

[A 日程] (60分)

問題1 以下の各問いに答えなさい。

(1) 次の不等式を解きなさい。

$$|x^2 + 4x| - 1 > 0$$

(2) 次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^2 |x^2 - 4x + 3| dx$$

問題2 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、以下の問いに答えなさい。

$$a_1 = 4$$

$$a_{n+1} = 2^{4n} a_n^3$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ の条件によって定められる数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めなさい。(2) $c_n = b_n + 2n + 1$ の条件によって定められる数列 $\{c_n\}$ の漸化式を求めなさい。(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

問題3 以下の各問いに答えなさい。

(1) $t > 0$ とする。 $y = x^2 - 4x + 9$ と $y = tx$ が接するとき、接点と t の値を求めなさい。(2) x, y が次の二つの不等式を満たすとき、 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$ の最小値を求めなさい。

$$y \leq x^2 - 4x + 9$$

$$y \leq 4x$$

[B 日程] (60分)

問題1 以下の各問いに答えなさい。

(1) 次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$$

(2) 次の方程式を解きなさい。

$$(\log_{10} x)^2 - \log_{10} x - 2 = 0$$

問題2 以下の各問いに答えなさい。

(1) a, b, c は有理数とする。三次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2c$ について、 $f(\sqrt{3}) = 0$ かつ $f(2) = 0$ を満たす a, b, c を求めなさい。(2) 整式 $P(x) = x - 2$ で割ったときの余りが3であり、 $x + 5$ で割ったときの余りが-11である。この整式 $P(x)$ を $(x - 2)(x + 5)$ で割ったときの余りを求めなさい。問題3 放物線 $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ を F とする。 F 上の点 $P(0, 2)$ 、点 $Q(4, 2)$ の二点のみで F に内接する円がある。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) この円の方程式を求めなさい。

(2) この円の中心点 C と点 Q を通る直線 ℓ がある。直線 ℓ と放物線 F によって囲まれる範囲の面積を求めなさい。