高等学校数学　新潟県教員採用試験　平成30年7月8日(日)実施

解答は全て解答用紙に書きなさい。

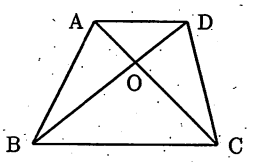
1　次の(1)〜(8)に答えなさい。

(1) 次の連立方程式を解きなさい。

$$\begin{cases} a^2-b^2+c^2=0 \\ 2a-b-4c=0 \\ a-3b+3c=0 \end{cases}$$

(2) $\sqrt{165-5n}$ が整数となる自然数 n の値をすべて求めなさい。

(3) 右の図のように，AD // BC である台形ABCDがあり，対角線AC，BDの交点をOとする。△AODの面積が a^2，△COBの面積が b^2 であるとき，台形ABCDの面積を a，b を用いて表しなさい。



(4) 方程式 $\log_4(4x+1)+\log_4(2x-3)=1$ を解きなさい。

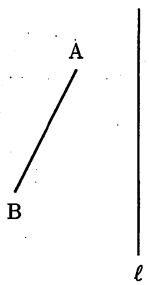
(5) 初項が99，公差が -5 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，S_n の最大値を求めなさい。

(6) 関数 $y=x^2-4x$ の表す曲線を C とするとき，次の①，②に答えなさい。

① 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$ における接線 ℓ の方程式を求めなさい。

② 曲線 C のグラフを①で求めた接線 ℓ とで囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

(7) 下の図のように，直線 ℓ と ℓ に平行でない線分ABがある。直線 ℓ を対称軸とする線分ABと線対称な線分を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。ただし，作図が解答用紙に行い，作図に使った線は消さないで残しておくこと。



(8) 10個の値からなるデータがあり，そのうち4個の平均は5，分散は2で，残りの6個の平均は7，分散は3である。このとき，全体の分散 s^2 を求めなさい。

2　a を実数定数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。x の関数
$y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+4$ について，
次の(1)〜(3)に答えなさい。

(1) $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ とするとき，t の取り得る値の範囲を求めなさい。

(2) $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ とするとき，y を t の式で表しなさい。

(3) t の方程式
$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x+\cos x)+4=0$ が異なる4個の実数解をもつような，a の値の範囲を求めよ。

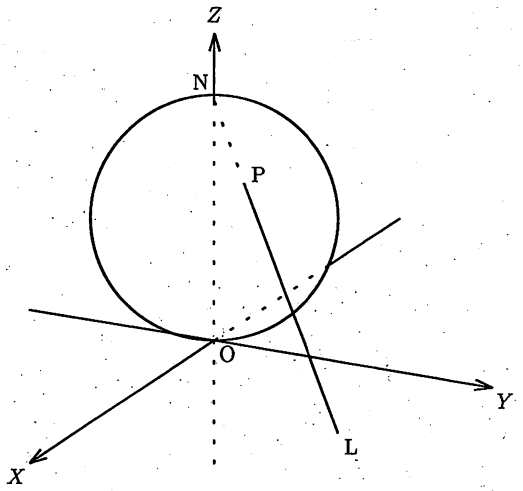
3　A，B，C，Dの文字が1つずつ書かれたカードが4枚あり，最初，それらのカードは，左からA，B，C，Dの順に1列に並んでいる。並んでいるカードの中から無作為に2枚を選び，その2枚のカードの場所に入れ替えるという操作を繰り返して行う。例えば，1回目の操作で，Aのカードと C のカードを選ぶと，4枚のカードは左から C，B，A，D の順に並ぶ。この操作を n 回行うとき，Aのカードが左端にある確率を p_n，Aのカードが右端にある確率を q_n とする。このとき，次の(1)〜(3)に答えなさい。

(1) p_1，q_1，p_2，q_2 をそれぞれ求めなさい。

(2) p_n を求めなさい。

(3) q_n を求めなさい。

4　空間内に，原点Oで互いに直交する X 軸，Y 軸，Z 軸がある。この空間内に，球面K：$X^2+Y^2+Z^2-Z=0$ があり，球面K上の点N(0, 0, 1)と XY 平面上の点L$(x, y, 0)$ を結ぶ直線と球面Kとの点N以外の交点をP(X, Y, Z) とすると，XY 平面上のすべての点と球面K上の点N以外の点との間に1対1の対応がつく。また，X 軸，Y 軸と複素数平面の実軸，虚軸をそれぞれ同一視し，点Lと複素数平面上の点 $z=x+yi$ を対応させる。点Lを点Pに写す写像を φ とするとき，次の(1)，(2)に答えなさい。ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とする。



(1) 点P(X, Y, Z) の X，Y，Z をそれぞれ z，$\overline{z}$ を用いて表しなさい。

(2) 次の①，②に答えなさい。

① 方程式 $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ の表す図形は，XY 平面上の円または直線であることを証明しなさい。ただし，a，c は実数，b は複素数とし，$|b|\neq 0$，$|b|^2-ac>0$ とする。

② 方程式 $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ の表す図形の写像 φ による像が，円であることを証明しなさい。

5　n を自然数とし，$[0, 1]$ を閉区間 $0\leqq x\leqq 1$ とする。連続関数の列 $f_n:[0, 1]\to\mathrm{R}$ が関数 $f:[0, 1]\to\mathrm{R}$ に各点収束するとき，次の(1)，(2)に答えなさい。ただし，Rは実数全体の集合とする。

(1) $f_n(x)=nx(1-x)^n$ とするとき，次の①～③に答えなさい。

① $f(x)$ を求めなさい。

② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ を求めなさい。

③ $f_n(x)$ は，$n\to\infty$ のとき，区間 $[0, 1]$ で一様収束しないことを証明しなさい。

(2) $f_n(x)$ が，区間 $[0, 1]$ で $f(x)$ に一様収束するなら，$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で連続であることを証明しなさい。