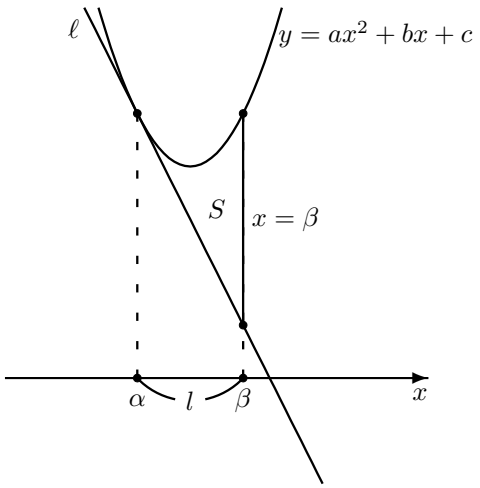
3 分の 1 公式 (2 次関数)



放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c)$ における接線を ℓ とする。$\alpha < \beta$ のとき，

C と ℓ と直線 $x = \beta$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{|\,a\,|}{3}(\beta - \alpha)^3$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと，(l は x 座標の幅)

$$S = \frac{|\,a\,|}{3}l^3$$

(proof)

接線 ℓ を $y = mx + n$ とすると ℓ と C の接点の x 座標が $x = \alpha$ なので

$ax^2 + bx + c = mx + n$ の重解が $x = \alpha$ だから，$(ax^2 + bx + c) - (mx + n) = a(x - \alpha)^2$ と因数分解できる。

$$S = \int_\alpha^\beta \{(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\}dx = a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2 dx = a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_\alpha^\beta = \frac{a}{3}(\beta - \alpha)^3 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{1}$　放物線 $C : y = 2x^2$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1)　ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C と ℓ と直線 $x = 3$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = 4x - 2$ (2) $\dfrac{16}{3}$

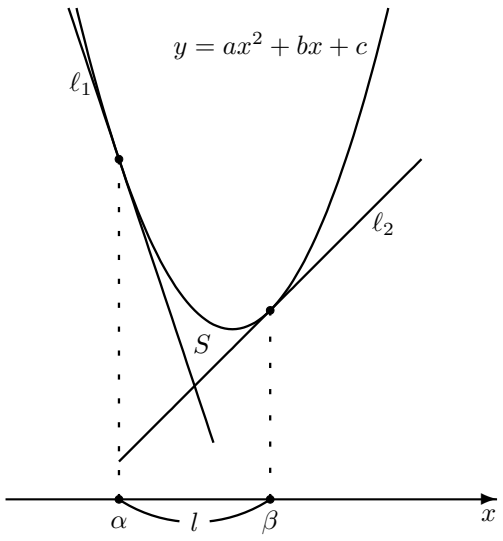
$\boxed{2}$　放物線 $C : y = \dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $(-2,\ 2)$ における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1)　ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C と ℓ と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = -2x - 2$ (2) $\dfrac{9}{2}$

12 分の 1 公式 (2 次関数)　その１



放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ と $x = \alpha$，β（$\alpha < \beta$）

における接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とするとき，

C と ℓ_1 で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \frac{|\,a\,|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと，(l は x 座標の幅)

$$S = \frac{|\,a\,|}{12}l^3$$

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

(proof)　$\ell_1 : y = m_1x + n_1$，$\ell_2 : y = m_2x + n_2$ とする。

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ であるから，前々のページと同様に

$(ax^2 + bx + c) - (m_1x + n_1) = a(x - \alpha)^2$，$(ax^2 + bx + c) - (m_2x + n_2) = a(x - \beta)^2$ であることより

$$S = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(ax^2 + bx + c) - (m_1x + n_1)\}dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(ax^2 + bx + c) - (m_2x + n_2)\}dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2dx + a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2dx = a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + a\left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$= a\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^3 - 0\right\} + a\left\{0 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^3\right\} = \frac{a}{24}(\beta - \alpha)^2 + \frac{a}{24}(\beta - \alpha)^2 = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{3}$　放物線 $C : y = x^2 - 1$ 上に 2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 8)$ をとり，点 A，B における C の接線を ℓ_1，ℓ_2 とする。
ℓ_1，ℓ_2 および C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = \dfrac{16}{3}$

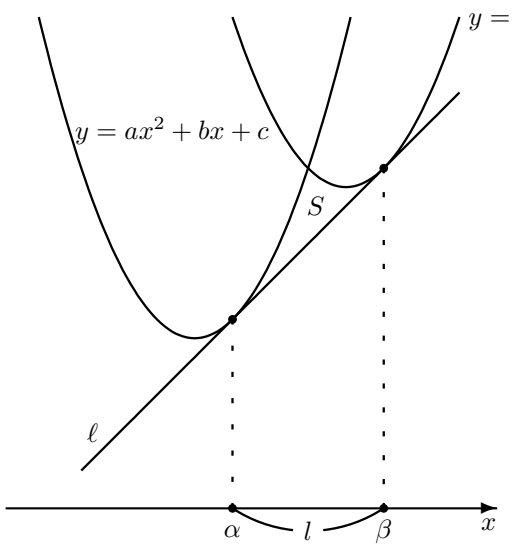
$\boxed{4}$ 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+2$ に原点から 2 本の接線を引くとき，放物線と 2 本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】 $S=\dfrac{8}{3}$

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2-x+3$ に点 $(1,\ -1)$ から引いた 2 本の接線と放物線とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

【解答】 $S=\dfrac{16}{3}$

12 分の 1 公式 (2 次関数)　その 2



2 つの放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$，$C_2 : y = ax^2 + b'x + c'$ の両方に接する直線を ℓ とする。ℓ と C_1，C_2 の接点の x 座標をそれぞれ，α，β（$\alpha < \beta$）とするとき

C_1 と C_2 と ℓ で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと,（l は x 座標の幅）

$$S = \frac{|a|}{12}l^3$$

C_1，C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

(proof)　省略 ··· 12 分の 1 公式（2 次関数）その 1 と同じである。

$\boxed{6}$　2 つの放物線を $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 6x + 15$ とする。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C_1，C_2 および ℓ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = 2x - 1$ (2) $S = \dfrac{9}{4}$

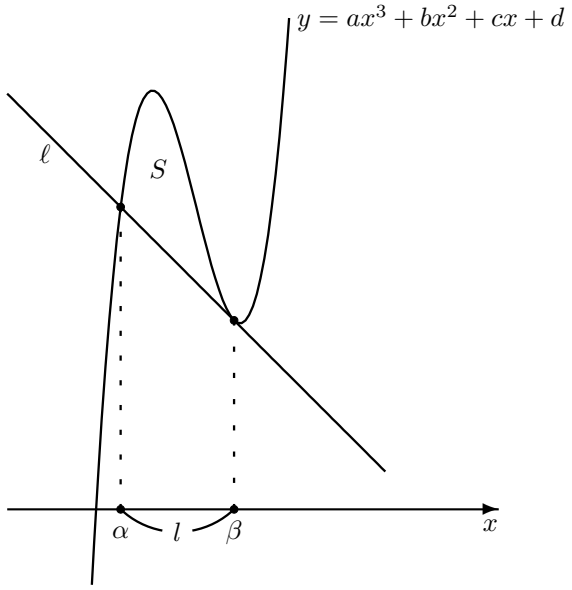
$\boxed{7}$　2 つの放物線を $C_1 : y = (x-1)^2$，$C_2 : y = x^2 - 6x + 5$ とする。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　放物線 C_1 と C_2 および直線 ℓ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = -2x + 1$ (2) $S = \dfrac{2}{3}$

12 分の 1 公式 (3 次関数)



3 次関数 $C : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$（$a > 0$）上の $x = \beta$ である点における接線を ℓ とし，ℓ と 3 次関数のもう一つの交点の x 座標を $x = \alpha$ とする。

$\alpha < \beta$ のとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと,（l は x 座標の幅）

$$S = \frac{|a|}{12}l^4$$

(proof)

ℓ を $y = mx + n$ とおくと，C と ℓ が $x = \beta$ で接して，$x = \alpha$ で交わるので

$ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n$ の解が $x = \alpha$，β(重解) となるから

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) - (mx + n) = a(x - \alpha)(x - \beta)^2$ と因数分解できる。

$$S = \int_\alpha^\beta \{(ax^3 + bx^2 + cx + d) - (mx + n)\}dx = a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx = a\int_\alpha^\beta (x - \beta + \beta - \alpha)(x - \beta)^2 dx$$

$$= a\int_\alpha^\beta \{(x - \beta) + (\beta - \alpha)\}(x - \beta)^2 dx = a\int_\alpha^\beta \{(x - \beta)^3 + (\beta - \alpha)(x - \beta)^2\}dx$$

$$= a\left[\frac{1}{4}(x - \beta)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(x - \beta)^3\right]_\alpha^\beta = a\left(0 - \left\{\frac{1}{4}(\alpha - \beta)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(\alpha - \beta)^3\right\}\right)$$

$$= a\left(0 - \left\{\frac{1}{4}(\beta - \alpha)^4 - \frac{\beta - \alpha}{3}(\beta - \alpha)^3\right\}\right) = a\left\{-\frac{1}{4}(\beta - \alpha)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(\beta - \alpha)^3\right\}$$

$$= a\left\{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(\beta - \alpha)^4\right\} = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^4 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{8}$ 曲線 $C : y = x^3 - 4x$ 上に点 A(1, −3) をとる。

(1) 点 A における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = -x - 2$ (2) $S = \dfrac{27}{4}$

$\boxed{9}$ 曲線 $y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $(1,\ 5)$ における接線と，この曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = \dfrac{64}{3}$

$\boxed{10}$ 曲線 $y = 3x^3 + 3x^2$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線と，この曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = 4$

$\boxed{11}$ 曲線 $y = | x^2 - 2x |$ と直線 $y = x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

【解答】 $S = \dfrac{13}{6}$

$\boxed{12}$ 曲線 $y = | x^2 - x - 2 |$ と直線 $y = x + 1$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

【解答】 $S = \dfrac{13}{3}$

$\boxed{13}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = |\,3x^2 - 6x\,|$ のグラフをかけ。

(2) $a \geqq 0$ とし，$S(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} |\,3x^2 - 6x\,|\,dx$ とおくとき，$S(a)$ を求めよ。

【解答】 $S(a) = \begin{cases} -3a^2 + 3a + 2 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ 2a^3 - 3a^2 - 3a + 6 & (1 \leqq a \leqq 2) \\ 3a^2 - 3a - 2 & (2 \leqq a) \end{cases}$

$\boxed{14}$ $f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を求めよ。

【解答】 $f(t)=\begin{cases} -t+\dfrac{1}{3} & (t \leqq 0) \\ \dfrac{8}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ t-\dfrac{1}{3} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t\right) \end{cases}$

(2) $f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ。

【解答】 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

$$\int (x+\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C \text{（}C\text{ は積分定数）}$$

$\boxed{15}$ 曲線 $C : y = x^3 - 3x^2 + 4$ 上に点 A(1, 2) をとり，点 A における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ と直線 $x = 3$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = -3x + 5$ (2) $S = 4$

$\boxed{16}$ 曲線 $C : y = 2x^3 + 6x^2 - 3$ 上に点 A(−1, 1) をとり，点 A における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

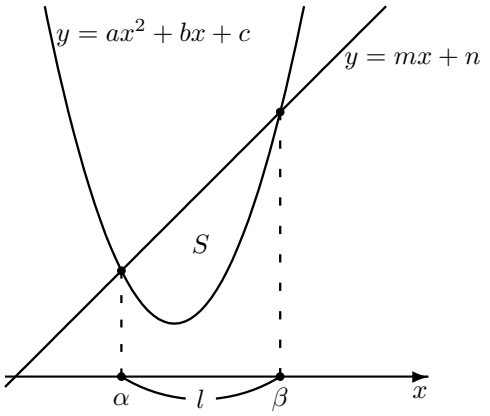
(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ と直線 $x = 2$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

【解答】 (1) $y = -6x - 5$ (2) $S = \dfrac{81}{2}$

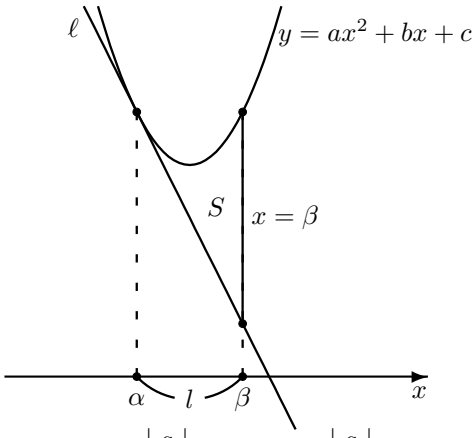
まとめ

面積の 6 分の 1 公式



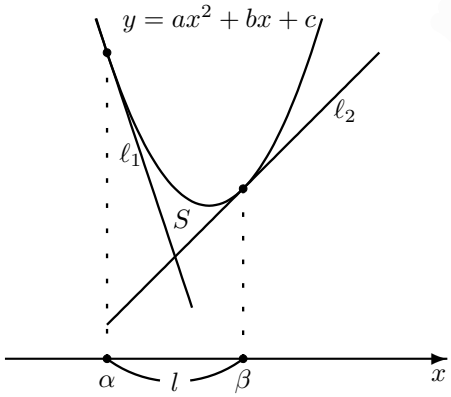
$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{6}l^3$$

3 分の 1 公式 (2 次関数)



$$S = \frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{3}l^3$$

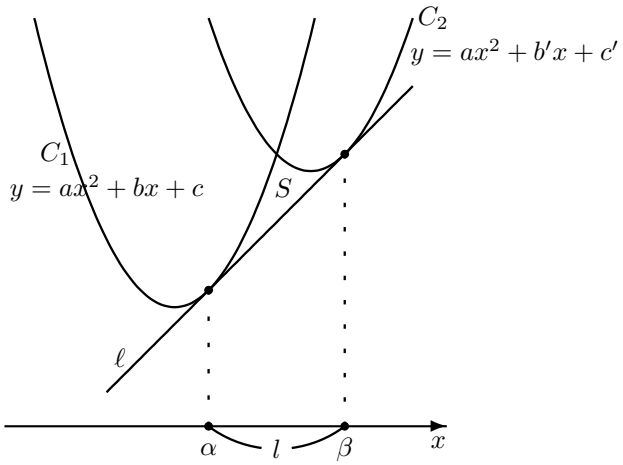
12 分の 1 公式 (2 次関数)　その 1



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{12}l^3$$

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

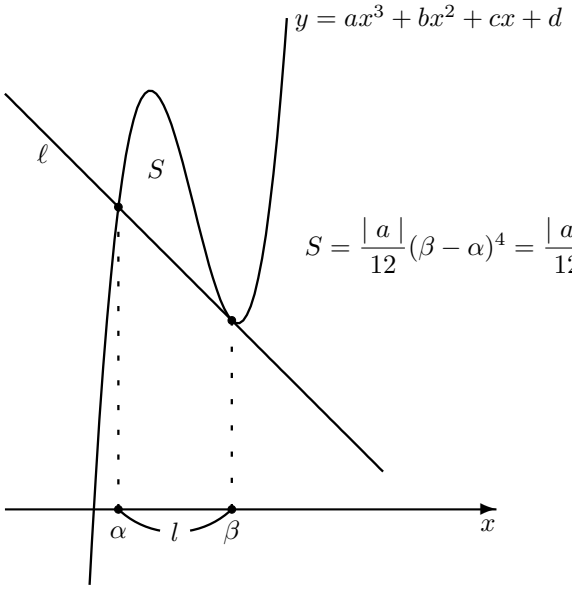
12 分の 1 公式 (2 次関数)　その 2



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{12}l^3$$

C_1，C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

12 分の 1 公式 (3 次関数)



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4 = \frac{|a|}{12}l^4$$

$(x + \alpha)^n$ の不定積分→ 3 分の 1 公式

$$\int (x+\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C$$

ただし，C は積分定数とする。

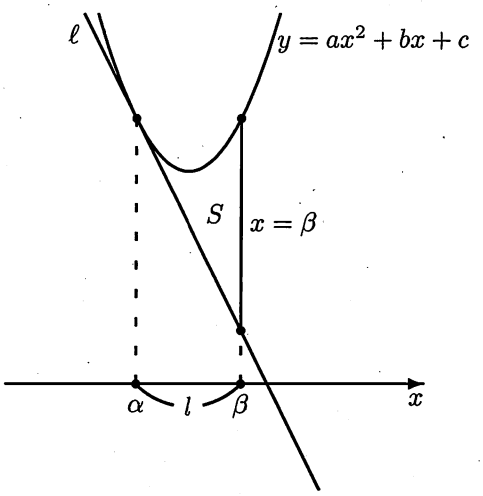
定積分の 6 分の 1 公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

定積分おまけ公式（最終兵器）

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots$$
$$+(-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v\,dx$$

3 分の 1 公式 (2 次関数)



放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c)$ における接線を ℓ とする。$\alpha < \beta$ のとき，

C と ℓ と直線 $x = \beta$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと，(l は x 座標の幅)

$$S = \frac{|a|}{3}l^3$$

(proof)

接線 ℓ を $y = mx + n$ とすると ℓ と C の接点の x 座標が $x = \alpha$ なので

$ax^2 + bx + c = mx + n$ の重解が $x = \alpha$ だから，$(ax^2 + bx + c) - (mx + n) = a(x - \alpha)^2$ と因数分解できる。

$$S = \int_\alpha^\beta \{(ax^2 + bx + c) - (mx + n)\}dx = a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2 dx = a\left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3\right]_\alpha^\beta = \frac{a}{3}(\beta - \alpha)^3 \quad \blacksquare$$

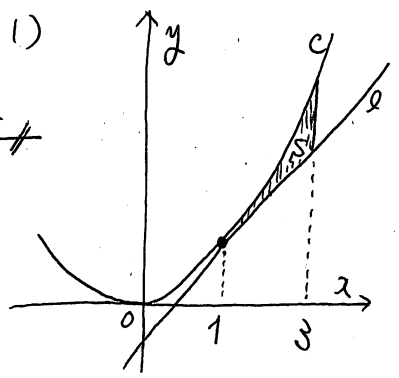
1 放物線 $C : y = 2x^2$ 上の点 (1, 2) における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

$y' = 4x$ より接線の傾きは $4 \times 1 = 4$ なので

$y - 2 = 4(x - 1)$

$\therefore y = 4x - 2$ //



(2) C と ℓ と直線 $x = 3$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$S = \int_1^3 \{2x^2 - (4x - 2)\}dx$

$= 2\int_1^3 (x-1)^2 dx = 2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times 2^3 = \frac{16}{3}$ //

【解答】 (1) $y = 4x - 2$ (2) $\frac{16}{3}$

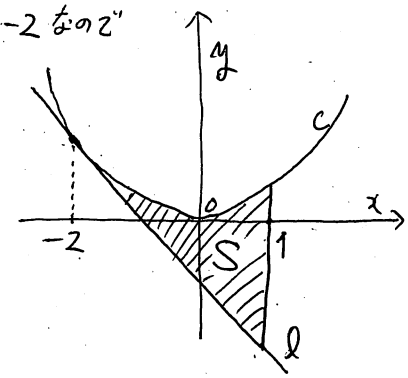
2 放物線 $C : y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 (−2, 2) における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) ℓ の方程式を求めよ。

$y' = x$ より接線の傾きは -2 なので

$y - 2 = (-2) \times \{x - (-2)\}$

$\therefore y = -2x - 2$ //



(2) C と ℓ と直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

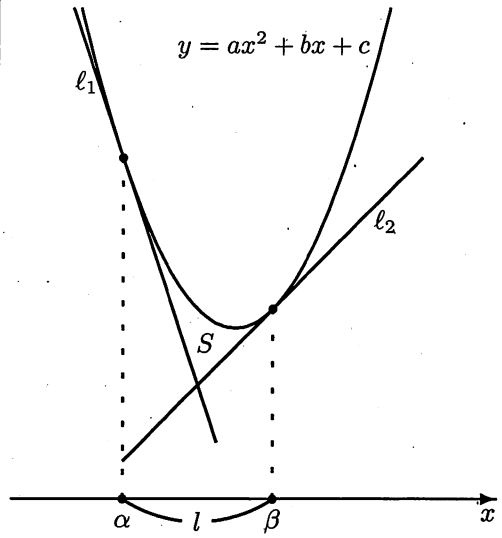
$S = \int_{-2}^1 \{\frac{1}{2}x^2 - (-2x - 2)\}dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-2}^1 (x+2)^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^1$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 3^3 = \frac{9}{2}$ //

【解答】 (1) $y = -2x - 2$ (2) $\frac{9}{2}$

12分の1公式 (2次関数)　その1



放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ と $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ における接線をそれぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とするとき，

C と ℓ_1 で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと，(l は x 座標の幅)

$$S = \frac{|a|}{12} l^3$$

2直線 $\ell_1,\ \ell_2$ の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である。

(proof)　$\ell_1 : y = m_1 x + n_1,\ \ell_2 : y = m_2 x + n_2$ とする。

2直線 $\ell_1,\ \ell_2$ の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ であるから，前々のページと同様に

$(ax^2 + bx + c) - (m_1 x + n_1) = a(x-\alpha)^2,\ (ax^2 + bx + c) - (m_2 x + n_2) = a(x-\beta)^2$ であることより

$$S = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{(ax^2 + bx + c) - (m_1 x + n_1)\}dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{(ax^2 + bx + c) - (m_2 x + n_2)\}dx$$

$$= a\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2 dx + a\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2 dx = a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$= a\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - 0\right\} + a\left\{0 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right\} = \frac{a}{24}(\beta-\alpha)^2 + \frac{a}{24}(\beta-\alpha)^2 = \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \blacksquare$$

3　放物線 $C : y = x^2 - 1$ 上に2点 A$(-1,\ 0)$，B$(3,\ 8)$ をとり，点 A，B における C の接線を $\ell_1,\ \ell_2$ とする。$\ell_1,\ \ell_2$ および C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$y' = 2x$ だから A$(-1, 0)$ における接線 ℓ_1 は

$y - 0 = -2\{x - (-1)\}$

$\therefore y = -2x - 2$

B における接線 ℓ_2 は

$y - 8 = 6(x - 3)$

$\therefore y = 6x - 10$

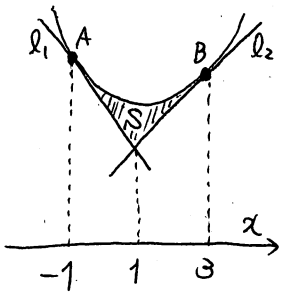
ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は

y 軸に

$-2x - 2 = 6x - 10$

$-8x = -8$

$x = 1$



$$S = \int_{-1}^{1}\{(x^2-1) - (-2x-2)\}dx + \int_{1}^{3}\{(x^2-1) - (6x-10)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(x+1)^2 dx + \int_{1}^{3}(x-3)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\times 2^3 - 0\right) + \left\{0 - \frac{1}{3}(-2)^3\right\}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

12分の1公式

$$S = \frac{1}{12}\times 4^3 = \frac{16}{3}$$

【解答】 $S = \dfrac{16}{3}$

4 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x+2$ に原点から2本の接線を引くとき，放物線と2本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$y=\frac{1}{2}x^2-x+2$ 上の点を $(t,\ \frac{1}{2}t^2-t+2)$ とおくと

$y'=x-1$ より，接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{2}t^2-t+2\right)=(t-1)(x-t)$$

$$y-\left(\frac{1}{2}t^2-t+2\right)=(t-1)x-t^2+t$$

$$y=(t-1)x-t^2+t+\left(\frac{1}{2}t^2-t+2\right)$$

$$y=(t-1)x-\frac{1}{2}t^2+2 \cdots\cdots ①$$

①が原点を通るので

$$0=(t-1)\times 0-\frac{1}{2}t^2+2$$

$$t^2-4=0$$

$$(t+2)(t-2)=0 \qquad \therefore t=\pm 2$$

①より $t=-2$ のとき $y=-3x$

$t=2$ のとき $y=x$

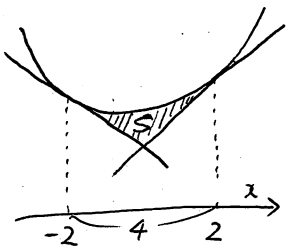
$$S=\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right)-(-3x)\right\}dx+\int_{0}^{2}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2-x+2\right)-x\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x-2)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x+2)^3\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times 2^3-0\right)+\frac{1}{2}\left\{0-\frac{1}{3}(-2)^3\right\}$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$



$\boxed{\text{12分の1公式}}$

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{12}\times 4^3=\frac{64}{24}=\frac{8}{3}$$

【解答】 $S=\frac{8}{3}$

5 放物線 $y=x^2-x+3$ に点 $(1,\ -1)$ から引いた2本の接線と放物線とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y=x^2-x+3$ 上の点を $(t,\ t^2-t+3)$ とおくと

$y'=2x-1$ より接線の方程式は

$$y-(t^2-t+3)=(2t-1)(x-t)$$

$$y-(t^2-t+3)=(2t-1)x-2t^2+t$$

$$y=(2t-1)x-2t^2+t+(t^2-t+3)$$

$$\therefore y=(2t-1)x-t^2+3 \cdots ①$$

①が $(1,-1)$ を通るので

$$-1=(2t-1)\times 1-t^2+3$$

$$t^2-2t-3=0$$

$$(t-3)(t+1)=0 \qquad \therefore t=-1,\ 3$$

①より $t=-1$ のとき $y=-3x+2$

$t=3$ のとき $y=5x-6$

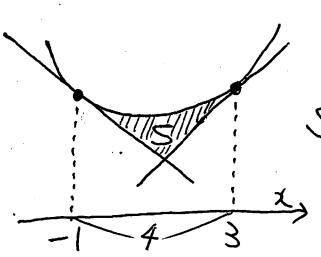
$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2-x+3)-(-3x+2)\}dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-x+3)-(5x-6)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\times 2^3-0\right)+\left\{0-\frac{1}{3}\times(-2)^3\right\}$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

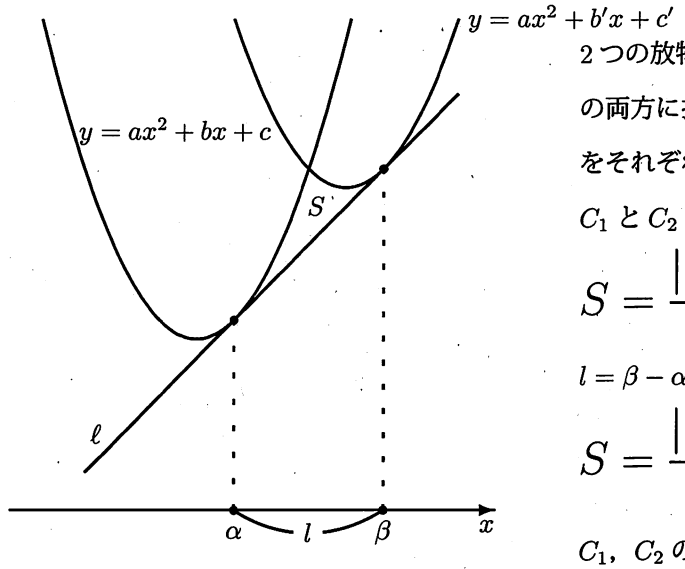


$\boxed{\text{12分の1公式}}$

$$S=\frac{1}{12}\times 4^3=\frac{16}{3}$$

【解答】 $S=\frac{16}{3}$

12分の1公式 (2次関数)　その2



2つの放物線 $C_1: y=ax^2+bx+c$, $C_2: y=ax^2+b'x+c'$ の両方に接する直線を ℓ とする。ℓ と C_1, C_2 の接点の x 座標をそれぞれ, α, β ($\alpha<\beta$) とするとき

C_1 と C_2 と ℓ で囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$l=\beta-\alpha$ とおくと, (l は x 座標の幅)

$$S=\frac{|a|}{12}l^3$$

C_1, C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である。

(proof)　省略 … 12分の1公式 (2次関数) その1と同じである。

6　2つの放物線を $C_1: y=x^2$, $C_2: y=x^2-6x+15$ とする。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) C_1, C_2 および ℓ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $C_1: y=x^2$ 上の点を (s, s^2) とおくと

$y'=2x$ より接線の方程式は

$y-s^2=2s(x-s)$ すなわち $y=2sx-s^2$ …①

$C_2: y=x^2-6x+15$ 上の点を $(t, t^2-6t+15)$ とおくと

$y'=2x-6$ より接線の方程式は

$y-(t^2-6t+15)=(2t-6)(x-t)$

$y-(t^2-6t+15)=(2t-6)x-2t^2+6t$

$y=(2t-6)x-2t^2+6t+(t^2-6t+15)$

$y=(2t-6)x-t^2+15$ …②

①②は一致するので

$$\begin{cases}2s=2t-6\\-s^2=-t^2+15\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=t-3 \cdots ③\\s^2=t^2-15 \cdots ④\end{cases}$$

③を④に代入 $(t-3)^2=t^2-15$

$t^2-6t+9=t^2-15$

$-6t=-24$　$\therefore t=4$

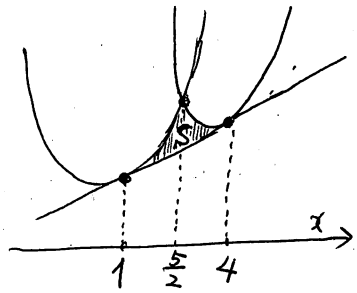
③より $s=4-3=1$

①に $s=1$ を代入して $y=2x-1$

②に $t=4$ を代入して $y=2x-1$ よって一致する

以上より $y=2x-1$ //

(2)



C_1 と C_2 の式で y 消去すると $x^2=x^2-6x+15$ より

$x=\frac{5}{2}$

求める面積は

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{(x^2-6x+15)-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-0+\left\{0-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$$ //

$\boxed{\text{12分の1公式を使う}}$

$$S=\frac{1}{12}\times 3^3=\frac{9}{4}$$

【解答】 (1) $y=2x-1$ (2) $S=\dfrac{9}{4}$

7 2つの放物線を $C_1 : y = (x-1)^2$, $C_2 : y = x^2 - 6x + 5$ とする。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C_1 と C_2 および直線 ℓ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) C_1: $y = x^2 - 2x + 1$ 上の点を $(s, s^2 - 2s + 1)$ とおくと

$y' = 2x - 2$ より接線の方程式は

$y - (s^2 - 2s + 1) = (2s - 2)(x - s)$

$y - (s^2 - 2s + 1) = (2s - 2)x - 2s^2 + 2s$

$y = (2s - 2)x - 2s^2 + 2s + (s^2 - 2s + 1)$

$\therefore y = (2s - 2)x - s^2 + 1 \cdots\cdots ①$

C_2: $y = x^2 - 6x + 5$ 上の点を $(t, t^2 - 6t + 5)$ とおくと

$y' = 2x - 6$ より接線の方程式は

$y - (t^2 - 6t + 5) = (2t - 6)(x - t)$

$y - (t^2 - 6t + 5) = (2t - 6)x - 2t^2 + 6t$

$y = (2t - 6)x - 2t^2 + 6t + (t^2 - 6t + 5)$

$\therefore y = (2t - 6)x - t^2 + 5 \cdots\cdots ②$

①と②は一致するので

$\begin{cases} 2s - 2 = 2t - 6 \\ -s^2 + 1 = -t^2 + 5 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} s = t - 2 \cdots\cdots ③ \\ -s^2 = -t^2 + 4 \cdots ④ \end{cases}$

③を④に代入して

$-(t-2)^2 = -t^2 + 4$

$-t^2 + 4t - 4 = -t^2 + 4$

$4t = 8$ $\therefore t = 2$. ③より $s = 2 - 2 = 0$

①に $s = 0$ 代入して $y = -2x + 1$

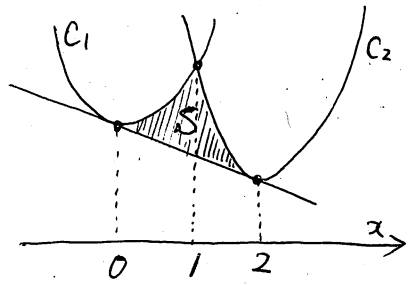
②に $t = 2$ 代入して $y = -2x + 1$ で一致する

よって $y = -2x + 1$ //

(2) C_1 と C_2 で y 消去すると

$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 6x + 5$

$x = 1$



$S = \int_0^1 \{(x^2 - 2x + 1) - (-2x + 1)\} dx$

$+ \int_1^2 \{(x^2 - 6x + 5) - (-2x + 1)\} dx$

$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx$

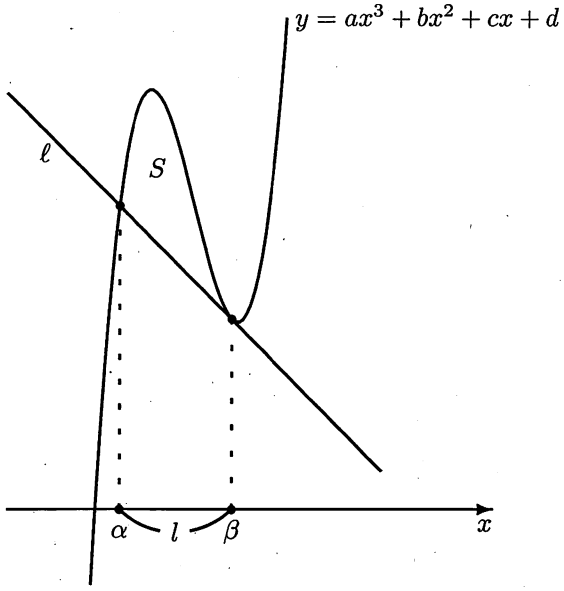
$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_1^2$

$= \frac{1}{3} - 0 + 0 - \frac{1}{3}(-1)^3$

$= \frac{2}{3}$ //

【解答】 (1) $y = -2x + 1$ (2) $S = \frac{2}{3}$

12分の1公式 (3次関数)



3次関数 $C : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$ 上の $x = \beta$ である点における接線を ℓ とし，ℓ と3次関数のもう一つの交点の x 座標を $x = \alpha$ とする。

$\alpha < \beta$ のとき，C と ℓ で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

$l = \beta - \alpha$ とおくと，(l は x 座標の幅)

$$S = \frac{|a|}{12} l^4$$

(proof)

ℓ を $y = mx + n$ とおくと，C と ℓ が $x = \beta$ で接して，$x = \alpha$ で交わるので

$ax^3 + bx^2 + cx + d = mx + n$ の解が $x = \alpha$，β(重解) となるから

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) - (mx + n) = a(x - \alpha)(x - \beta)^2$ と因数分解できる。

$$S = \int_\alpha^\beta \{(ax^3 + bx^2 + cx + d) - (mx + n)\}dx = a\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx = a\int_\alpha^\beta (x - \beta + \beta - \alpha)(x - \beta)^2 dx$$

$$= a\int_\alpha^\beta \{(x - \beta) + (\beta - \alpha)\}(x - \beta)^2 dx = a\int_\alpha^\beta \{(x - \beta)^3 + (\beta - \alpha)(x - \beta)^2\}dx$$

$$= a\left[\frac{1}{4}(x - \beta)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(x - \beta)^3\right]_\alpha^\beta = a\left(0 - \left\{\frac{1}{4}(\alpha - \beta)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(\alpha - \beta)^3\right\}\right)$$

$$= a\left(0 - \left\{\frac{1}{4}(\beta - \alpha)^4 - \frac{\beta - \alpha}{3}(\beta - \alpha)^3\right\}\right) = a\left\{-\frac{1}{4}(\beta - \alpha)^4 + \frac{\beta - \alpha}{3}(\beta - \alpha)^3\right\}$$

$$= a\left\{\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)(\beta - \alpha)^4\right\} = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^4 \quad \blacksquare$$

8 曲線 $C : y = x^3 - 4x$ 上に点 A(1, −3) をとる。

(1) 点Aにおける接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y' = 3x^2 - 4$ より接線 ℓ の傾きは

$3 \times 1^2 - 4 = -1$　よって接線 ℓ の方程式は

$y - (-3) = (-1)(x - 1)$

$y = -x - 2$ //

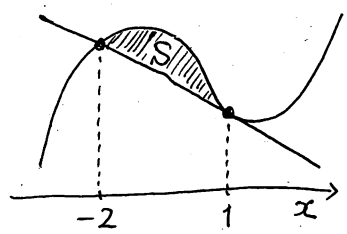
(2) C と ℓ で y 消去して

$x^3 - 4x = -x - 2$

$x^3 - 3x + 2 = 0$

$(x - 1)^2(x + 2) = 0$

$x = 1$ (重解), -2



12分の公式

$S = \frac{1}{12} \times 3^4 = \frac{27}{4}$

$$S = \int_{-2}^{1} \{(x^3 - 4x) - (-x - 2)\}dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{4}$$

【解答】 (1) $y = -x - 2$ (2) $S = \frac{27}{4}$

9 曲線 $y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ 上の点 $(1,\ 5)$ における接線と，この曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y' = 3x^2 + 2x - 3$ より接線の傾きは

$3\times1^2 + 2\times1 - 3 = 2$ だから接線の方程式は

$y - 5 = 2(x-1)$ すなわち $y = 2x + 3$

$y = x^3 + x^2 - 3x + 6$ と y 消去して

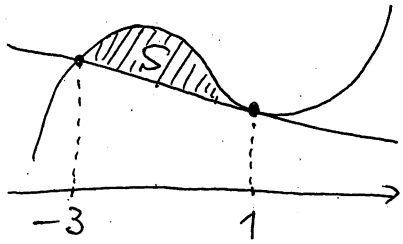
$x^3 + x^2 - 3x + 6 = 2x + 3$

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

$(x-1)^2(x+3) = 0$

$x = 1,\ -3$

1	1	1	-5	3
		1	2	-3
1	1	2	-3	0
		1	3	
	1	3	0	



$$S = \int_{-3}^{1}\{(x^3 + x - 3x + 6) - (2x + 3)\}dx$$

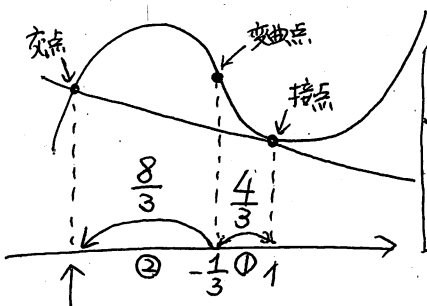
$$= \int_{-3}^{1}(x^3 + x^2 - 5x + 3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} = \frac{64}{3}$$

$\boxed{S\text{を求めるだけ}}$ の裏技

$y' = 3x^2 + 2x - 3$ より $y'' = 6x + 2$.

$y'' = 0$ を解くと $x = -\frac{1}{3}$



「箱入り娘」
x座標だけ見ると
交点と接点を
変曲点が2:1
に内分する

$-\frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -3$

よって $S = \frac{1}{12}\times4^4 = \frac{64}{3}$

【解答】 $S = \frac{64}{3}$

10 曲線 $y = 3x^3 + 3x^2$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線と，この曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y' = 9x^2 + 6x$ より接線の傾きは

$9\times(-1)^2 + 6\times(-1) = 3$ だから接線の方程式は

$y - 0 = 3\{x - (-1)\}$ すなわち $y = 3x + 3$

$y = 3x^3 + 3x^2$ と y 消去して

$3x^3 + 3x^2 = 3x + 3$

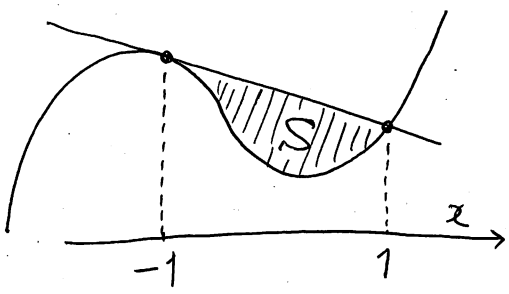
$3x^3 + 3x^2 - 3x - 3 = 0$

$3x^2(x+1) - 3(x+1) = 0$

$3(x^2-1)(x+1) = 0$

$3(x-1)(x+1)^2 = 0$

$\therefore x = 1,\ -1$ (重解)



$$S = \int_{-1}^{1}\{(3x+3) - (3x^3 + 3x^2)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-3x^3 - 3x^2 + 3x + 3)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1}(-3x^2 + 3)dx$$

$$= 2\left[-x^3 + 3x\right]_0^1$$

$$= 2\{(-1+3) - 0\} = 4$$

【解答】 $S = 4$

11 曲線 $y=|x^2-2x|$ と直線 $y=x$ で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=x \end{cases}$ で y 消去して $x^2-2x=x$

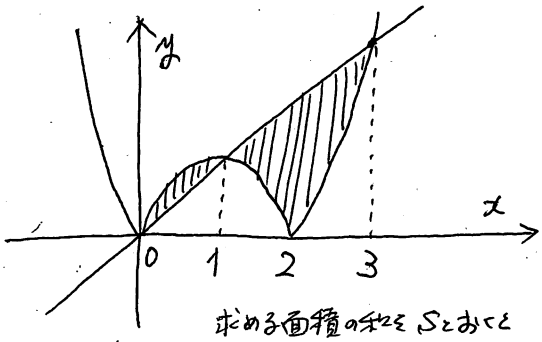
$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

$\begin{cases} y=-x^2+2x \\ y=x \end{cases}$ で y 消去して $-x^2+2x=x$

$x(x-1)=0$

$x=0,\ 1$



求める面積の和を S とおくと

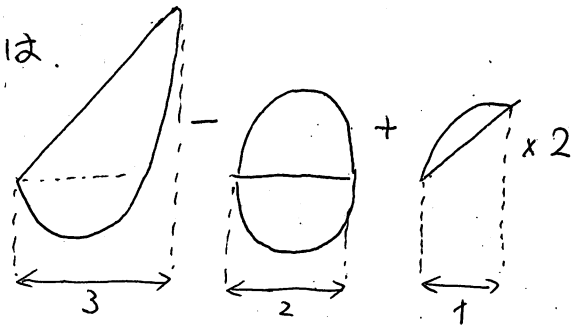
$$S=\int_0^1\{(-x^2+2x)-x\}dx+\int_1^2\{x-(-x^2+2x)\}dx+\int_2^3\{x-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx+\int_2^3(-x^2+3x)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_2^3=\frac{13}{6}$$

実は、

$S=$



$$=\frac{1}{6}\times3^3-\frac{1}{6}\times2^3\times2+\frac{1}{6}\times1^3\times2$$

$$=\frac{27-16+2}{6}=\frac{13}{6}$$

【解答】 $S=\frac{13}{6}$

12 曲線 $y=|x^2-x-2|$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

$x^2-x-2=0$ を解くと $x=-1,\ 2$

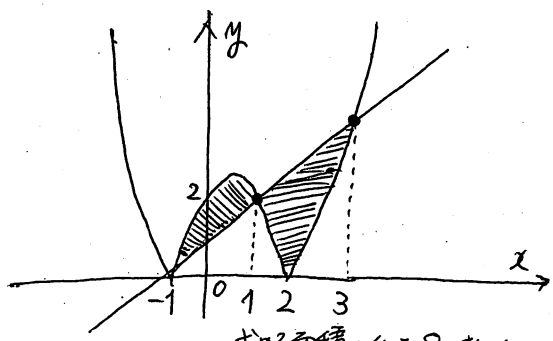
$\begin{cases} y=x^2-x-2 \\ y=x+1 \end{cases}$ で y 消去 $x^2-x-2=x+1$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$ ∴ $x=-1,\ 3$

$\begin{cases} y=-x^2+x+2 \\ y=x+1 \end{cases}$ で y 消去 $-x^2+x+2=x+1$

$(x+1)(x-1)=0$ ∴ $x=\pm1$



求める面積の和を S とおくと

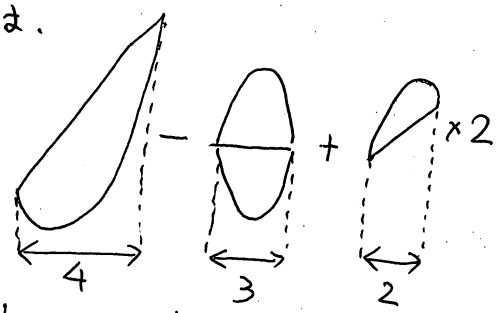
$$S=\int_{-1}^1\{(-x^2+x+2)-(x+1)\}dx+\int_1^2\{(x+1)-(-x^2+x+2)\}dx+\int_2^3\{(x+1)-(x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-1}^1(-x^2+1)dx+\int_1^2(x^2-1)dx+\int_2^3(-x^2+2x+3)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_2^3=\frac{13}{3}$$

実は、

$S=$



$$=\frac{1}{6}\times4^3-\frac{1}{6}\times3^3\times2+\frac{1}{6}\times2^3\times2$$

$$=\frac{64-54+16}{6}=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}$$

【解答】 $S=\frac{13}{3}$

13 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = |3x^2 - 6x|$ のグラフをかけ。

(i) $3x^2-6x \geqq 0$ すなわち $\left(\begin{array}{l} x^2-2x \geqq 0 \\ x(x-2) \geqq 0 \\ x \leqq 0,\ 2 \leqq x \end{array}\right)$

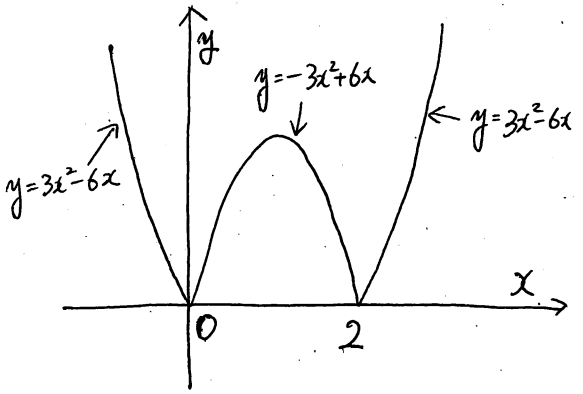
$x \leqq 0,\ 2 \leqq x$ のとき

$y = 3x^2-6x$

(ii) $3x^2-6x \leqq 0$ すなわち $\left(\begin{array}{l} x^2-2x \leqq 0 \\ x(x-2) \leqq 0 \\ 0 \leqq x \leqq 2 \end{array}\right)$

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき

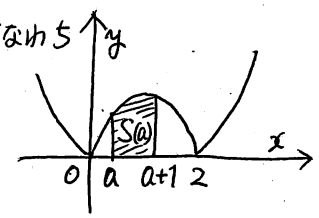
$y = -(3x^2-6x) = -3x^2+6x$



(2) $a \geqq 0$ とし，$S(a) = \int_a^{a+1} |3x^2 - 6x|\,dx$ とおくとき，$S(a)$ を求めよ。

(i) $0 \leqq a \leqq a+1 \leqq 2$ すなわち

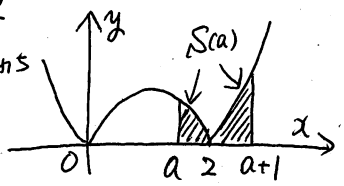
$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，



$$S(a) = \int_a^{a+1} (-3x^2+6x)\,dx$$
$$= \left[-x^3+3x^2\right]_a^{a+1}$$
$$= \{-(a+1)^3+3(a+1)^2\} - (-a^3+3a^2)$$
$$= -a^3-3a^2-3a-1+3a^2+6a+3+a^3-3a^2$$
$$= -3a^2+3a+2$$

(ii) $a \leqq 2 \leqq a+1$ すなわち

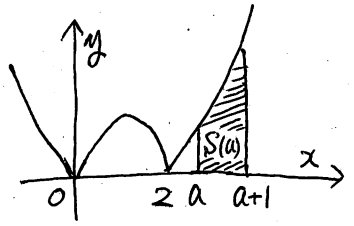
$1 \leqq a \leqq 2$ のとき



$$S(a) = \int_a^2 (-3x^2+6x)\,dx + \int_2^{a+1} (3x^2-6x)\,dx$$
$$= \left[-x^3+3x^2\right]_a^2 + \left[x^3-3x^2\right]_2^{a+1}$$
$$= (-8+12) - (-a^3+3a^2) + \{(a+1)^3-3(a+1)^2\} - (8-12)$$
$$= -8+12+a^3-3a^2+a^3+3a^2+3a+1-3a^2-6a-3-8+12$$
$$= 2a^3-3a^2-3a+6$$

(iii) $2 \leqq a \leqq a+1$ すなわち

$2 \leqq a$ のとき



$$S(a) = \int_a^{a+1} (3x^2-6x)\,dx = \left[x^3-3x^2\right]_a^{a+1}$$
$$= \{(a+1)^3-3(a+1)^2\} - (a^3-3a^2)$$
$$= a^3+3a^2+3a+1-3a^2-6a-3-a^3+3a^2$$
$$= 3a^2-3a-2$$

(iii)の別解

$$S(a) = \int_a^{a+1} (3x^2-6x)\,dx = -\underbrace{\int_a^{a+1} (-3x^2+6x)\,dx}_{\text{(i)の積分}}$$
$$= -(-3a^2+3a+2)$$
$$= 3a^2-3a+2$$ とすると楽です

以上，(i)(ii)(iii)より

$$S(a) = \begin{cases} -3a^2+3a+2 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ 2a^3-3a^2-3a+6 & (1 \leqq a \leqq 2) \\ 3a^2-3a-2 & (2 \leqq a) \end{cases}$$

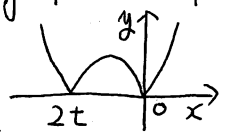
//

【解答】 $S(a) = \begin{cases} -3a^2+3a+2 & (0 \leqq a \leqq 1) \\ 2a^3-3a^2-3a+6 & (1 \leqq a \leqq 2) \\ 3a^2-3a-2 & (2 \leqq a) \end{cases}$

14 $f(t)=\int_0^1 |x^2-2tx|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。

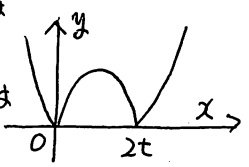
(1) $f(t)$ を求めよ。

$y=|x(x-2t)|$ のグラフは



$(t\leqq 0$ のとき$)$

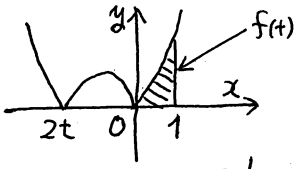
または



$(t\geqq 0$ のとき$)$

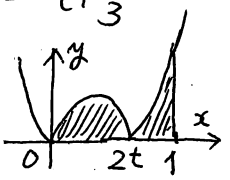
よって t の値で場合分けして求める.

(i) $t\leqq 0$ のとき



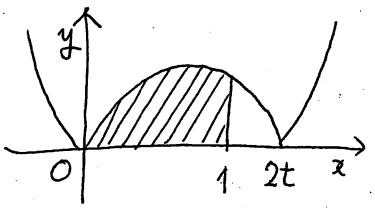
$$f(t)=\int_0^1(x^2-2tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{3}-t\right)-0=-t+\frac{1}{3}$$

(ii) $0\leqq 2t\leqq 1$ すなわち $0\leqq t\leqq\frac{1}{2}$ のとき



$$f(t)=\int_0^{2t}\{-(x^2-2tx)\}dx+\int_{2t}^1(x^2-2tx)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^{2t}+\left[\frac{x^3}{3}-tx^2\right]_{2t}^1$$
$$=\left(-\frac{8}{3}t^3+4t^3\right)-0+\left(\frac{1}{3}-t\right)-\left(\frac{8}{3}t^3-4t^3\right)$$
$$=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$$

(iii) $1\leqq 2t$ すなわち $\frac{1}{2}\leqq t$ のとき



$$f(t)=\int_0^1\{-(x^2-2tx)\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+tx^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{3}+t=t-\frac{1}{3}$$

(実は(i)の計算結果を使えるので
$f(t)=-\int_0^1(x^2-2tx)dx-\left(-t+\frac{1}{3}\right)$
とするのが一番楽です)

以上 (i)(ii)(iii)より

$$f(t)=\begin{cases}-t+\frac{1}{3} & (t\leqq 0)\\ \frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3} & \left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)\\ t-\frac{1}{3} & \left(\frac{1}{2}\leqq t\right)\end{cases}$$

【解答】 $f(t)=\begin{cases}-t+\frac{1}{3} & (t\leqq 0)\\ \frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3} & \left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)\\ t-\frac{1}{3} & \left(\frac{1}{2}\leqq t\right)\end{cases}$

(2) $f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ。

$y=\frac{8}{3}t^3-t+\frac{1}{3}$ について

$y'=8t^2-1=(2\sqrt{2}t)^2-1^2$
$=(2\sqrt{2}t+1)(2\sqrt{2}t-1)$

$y'=0$ を解くと $t=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ だから

$f(t)$ の増減表をかくと

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	↘	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$	↗

(1)の(i)は減少　(1)の(ii)は3次関数の一部　(1)の(iii)は増加

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{8}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{8}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{64}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4}{12}=\frac{4-2\sqrt{2}}{12}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

よって $t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ //

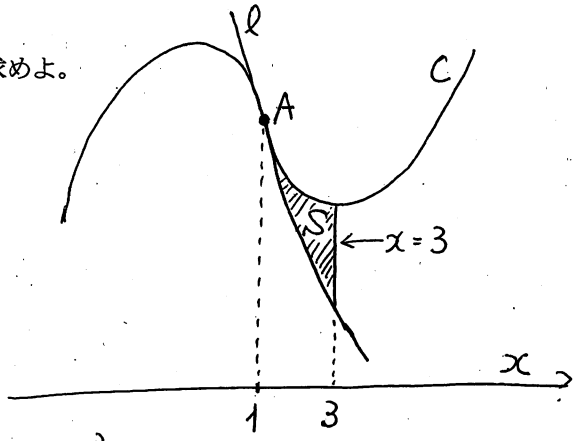
【解答】 $t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

$$\int (x+\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C \quad (C\text{は積分定数})$$

15 曲線 $C : y = x^3 - 3x^2 + 4$ 上に点 A(1, 2) をとり，点 A における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ と直線 $x = 3$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。



(1) $y' = 3x^2 - 6x$ だから点Aにおける接線の傾きは

$3\times1^2 - 6\times1 = -3$

求める接線 ℓ の方程式は

$y - 2 = -3(x-1)$

$\therefore y = -3x + 5$ //

(2) C と ℓ で y 消去すると

$x^3 - 3x^2 + 4 = -3x + 5$

$(x^3 - 3x^2 + 4) - (-3x + 5) = 0$

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

$(x-1)^3 = 0$

$x = 1$ (3重解)

よって C と ℓ は点Aで接していて，他に共有点をもたない

$S = \int_1^3 \{(x^3 - 3x^2 + 4) - (-3x + 5)\} dx$

$= \int_1^3 (x-1)^3 dx = \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^3$

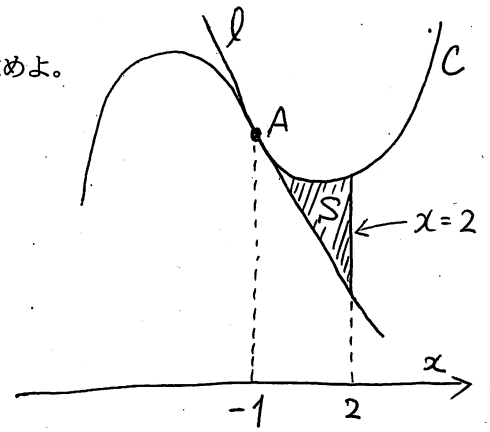
$= \frac{1}{4}\times 2^4 = 4$ //

【解答】 (1) $y = -3x + 5$ (2) $S = 4$

16 曲線 $C : y = 2x^3 + 6x^2 - 3$ 上に点 A(−1, 1) をとり，点 A における接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ と直線 $x = 2$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。



(1) $y' = 6x^2 + 12x$ だから点A(−1, 1)における接線の傾きは

$6\times(-1)^2 + 12\times(-1) = -6$

求める接線 ℓ の方程式は

$y - 1 = -6\{x - (-1)\}$

$\therefore y = -6x - 5$ //

(2) C と ℓ で y 消去すると

$2x^3 + 6x^2 - 3 = -6x - 5$

$(2x^3 + 6x^2 - 3) - (-6x - 5) = 0$

$2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 0$

$2(x+1)^3 = 0$

$x = -1$ (3重解)

よって C と ℓ は点Aで接していて，他に共有点をもたない

$S = \int_{-1}^2 \{(2x^3 + 6x^2 - 3) - (-6x - 5)\} dx$

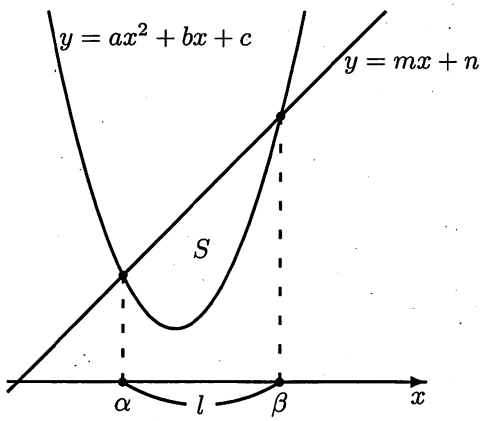
$= 2\int_{-1}^2 (x+1)^3 dx = 2\left[\frac{1}{4}(x+1)^4\right]_{-1}^2$

$= 2\times\frac{1}{4}\times 3^4 = \frac{81}{2}$ //

【解答】 (1) $y = -6x - 5$ (2) $S = \frac{81}{2}$

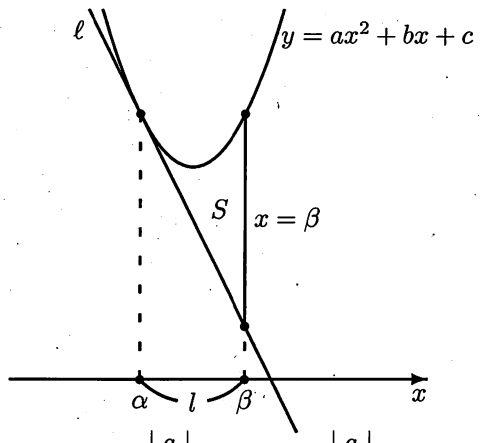
まとめ

面積の 6 分の 1 公式



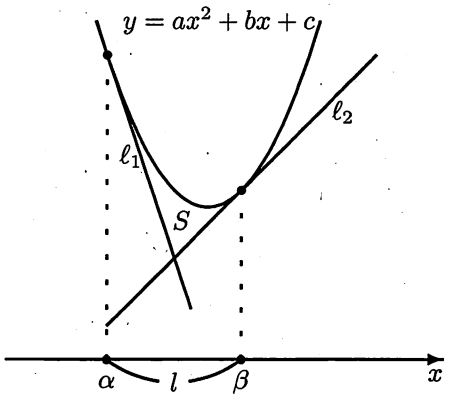
$$S = \frac{|a|}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{6}l^3$$

3 分の 1 公式 (2 次関数)



$$S = \frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{3}l^3$$

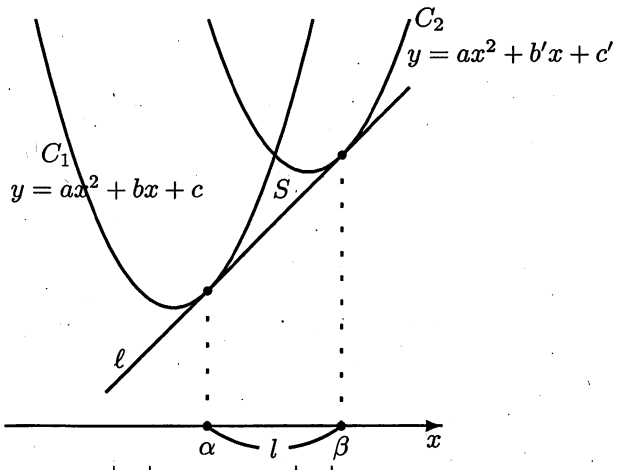
12 分の 1 公式 (2 次関数)　その 1



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{12}l^3$$

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

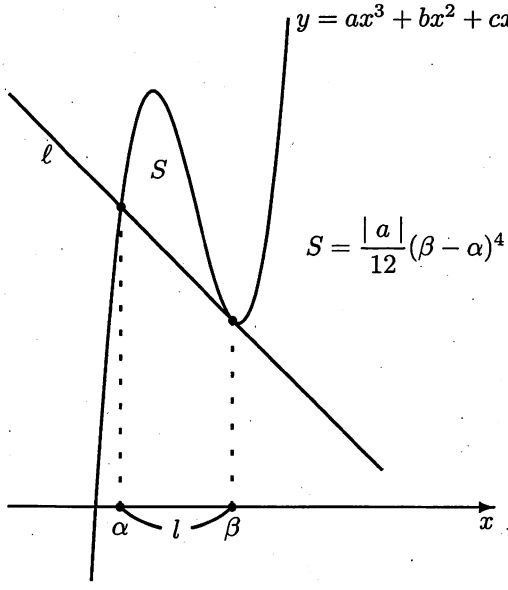
12 分の 1 公式 (2 次関数)　その 2



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{|a|}{12}l^3$$

C_1，C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ である。

12 分の 1 公式 (3 次関数)



$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4 = \frac{|a|}{12}l^4$$

$(x + \alpha)^n$ の不定積分→ 3 分の 1 公式

$$\int (x+\alpha)^n dx = \frac{1}{n+1}(x+\alpha)^{n+1} + C$$

ただし，C は積分定数とする。

定積分の 6 分の 1 公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

定積分おまけ公式（最終兵器）

$$\int uv^{(n)}\,dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots$$
$$+(-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v\,dx$$