定積分の 6 分の 1 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(proof)

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$

【解答】 $-\dfrac{9}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx$

【解答】 $-\dfrac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx$

【解答】 $-\dfrac{1}{24}$

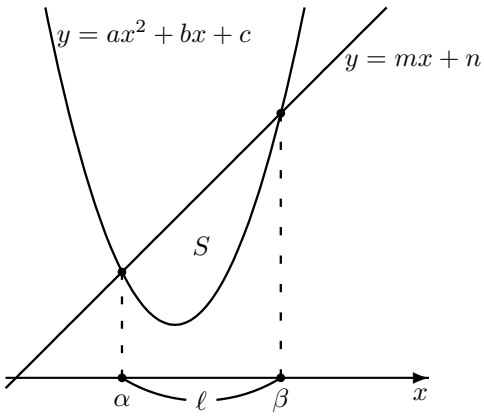
(4) $\displaystyle\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx$

【解答】 $-4\sqrt{3}$

定積分の 6 分の 1 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

面積の 6 分の 1 公式



放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の交点の x 座標を $x=\alpha,\ \beta$ とするとき放物線と直線で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\frac{|\,a\,|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\ell=\beta-\alpha$ とおくと, (ℓ は x 座標の幅)

$$S=\frac{|\,a\,|}{6}\ell^3$$

これらは定積分の 6 分の 1 公式で証明できる。

(proof)

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx+n)-(ax^2+bx+c)\}dx\\&=-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx\\&=-a\cdot\left(-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right)\\&=\frac{|\,a\,|}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

■

← 2 次方程式 $mx+n=ax^2+bx+c$ すなわち $(mx+n)-(ax^2+bx+c)=0$ の解が $x=\alpha,\ \beta$ だから $(mx+n)-(ax^2+bx+c)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解することができる

$\boxed{1}$ 次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-x^2+6x-8$, x 軸

【解答】 $\frac{4}{3}$

(2) $y=x^2-4x+1$, x 軸

【解答】 $4\sqrt{3}$

(3) $y = -x^2 + x + 1$，$y = 3x - 3$

【解答】 $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}$

(4) $y = 2x^2 - 3x + 1$，$y = 2x - 1$

【解答】 $\dfrac{9}{8}$

(5) $y = x^2$，$y = -x^2 + 2x + 4$

【解答】 9

(6) $y = 2x^2 - 6x + 4$，$y = -3x^2 + 9x - 6$

【解答】 $\dfrac{5}{6}$

$\boxed{2}$　放物線 $y = x^2 - ax$ （$a > 0$）と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ。

【解答】 $a = 2$

$\boxed{3}$　放物線 $y = ax - x^2$ （$a > 0$）と x 軸で囲まれた部分の面積が $\dfrac{9}{2}$ になるような定数 a の値を求めよ。

【解答】 $a = 3$

$\boxed{4}$　放物線 $y = -x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，$y = ax$ によって 2 等分されるとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$0 < a < 2$ とする。

【解答】 $a = 2 - \sqrt[3]{4}$

$\boxed{5}$ 直線 $y = kx$ が，放物線 $y = 6x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するように，定数 k の値を求めよ。

【解答】 $k = 6 - 3\sqrt[3]{4}$

$\boxed{6}$ 放物線 $y = x^2$ と，点 $(1,\ 2)$ を通る直線で囲まれた部分の面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。

【解答】 $y = 2x$

$\boxed{7}$ 放物線 $y = x^2 + x - 1$ と，原点を通る傾き m の直線で囲まれた部分の面積が最小となるように，m の値を定めよ。また，そのときの面積を求めよ。

【解答】 $m = 1$，面積 $\dfrac{4}{3}$

$\boxed{8}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ （$a \neq 0$）が異なる 2 つの x の値 α，β で極値をとるとき，
$f(\alpha) - f(\beta) = \dfrac{a}{2}(\beta - \alpha)^3$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{9}$ 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx$ がある。ただし，m は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつときの m の値の範囲を求めよ。

【解答】 $m < 0,\ 1 < m$

(2) 関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で極大値，$x = \beta$ で極小値をとるとき，$f(\alpha) - f(\beta) = 8\sqrt{2}$ を満たす m の値を求めよ。

【解答】 $m = -1,\ 2$

$\boxed{10}$ a は 0 ではない実数とする。関数 $f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

【ヒント】 $-a + \dfrac{1}{a} = A$ とおく

【解答】 $a = \pm 1$

定積分の6分の1公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(proof)

$(\text{左辺})=\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\frac{\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\left(\frac{1}{3}\beta^3-\frac{1}{2}\alpha\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3+\alpha\beta^2\right)-\left(\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2\beta+\alpha^2\beta\right)$

$=-\frac{1}{6}\beta^3+\frac{1}{2}\alpha\beta^2-\frac{1}{2}\alpha^2\beta+\frac{1}{6}\alpha^3$

$=-\frac{1}{6}(\beta^3-3\alpha\beta^2+3\alpha^2\beta-\alpha^3)$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

ここで止めておいて(右辺)の方を展開して、同じ式になることを示してもよい。(その方が楽)

別解その1

$(\text{左辺})=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$　$\frac{1}{3}$公式

$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{(\beta-\alpha)}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=(\text{右辺})$

別解その2

$(\text{左辺})=\left[(x-\beta)\frac{1}{2}(x-\alpha)^2-1\times\frac{1}{6}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=(\text{右辺})$

数Ⅲで学習する「部分積分」のグレードアップ公式。

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$

$(\text{与式})=-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3$

$=-\frac{1}{6}\times 3^3$

$=-\frac{9}{2}$

【解答】 $-\frac{9}{2}$

(2) $\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)dx$

$(\text{与式})=\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx$

$=-\frac{1}{6}(2-1)^3$

$=-\frac{1}{6}$

【解答】 $-\frac{1}{6}$

(3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-3x+1)dx$

$(\text{与式})=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-\frac{1}{2})(x-1)dx$

$=2\times\left\{-\frac{1}{6}(1-\frac{1}{2})^3\right\}$

$=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$=-\frac{1}{24}$

【解答】 $-\frac{1}{24}$

(4) $\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(x^2-4x+1)dx$

$\alpha=2-\sqrt{3}$, $\beta=2+\sqrt{3}$ とおくと

$\beta-\alpha=2\sqrt{3}$.

$(\text{与式})=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3$

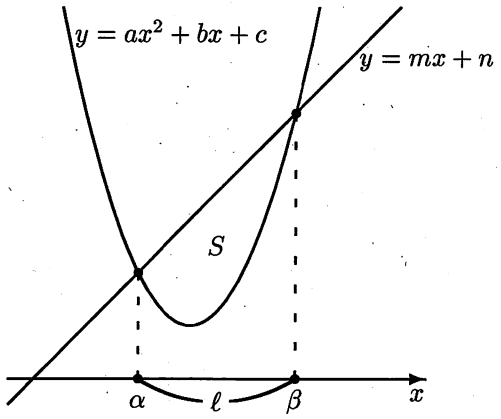
$=-4\sqrt{3}$

【解答】 $-4\sqrt{3}$

定積分の 6 分の 1 公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

面積の 6 分の 1 公式



放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の交点の x 座標を $x=\alpha,\ \beta$ とするとき放物線と直線で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$\ell=\beta-\alpha$ とおくと，(ℓ は x 座標の幅)

$$S=\frac{|a|}{6}\ell^3$$

これらは定積分の 6 分の 1 公式で証明できる。

(proof)

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(mx+n)-(ax^2+bx+c)\}dx$$
$$=-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-a\cdot\left(-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right)$$
$$=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

■

←2 次方程式 $mx+n=ax^2+bx+c$ すなわち $(mx+n)-(ax^2+bx+c)=0$ の解が $x=\alpha,\ \beta$ だから $(mx+n)-(ax^2+bx+c)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解することができる

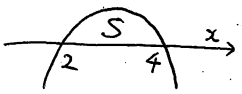
1 次の曲線や直線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-x^2+6x-8$，x 軸

$-x^2+6x-8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x=2,4$



$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx$$
$$=-\int_2^4(x-2)(x-4)dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(4-2)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\times 2^3=\frac{4}{3}$$

別解

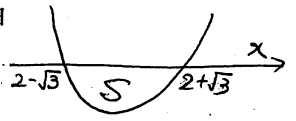
$$S=\int_2^4(-x^2+6x-8)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-8x\right]_2^4=\frac{4}{3}$$

【解答】 $\frac{4}{3}$

(2) $y=x^2-4x+1$，x 軸

$x^2-4x+1=0$

$x=2\pm\sqrt{3}$



$$S=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\{-(x^2-4x+1)\}dx$$

$\alpha=2-\sqrt{3}$，$\beta=2+\sqrt{3}$ とおくと $\beta-\alpha=2\sqrt{3}$

$$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}$$

別解

$$S=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\{-(x^2-4x+1)\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-x\right]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

【解答】 $4\sqrt{3}$

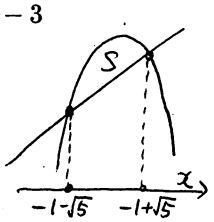
(3) $y=-x^2+x+1,\ y=3x-3$

$-x^2+x+1=3x-3$

$-x^2-2x+4=0$

$x^2+2x-4=0$

$x=-1\pm\sqrt{5}$



$S=\int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}}\{(-x^2+x+1)-(3x-3)\}dx$

$\alpha=-1-\sqrt{5}$, $\beta=-1+\sqrt{5}$ とおくと $\beta-\alpha=2\sqrt{5}$

$S=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$

$=\frac{1}{6}\times(2\sqrt{5})^3=\underline{\frac{20\sqrt{5}}{3}}$ //

別解

$S=\int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}}\{(-x^2+x+1)-(3x-3)\}dx$

$=\int_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}}(-x^2-2x+4)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+4x\right]_{-1-\sqrt{5}}^{-1+\sqrt{5}}$

$=\underline{\frac{20\sqrt{5}}{3}}$ //

【解答】 $\frac{20\sqrt{5}}{3}$

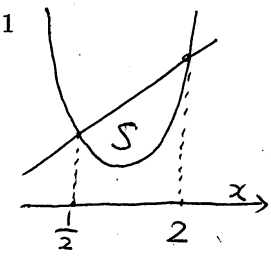
(4) $y=2x^2-3x+1,\ y=2x-1$

$2x^2-3x+1=2x-1$

$2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$

$x=\frac{1}{2},\ 2$



$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{(2x-1)-(2x^2-3x+1)\}dx$

$=-2\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x-\frac{1}{2})(x-2)dx=(-2)\times\left\{-\frac{1}{6}(2-\frac{1}{2})^3\right\}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\underline{\frac{9}{8}}$ //

別解

$S=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{(2x-1)-(2x^2-3x+1)\}dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+5x-2)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\underline{\frac{9}{8}}$ //

【解答】 $\frac{9}{8}$

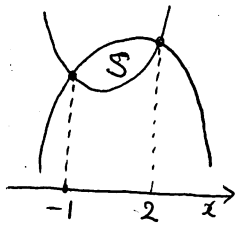
(5) $y=x^2,\ y=-x^2+2x+4$

$x^2=-x^2+2x+4$

$2x^2-2x-4=0$

$2(x+1)(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$



$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+4)-x^2\}dx$

$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx=(-2)\times\left(-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right)$

$=\frac{1}{3}\times3^3=\underline{9}$ //

別解

$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+2x+4)-x^2\}dx$

$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=\underline{9}$ //

【解答】 9

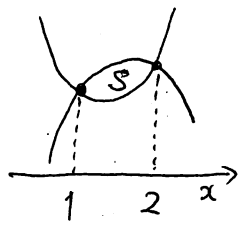
(6) $y=2x^2-6x+4,\ y=-3x^2+9x-6$

$2x^2-6x+4=-3x^2+9x-6$

$5x^2-15x+10=0$

$5(x-1)(x-2)=0$

$x=1,\ 2$



$S=\int_{1}^{2}\{(-3x^2+9x-6)-(2x^2-6x+4)\}dx$

$=-5\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)dx=(-5)\times\left\{-\frac{1}{6}(2-1)^3\right\}$

$=\frac{5}{6}\times1^3=\underline{\frac{5}{6}}$ //

別解

$S=\int_{1}^{2}\{(-3x^2+9x-6)-(2x^2-6x+4)\}dx$

$=\int_{1}^{2}(-5x^2+15x+10)dx$

$=\left[-\frac{5}{3}x^3+\frac{15}{2}x^2+10x\right]_{1}^{2}=\underline{\frac{5}{6}}$ //

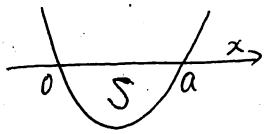
【解答】 $\frac{5}{6}$

2 放物線 $y=x^2-ax$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\frac{4}{3}$ になるような定数 a の値を求めよ。

$x^2-ax=0$

$x(x-a)=0$

$x=0,\ a$



$$S=\int_0^a\{-(x^2-ax)\}dx$$

$$=-\int_0^a x(x-a)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(a-0)^3\right\}$$

$$=\frac{a^3}{6}$$

$S=\frac{4}{3}$ なので

$\frac{a^3}{6}=\frac{4}{3} \Leftrightarrow a^3=8$

aは実数なので $a=2$ //

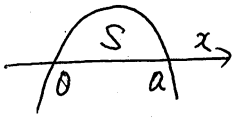
【解答】 $a=2$

3 放物線 $y=ax-x^2$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が $\frac{9}{2}$ になるような定数 a の値を求めよ。

$ax-x^2=0$

$-x(x-a)=0$

$x=0,\ a$



$$S=\int_0^a(ax-x^2)dx$$

$$=-\int_0^a x(x-a)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(a-0)^3\right\}$$

$$=\frac{a^3}{6}$$

$S=\frac{9}{2}$ なので

$\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow a^3=27$

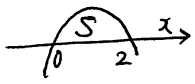
aは実数なので $a=3$ //

【解答】 $a=3$

4 放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，$y=ax$ によって2等分されるとき，定数 a の値を求めよ。ただし，$0<a<2$ とする。

$-x(x-2)=0$

$x=0,\ 2$



$y=-x(x-2)$ と x軸で囲まれた図形の面積を S とおくと

$$S=\int_0^2\{-x(x-2)\}dx=-\int_0^2 x(x-2)dx$$

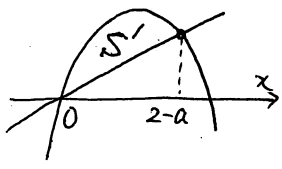
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(2-0)^3\right\}=\frac{4}{3}$$

$-x(x-2)=ax$

$-x^2+2x-ax=0$

$-x(x-2+a)=0$

$x=0,\ 2-a$



$y=-x(x-2)$ と $y=ax$ で囲まれた図形の面積を S' とすると

$$S'=\int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}dx$$

$$=-\int_0^{2-a}x(x-2+a)dx=-\left(-\frac{1}{6}\{(2-a)-0\}^3\right)$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

題意より $2S'=S$ だから

$2\times\frac{1}{6}(2-a)^3=\frac{4}{3}$

$(2-a)^3=4$

$2-a$は実数だから $2-a=\sqrt[3]{4}$

$\therefore a=2-\sqrt[3]{4}$ //

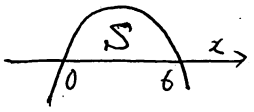
【解答】 $a=2-\sqrt[3]{4}$

5 直線 $y = kx$ が，放物線 $y = 6x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するように，定数 k の値を求めよ。

$6x - x^2 = 0$

$-x(x-6) = 0$

$x = 0,\ 6$



$y = 6x - x^2$ と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする

$S = \int_0^6 (6x - x^2)dx = -\int_0^6 x(x-6)dx$

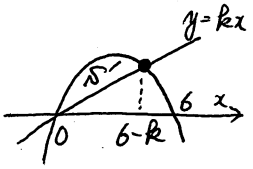
$= -\left\{-\frac{1}{6}(6-0)^3\right\} = 36$.

$6x - x^2 = kx$

$-x^2 + 6x - kx = 0$

$-x(x-6+k) = 0$

$x = 0,\ 6-k$



$y = 6x - x^2$ と $y = kx$ で囲まれた部分の面積を S' とする

$S' = \int_0^{6-k} \{(6x - x^2) - kx\}dx$

$= -\int_0^{6-k} x(x-6+k)dx$

$= -\left(-\frac{1}{6}\{(6-k)-0\}^3\right) = \frac{1}{6}(6-k)^3$

題意より $2S' = S$ だから

$2 \times \frac{1}{6}(6-k)^3 = 36$

$(6-k)^3 = 108$

$6 - k = \sqrt[3]{108}$

$6 - k = 3\sqrt[3]{4}$

$\therefore k = 6 - 3\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{3^3 \times 4}$
$= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{4}$
$= 3 \times \sqrt[3]{4}$

【解答】 $k = 6 - 3\sqrt[3]{4}$

6 放物線 $y = x^2$ と，点 (1, 2) を通る直線で囲まれた部分の面積 S を最小にするような直線の方程式を求めよ。

点 (1, 2) を通り，傾き m の直線の方程式は

$y - 2 = m(x-1)$

$\therefore y = mx - m + 2$ ……①

① と $y = x^2$ の交点の x 座標は y 消去して

$x^2 = mx - m + 2$

$x^2 - mx + m - 2 = 0$

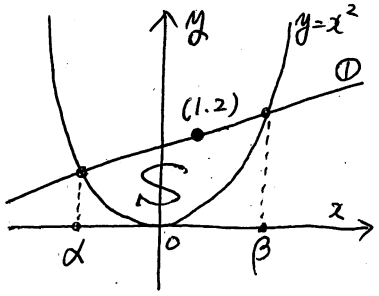
$x = \frac{-(-m) \pm \sqrt{(-m)^2 - 4 \times 1 \times (m-2)}}{2}$

$= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2}$

$\alpha = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2}$, $\beta = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2}$ とおくと

$\beta - \alpha = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2} - \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2}$

$= \frac{2\sqrt{m^2 - 4m + 8}}{2} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$ …②



$S = \int_\alpha^\beta \{(mx - m + 2) - x^2\}dx$

$= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$

$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ ← ②を代入

$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2 - 4m + 8}\right)^3$

$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2 + 4}\right)^3$ ……③

よって S を最小にする m は $m = 2$.

① に代入して $y = 2x - 2 + 2$

$\therefore y = 2x$

参考 S の最小値は ③ より

$S = \frac{1}{6}(\sqrt{4})^3 = \frac{1}{6} \times 2^3 = \frac{4}{3}$.

【解答】 $y = 2x$

7 放物線 $y=x^2+x-1$ と，原点を通る傾き m の直線で囲まれた部分の面積が最小となるように，m の値を定めよ。また，そのときの面積を求めよ。

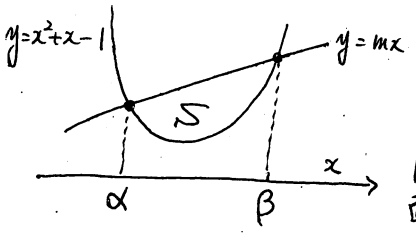
原点を通る傾き m の直線の方程式は $y=mx$ ……①

①と $y=x^2+x-1$ の交点の x 座標は y 消去して

$$x^2+x-1=mx$$
$$x^2-mx+x-1=0$$
$$x-(m-1)x-1=0.$$
$$x=\frac{-\{-(m-1)\}\pm\sqrt{\{-(m-1)\}^2-4\times1\times(-1)}}{2}$$
$$=\frac{(m-1)\pm\sqrt{m^2-2m+5}}{2}$$

$\alpha=\dfrac{(m-1)-\sqrt{m^2-2m+5}}{2}$，$\beta=\dfrac{(m-1)+\sqrt{m^2-2m+5}}{2}$ とおく

$$\beta-\alpha=\frac{2\sqrt{m^2-2m+5}}{2}=\sqrt{m^2-2m+5}\ \cdots②$$



$y=x^2+x-1$ と $y=mx$ で囲まれた部分の面積を S とする

$$S=\int_\alpha^\beta\{mx-(x^2+x-1)\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \leftarrow ②を代入する.$$
$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2-2m+5}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-1)^2+4}\right)^3\cdots③$$

S を最小にする m は $m=1$.

そのときの面積 S は③より

$$S=\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\frac{1}{6}\times2^3=\frac{4}{3}.$$

以上より $m=1$，面積 $\frac{4}{3}$ //

【解答】 $m=1$，面積 $\frac{4}{3}$

8 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$ が異なる2つの x の値 α，β で極値をとるとき，$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを示せ。

(proof) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が極値をもつので

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\cdots\cdots①$$

$f'(x)=0$ すなわち $3ax^2+2bx+c=0$ の2つの実数解が $x=\alpha$，β であるから

$$3ax^2+2bx+c=3a(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots②$$

と因数分解することができる. よって

$$(左辺)=f(\alpha)-f(\beta)$$
$$=[f(x)]_\beta^\alpha$$
$$=\int_\beta^\alpha f'(x)dx$$
$$=\int_\beta^\alpha(3ax^2+2bx+c)dx \leftarrow ①$$
$$=3a\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta) \leftarrow ②$$
$$=-3a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=(-3a)\times\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$$
$$=(右辺)$$

よって $f(\alpha)-f(\beta)=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つ ▨

9 3次関数 $f(x)=x^3-3mx^2+3mx$ がある。ただし，m は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつときの m の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=3x^2-6mx+3m$

$f(x)$が極値をもつので $f'(x)=0$ は

異なる2個の実数解をもつ。

判別式をDとするとD>0だから

$\frac{D}{4}=(-3m)^2-3\times 3m>0$

$9m^2-9m>0$

$m(m-1)>0$

$\therefore m<0,\ 1<m$ ……①

【解答】 $m<0,\ 1<m$

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$f(\alpha)-f(\beta)=8\sqrt{2}$ を満たす m の値を求めよ。

$f(x)$が $x=\alpha$ で極大値 $x=\beta$ で極小値をとるので $f'(x)=0$ すなわち

$3x^2-6mx+3m=0$ の2つの実数解は

$x=\alpha,\ \beta$ である。よって

$3x^2-6mx+3m=3(x-\alpha)(x-\beta)$ ……②

と因数分解できる。よって

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=\left[f(x)\right]_\beta^\alpha\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha(3x^2-6mx+3m)\,dx\\&=3\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=(-3)\times\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}\\&=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

題意より $f(\alpha)-f(\beta)=8\sqrt{2}$ だから

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=8\sqrt{2}$ ……③

ここで $3x^2-6mx+3m=0$ すなわち

$x^2-2mx+m=0$ を解くと

$x=m\pm\sqrt{m^2-m}$ となり

増減表より

x	……	α	……	β	……
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

$\alpha<\beta$ であるから

$\alpha=m-\sqrt{m^2-m}$，$\beta=m+\sqrt{m^2-m}$ となり

$\beta-\alpha=(m+\sqrt{m^2-m})-(m-\sqrt{m^2-m})$

$=2\sqrt{m^2-m}$ なので

③ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2\sqrt{m^2-m})^3=8\sqrt{2}$

$4(\sqrt{m^2-m})^3=8\sqrt{2}$

$(\sqrt{m^2-m})^3=2\sqrt{2}$

$(\sqrt{m^2-m})^3=(\sqrt{2})^3$

よって $m^2-m=2$

$(m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1,\ 2$

これは①をみたしている

以上より $m=-1,\ 2$

【解答】 $m=-1,\ 2$

10 a は 0 ではない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

$-a+\frac{1}{a}=A$ とおくと

$f(x)=(3x^2-4)(x+A)$

$\quad =3x^3+3Ax^2-4x-4A$

$f'(x)=9x^2+6Ax-4$ ……①

$f'(x)=0$ の2つの実数解を $x=\alpha,\beta$ とおくと

ただし $\alpha<\beta$ とする.

$9x^2+6Ax-4=9(x-\alpha)(x-\beta)$ ……②

と因数分解することができる.

増減表をかくと

x	…	α	…	β	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(\beta)$	↗

極大値と極小値の差は

$$f(\alpha)-f(\beta)=[f(x)]_\beta^\alpha$$
$$=\int_\beta^\alpha f'(x)dx$$
$$=\int_\beta^\alpha(9x^2+6Ax-4)dx \leftarrow ①$$
$$=9\int_\beta^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx \leftarrow ②$$
$$=-9\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=(-9)\times\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$
$$=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3 \text{ ……③}$$

ここで $9x^2+6Ax-4=0$ を解くと

$$x=\frac{-6A\pm\sqrt{(3A)^2-9\times(-4)}}{9}$$
$$=\frac{-6A\pm3\sqrt{A^2+4}}{9}$$
$$=\frac{-2A\pm\sqrt{A^2+4}}{3}$$

$\alpha<\beta$ より

$\alpha=\frac{-2A-\sqrt{A^2+4}}{3}$, $\beta=\frac{-2A+\sqrt{A^2+4}}{3}$ であり

$$\beta-\alpha=\frac{-2A+\sqrt{A^2+4}}{3}-\frac{-2A-\sqrt{A^2+4}}{3}$$
$$=\frac{2\sqrt{A^2+4}}{3}$$

よって

③ $\Leftrightarrow f(\alpha)-f(\beta)=\frac{3}{2}\left(\frac{2\sqrt{A^2+4}}{3}\right)^3$

これを最小にする A は $A=0$

よって $-a+\frac{1}{a}=0$

$$a=\frac{1}{a}$$
$$a^2=1$$
$$\therefore a=\pm1$$

【ヒント】 $-a+\frac{1}{a}=A$ とおく

【解答】 $a=\pm1$