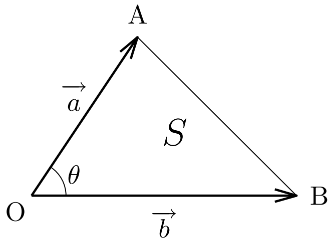
三角形の面積の公式　その１

△OABの面積 S について $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$ とするとき，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}\quad \text{である。}$$



$(proof)$

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと数学Ｉの図形と計量の分野で学習する三角形の面積の公式より

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta\quad\cdots\cdots①$$

また，ベクトルの内積の公式より　$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\quad\Longleftrightarrow\quad\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから $\sin\theta\geqq 0$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}}\quad\cdots\cdots②$$

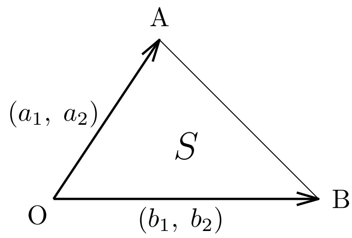
② を ① に代入して $\sin\theta$ を消去すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\left(1-\frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cdot\frac{(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}\qquad (q.e.d.)\end{aligned}$$

三角形の面積の公式　その２　（平面限定）

△OABの面積 S について，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の成分が
$\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，

$$S=\frac{1}{2}\,|\,a_1b_2-a_2b_1\,|\quad\text{である。}$$



$(proof)$

$\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2)$ より

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$　だから　$|\overrightarrow{a}|^2=a_1^2+a_2^2\quad\cdots\cdots③$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$　だから　$|\overrightarrow{b}|^2=b_1^2+b_2^2\quad\cdots\cdots④$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2$　だから　$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2=(a_1b_1+a_2b_2)^2\quad\cdots\cdots⑤$

③，④，⑤ を $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}$ に代入すると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2)-\{(a_1b_1)^2+2(a_1b_1)(a_2b_2)+(a_2b_2)^2\}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2)-(a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_1^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2-a_2^2b_2^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_1^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2)^2-2(a_1b_2)(a_2b_1)+(a_2b_1)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\\&=\frac{1}{2}\,|\,a_1b_2-a_2b_1\,|\qquad (q.e.d.)\end{aligned}$$

練習 1

$\triangle$OAB について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ とする。

$|\overrightarrow{a}| = 4$，$|\overrightarrow{b}| = 3$，$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -2$ であるとき，$\triangle$OAB の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = \sqrt{35}$

練習 2

3 点 O(0, 0)，A(−3, 4)，B(2, 6) を頂点とする $\triangle$OAB の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = 13$

練習 3

3 点 A(2, 4)，B(−4, 3)，C(−1, −7) を頂点とする $\triangle$ABC の面積 S を求めよ。

【解答】 $S = \dfrac{63}{2}$