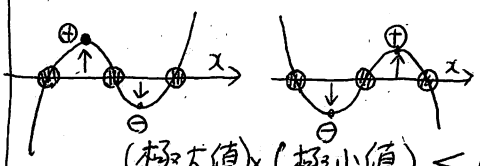
$-16a^2(a^2-1)<0$

$-16a^2<0$ より　$a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$

$\therefore\ a<-1,\ 1<a$ //

point　$f(x)=0$ が異なる3個の実数解 ⟺



(極大値)×(極小値) <0

変数と定数を分離できないときはこれを使う。

ショートトライアル　微分法　１３

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + ax$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x^3 - kx^2 + 2kx + 1$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$ 方程式 $x^3 + 5x^2 + 3x + c = 0$ …① が異なる３個の実数解 α，β，γ をもつ。次の問いに答えよ。ただし，$\alpha < \beta < \gamma$ とする。

(1) c の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) 方程式①が１つの正の解と異なる２つの負の解をもつように，定数 c の値の範囲を求めよ。（答えのみでよい）

(3) 曲線 $y = -x^3 - 5x^2 - 3x$ と直線 $y = -9$ の交点の x 座標を求めよ。

(4) 曲線 $y = -x^3 - 5x^2 - 3x$ と直線 $y = \dfrac{13}{27}$ の交点の x 座標を求めよ。

(5) α，β，γ の取りうる値の範囲を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１３

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $f(x)=-x^3+2x^2+ax$ が極大値と極小値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=-3x^2+4x+a$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもてばよいから 判別式Dについて $D>0$

$\frac{D}{4}=2^2-(-3)\times a>0$

$4+3a>0$

$a>-\frac{4}{3}$ //

2　関数 $f(x)=x^3-kx^2+2kx+1$ が極値をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2-2kx+2k$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもたなければよいから判別式Dについて $D\leqq 0$

$\frac{D}{4}=(-k)^2-3\times 2k\leqq 0$

$k(k-6)\leqq 0$

$0\leqq k\leqq 6$ //

3　方程式 $x^3+5x^2+3x+c=0$ …① が異なる3個の実数解 α，β，γ をもつ。次の問いに答えよ。ただし，$\alpha<\beta<\gamma$ とする。

(1)　c の取りうる値の範囲を求めよ。

$-x^3-5x^2-3x=c$ として

$\begin{cases} y=-x^3-5x^2-3x & \cdots② \\ y=c & \cdots③ \end{cases}$

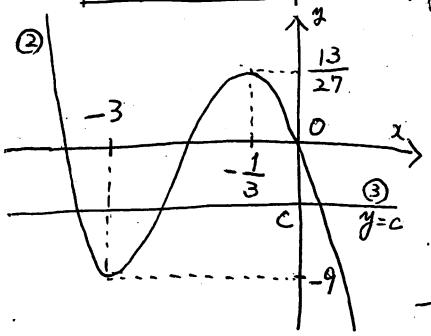
②について $y'=-3x^2-10x-3$

$=-(3x+1)(x+3)$

x	…	-3	…	$-\frac{1}{3}$	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-9	↗	$\frac{13}{27}$	↘

$x=-3$ のとき
$y=27-45+9=-9$

$x=-\frac{1}{3}$ のとき
$y=\frac{1}{27}-\frac{5}{9}+1=\frac{13}{27}$



①が異なる3個の実数解をもつには②と③が共有点を3個もてばよい
グラフから

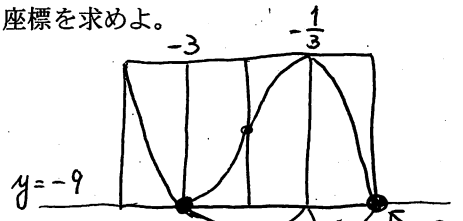
$-9<c<\frac{13}{27}$ //

(2)　方程式①が1つの正の解と異なる2つの負の解をもつように，定数 c の値の範囲を求めよ。（答えのみでよい）

②と③の共有点の x 座標が正のものを1つ負のものを2つもてばよいから

$-9<c<0$ //

(3)　曲線 $y=-x^3-5x^2-3x$ と直線 $y=-9$ の交点の x 座標を求めよ。



Ⓐ $-\frac{1}{3}-(-3)=\frac{8}{3}$

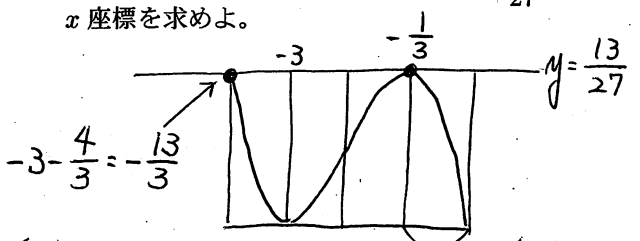
Ⓒ この点の x 座標は $-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=1$

この幅は
Ⓑ $\frac{8}{3}\div 2=\frac{4}{3}$

[移項して
$-x^3-5x^2-3x=-9$ より
$(x+3)^2(x-1)=0$
$x=-3,1$]

-3 と 1 //

(4)　曲線 $y=-x^3-5x^2-3x$ と直線 $y=\frac{13}{27}$ の交点の x 座標を求めよ。



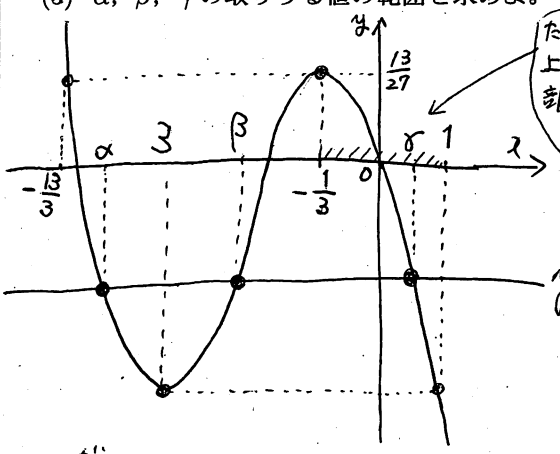
$-3-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3}$

この幅は $\frac{4}{3}$

[移項して
$-x^3-5x^2-3x=\frac{13}{27}$
$(3x+1)^2(3x+13)=0$
$x=-\frac{13}{3},-\frac{1}{3}$]

$-\frac{13}{3}$ と $-\frac{1}{3}$ //

(5)　α，β，γ の取りうる値の範囲を求めよ。



たとえば γ は $y=c$ が上下しても ////////// の部分しか動けない。α，β も同様。

α，β，γ は②と③の共有点の x 座標

グラフより

$-\frac{13}{3}<\alpha<-3$，$-3<\beta<-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}<\gamma<1$ //

ショートトライアル　微分法　１４

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $y = x^3 - 4x$ のグラフについて，傾きが 8 であるような接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ 3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 9x + 2 - a = 0$ が異なる 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a+2)x + 1$ が極値をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，$x = 0$ で極大値 3 をとり，$x = 1$ で極小値 0 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１４

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $y=x^3-4x$ のグラフについて，傾きが 8 であるような接線の方程式を求めよ。

$y=x^3-4x$ 上の点を $(t,\ t^3-4t)$ とおくと

$y'=3x^2-4$ より 接線の傾きが 8 なので

$3t^2-4=8$ を解いて $t=\pm 2$

$t=2$ のとき $2^3-4\times 2=0$ だから 接点 $(2,0)$

よって $y-0=8(x-2)$

$\therefore y=8x-16$

$t=-2$ のとき $(-2)^3-4\cdot(-2)=0$ だから 接点 $(-2,0)$

よって $y-0=8(x+2)$

$\therefore y=8x+16$

以上より

$y=8x-16$ と $y=8x+16$ //

2　3 次方程式 $x^3+3x^2-9x+2-a=0$ が異なる 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^3+3x^2-9x+2=a$ …①

$\begin{cases} y=x^3+3x^2-9x+2 & \cdots ② \\ y=a & \cdots ③ \end{cases}$

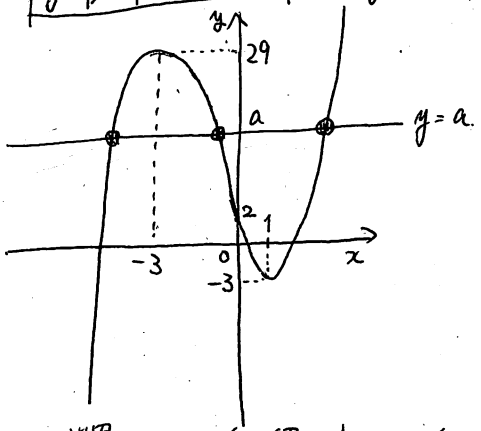
②について $y'=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$

$=3(x+3)(x-1)$

x	…	-3	…	1	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	29	↘	-3	↗

$x=-3$ のとき $y=-27+27+27+2=29$

$x=1$ のとき $y=1+3-9+2=-3$



①が異なる2つの負の解と1つの正の解をもつには

②と③の共有点の x 座標が2つの負のものと

1つの正のものがあればよいから、グラフより

$2<a<29$ //

3　関数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+(a+2)x+1$ が極値をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=x^2+2ax+(a+2)$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもてばよい

判別式 D とすると $D>0$ だから

$\dfrac{D}{4}=a^2-1\cdot(a+2)>0$

$a^2-a-2>0$

$(a-2)(a+1)>0$

$a<-1,\ 2<a$ //

4　3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が，$x=0$ で極大値 3 をとり，$x=1$ で極小値 0 をとるとき，定数 a，b，c，d の値を求めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$x=0$ で極大値 3 なので $f(0)=3$，$f'(0)=0$ である

$f(0)=3$ より $a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=3$　$\therefore d=3$ …①

$f'(0)=0$ より $3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0$　$\therefore c=0$ …②

$x=1$ で極小値 0 なので $f(1)=0$，$f'(1)=0$ である

$f(1)=0$ より $a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0$

すなわち $a+b+c+d=0$ …③

$f'(1)=0$ より $3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=0$

すなわち $3a+2b+c=0$ …④

①と②を③,④に代入して ③は $a+b=-3$ …⑤

④は $3a+2b=0$ …⑥

⑤,⑥を解いて $a=6$，$b=-9$

このとき $f(x)=6x^3-9x^2+3$

$f'(x)=18x^2-18x=18x(x-1)$

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	0	↗

増減表より $y=6x^3-9x^2+3$ は題意をみたしている

以上より

$a=6,\ b=-9,\ c=0,\ d=3$ //

ショートトライアル　微分法　１５

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 曲線 $C : y = x^3 - 3x$ 上の点 A(2, 2) における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ の共有点のうち，A でない方の点の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ すべての正の数 x に対して，不等式 $x^3 - 27x + a > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 点 A(2, 0) から曲線 $C : y = x^3 - 3x^2 + ax$ に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１５

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　曲線 $C: y = x^3 - 3x$ 上の点 A(2, 2) における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1)　接線 ℓ の方程式を求めよ。

$y' = 3x^2 - 3$ より 点Aにおける接線の傾きは

$3 \times 2^2 - 3 = 9$　だから 接線の方程式は

$$y - 2 = 9(x-2)$$

$$\therefore y = 9x - 16$$

(2)　曲線 C と接線 ℓ の共有点のうち，A でない方の点の座標を求めよ。

y 消去して $x^3 - 3x = 9x - 16$

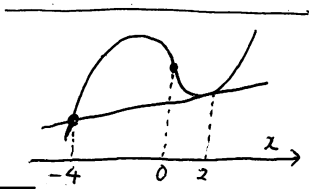
$(x-2)^2(x+4) = 0$

$x = 2, -4$

$x = 2$ は点A

$x = -4$ のとき $y = -64 + 12 = -52$

よって $(-4, -52)$ //



別解　$y'' = 6x$ なので

x 座標が -4 になるのは

あきらか（箱入り娘）

2　すべての正の数 x に対して，不等式 $x^3 - 27x + a > 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x) = x^3 - 27x + a$ とおく

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x+3)(x-3)$

x	0		3	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$f(3)$	↗

$x > 0$ における $f(x)$ の最小値は $f(3)$ だから

不等式をみたすには $f(3) > 0$ であればよい

$f(3) = 27 - 81 + a > 0$

$$\therefore a > 54$$ //

3　点A(2, 0) から曲線 $C: y = x^3 - 3x^2 + ax$ に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

C上の点を $(t, t^3 - 3t^2 + at)$ とおく

$y' = 3x^2 - 6x + a$ より接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t^2 + at) = (3t^2 - 6t + a)(x - t)$$

$$y - (t^3 - 3t^2 + at) = (3t^2 - 6t + a)x - 3t^3 + 6t^2 - at$$

$$y = (3t^2 - 6t + a)x - 3t^3 + 6t^2 - at + t^3 - 3t^2 + at$$

$$\therefore y = (3t^2 - 6t + a)x - 2t^3 + 3t^2 \cdots\cdots ①$$

①が(2, 0)を通るから

$$0 = (3t^2 - 6t + a) \times 2 - 2t^3 + 3t^2$$

$$0 = 6t^2 - 12t + 2a - 2t^3 + 3t^2$$

$$2t^3 - 9t^2 + 12t = 2a$$

$$t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t = a \cdots\cdots ②$$

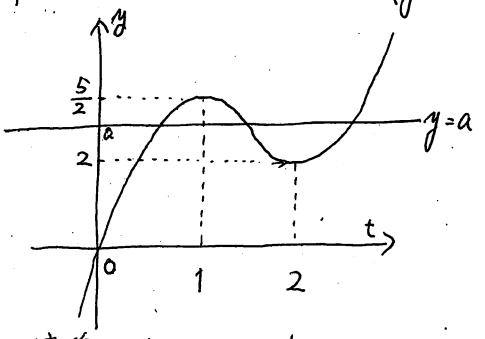
$$\begin{cases} y = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t \cdots\cdots ③ \\ y = a \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③について $y' = 3t^2 - 9t + 6 = 3(t-1)(t-2)$

t	……	1	……	2	……
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗

$t = 1$ のとき $y = 1 - \frac{9}{2} + 6 = \frac{5}{2}$

$t = 2$ のとき $y = 8 - 18 + 12 = 2$



接線が3本引けるとき接点が3個ある。そのとき

②が異なる3個の実数解をもつので

③と④が共有点を3個もてばよい

グラフより

$$2 < a < \frac{5}{2}$$ //

ショートトライアル　微分法　１６

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$ が極値をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 方程式 $x^3+x^2-x+a=0$ （a は定数）の異なる実数解の個数を調べよ。

$\boxed{3}$ 2つの曲線 $y=x^3-2x^2-1$，$y=x^2+ax$ がただ1点を共有し，かつ，この共有点において接線を共有するとき，定数 a の値と接点の座標を求めよ。

ショートトライアル　微分法　１６

＿＿組＿＿番　氏名　解答例

1　関数 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+2$ が極値をもたないとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2ax-3a$

$f'(x)=0$ が異なる2個の実数解をもたなければよい

判別式をDとすると　$D\leqq 0$.

$$\frac{D}{4}=a^2-3\times(-3a)\leqq 0$$

$$a(a+9)\leqq 0$$

$$\therefore -9\leqq a\leqq 0$$

2　方程式 $x^3+x^2-x+a=0$（a は定数）の異なる実数解の個数を調べよ。

$-x^3-x^2+x=a$ ……①

$$\begin{cases} y=-x^3-x^2+x & \cdots ② \\ y=a & \cdots ③ \end{cases}$$

②について　$y'=-3x^2-2x+1$

$=-(3x^2+2x-1)$

$=-(3x-1)(x+1)$

$$\begin{array}{rrrr} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ \hline 3 & -1 & 2 \end{array}$$

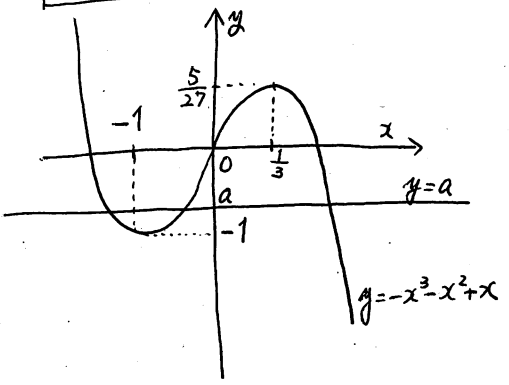
$x=-1$ のとき

$y=1-1-1=-1$

$x=\frac{1}{3}$ のとき

$y=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{27}$

x	……	-1	……	$\frac{1}{3}$	……
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-1	↗	$\frac{5}{27}$	↘



①の異なる実数解の個数は，②と③の共有点の個数と一致するから，グラフより

$a<-1,\ \frac{5}{27}<a$ のとき　1個

$a=-1,\ \frac{5}{27}$ のとき　2個

$-1<a<\frac{5}{27}$ のとき　3個

3　2つの曲線 $y=x^3-2x^2-1$，$y=x^2+ax$ がただ1点を共有し，かつ，この共有点において接線を共有するとき，定数 a の値と接点の座標を求めよ。

$f(x)=x^3-2x^2-1$，$g(x)=x^2+ax$ とおくと

$f'(x)=3x^2-4x$，$g'(x)=2x+a$.

接点の x 座標を t とおくと，題意より

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$ が成り立つから.

$$\begin{cases} t^3-2t^2-1=t^2+at \cdots ① \\ 3t^2-4t=2t+a \cdots ② \end{cases}$$

②⇔ $a=3t^2-6t$ ……③

③を①に代入して a 消去.

$t^3-2t^2-1=t^2+(3t^2-6t)\cdot t$

$t^3-2t^2-1=t^2+3t^3-6t^2$

$2t^3-3t^2+1=0$

$(t-1)^2(2t+1)=0$

$\therefore t=1,-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ & & 2 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ & & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$t=1$ のとき $f(1)=1-2-1=-2$，③より $a=3-6=-3$

$y=x^3-2x^2-1$ と $y=x^2-3x$ で y 消去すると

$x^3-2x^2-1=x^2-3x$ ⇔ $x^3-3x+3x-1=0$

⇔ $(x-1)^3=0$ で1点のみ共有.

「1点を共有」の意味を正しく!

$t=-\frac{1}{2}$ のとき $f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-1=-\frac{13}{8}$

③より　$a=\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

$y=x^3-2x^2-1$ と $y=x^2+\frac{15}{4}x$ で y 消去すると

$x^3-2x^2-1=x^2+\frac{15}{4}x$

$x^3-3x^2-\frac{15}{4}x-1=0$

$4x^3-12x^2-15x-4=0$

$(x-\frac{1}{2})^2(4x-16)=0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 4 & -12 & -15 & -4 \\ & & -2 & 7 & 4 \\ \hline -\frac{1}{2} & 4 & -14 & -8 & 0 \\ & & -2 & 8 & \\ \hline & 4 & -16 & 0 & \end{array}$$

共有点2点なので，不適.

以上より　$a=-3$，接点は $(1,-2)$

グラフをかくと