教科書 p.107　章末問題 B　１２

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1}$

＜解答１＞

$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1}$ ……①

として，① の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{3a_n}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{3 \cdot a_n}{3 \cdot 3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

$\dfrac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = b_{n+1}$ だから

$$② \iff b_{n+1} - b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列が $\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ である。

また，$b_1 = \dfrac{a_1}{3^1} = \dfrac{1}{3}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{9}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{9}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{5}{3} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n}
\end{aligned}$$

$n = 1$ のとき，$a_1 = \dfrac{5}{3} - 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{1}{3}$

よって $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\therefore \quad b_n = \frac{5}{3} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{5}{3} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot 3^n - 2 \cdot \frac{2^n}{3^n} \cdot 3^n$$

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$$

//

＜解答２＞

$a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1}$ ……①

として，① の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3a_n}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3 \cdot a_n}{2 \cdot 2^n} = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

$\dfrac{a_n}{2^n} = b_n$ とおくと $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = b_{n+1}$ だから

$$② \iff b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n = 1$$

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + 1$$

$$b_{n+1} + 2 = \frac{3}{2}(b_n + 2) \quad \cdots\cdots ③$$

また，$b_1 = \dfrac{a_1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

③ より、数列 $\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$

公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列なので

$$b_n + 2 = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 2$$

$$a_n = \frac{5}{2} \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n$$

$$a_n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1}$$

//

どちらの解き方が良いのでしょうね？

教科書 p.107　章末問題 B　１４

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

(1) 数列 $\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を，それぞれ求めよ。

＜解答１＞

(1) $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ ……①

$b_{n+1} = 2a_n + b_n$ ……②

とおく。① + ② より，

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) \quad \cdots\cdots ③$$

③ より，数列 $\{a_n + b_n\}$ は

初項 $a_1 + b_1 = 0 + 1 = 1$

公比 3 の等比数列なので

$$a_n + b_n = 1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n + b_n = 3^{n-1} \quad //$$

① − ② より，

$$a_{n+1} - b_{n+1} = -a_n + b_n$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (-1) \cdot (a_n - b_n) \quad \cdots\cdots ③$$

③ より，数列 $\{a_n - b_n\}$ は

初項 $a_1 - b_1 = 0 - 1 = -1$

公比 -1 の等比数列なので

$$a_n - b_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n - b_n = (-1)^n \quad //$$

(2) $a_n + b_n = 3^{n-1}$ ……④

$a_n - b_n = (-1)^n$ ……⑤

とおく。④ + ⑤ より，

$$2a_n = 3^{n-1} + (-1)^n$$

$$a_n = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2} \quad //$$

④ − ⑤ より，

$$2b_n = 3^{n-1} - (-1)^n$$

$$b_n = \frac{3^{n-1} - (-1)^n}{2} \quad //$$

＜解答２　(1) のような誘導が無い場合＞

$a_{n+1} = a_n + 2b_n$ ……①

$b_{n+1} = 2a_n + b_n$ ……②

とおく。① を変形して

$$2b_n = a_{n+1} - a_n \iff b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

であるから

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2} \quad \cdots ④$$

③ と ④ を ② に代入すると

$$② \iff \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{2} = 2a_n + \frac{a_{n+1} - a_n}{2}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 4a_n + a_{n+1} - a_n$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

また ① より，$a_2 = a_1 + 2b_1 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$

⑤ を変形すると

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = (-1) \cdot (a_{n+1} - 3a_n) \quad \cdots\cdots ⑦$$

⑥ より，数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ は初項 $a_2 + a_1 = 2 + 0 = 2$

公比 3 の等比数列なので

$$a_{n+1} + a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦ より，数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 2 - 3 \cdot 0 = 2$

公比 -1 の等比数列なので

$$a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑨$$

⑧ − ⑨ より，$4a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1}$

$$a_n = \frac{3^{n-1} - (-1)^{n-1}}{2}$$

$$a_n = \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2} \quad //$$

また，$a_{n+1} = \dfrac{3^n + (-1)^{n+1}}{2}$ であるから，③ より，

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{2} - \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3 \cdot 3^{n-1} - (-1)^n}{2} - \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{3^{n-1} - (-1)^n}{2} \quad //$$