

1 $x - \frac{1}{x} = 1$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

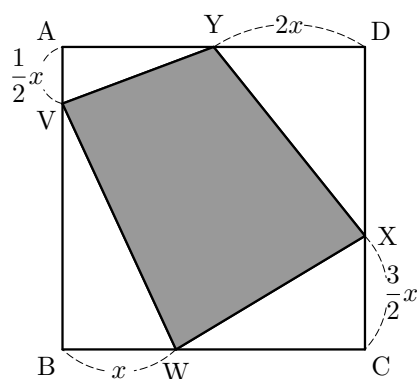
(2) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

(3) $x^5 - \frac{1}{x^5}$

2 図のように 1 辺の長さ 2 の正方形 ABCD がある。 $0 < x < 1$ とする。 次のものを求めよ。

(1) 四角形 VWXY の面積 S

(2) 面積 S の最小値とそのときの x の値



3 四面体 OABC において

$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$, $\angle ACO = 45^\circ$, $\angle BOC = 150^\circ$, $AC = 7$ である。 次のものを求めよ。

(1) AO の長さ

(2) 四面体 OABC の体積

(3) $\angle BAC = \theta$ とするとき , $\cos \theta$ の値

4 1 つのさいころを n 回投げる。 出た目の最小値を X とする。 次の確率を求めよ。

(1) $X = 3$ となる確率

(2) $X = 3$ となる確率

1 (1) $x - \frac{1}{x} = 1$ の両辺を 2 乗して, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1^2 \iff x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$
 $\iff x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 1 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} = 3 //$

(2) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3 \cdot 1$ であるからこの式の左辺を展開すると $x^3 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = 3$
 $\iff x^3 - \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} = 3 \iff x^3 - 1 - \frac{1}{x^3} = 3 \iff x^3 - \frac{1}{x^3} = 4 //$

【(2) 別解】 $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) = 1 \cdot (3 + 1) = 4 //$

(3) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = 3 \cdot 4$ であるからこの式の左辺を展開すると $x^5 - \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x^5} = 12$
 $\iff x^5 + \left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^5} = 12 \iff x^5 + 1 - \frac{1}{x^5} = 12 \iff x^5 - \frac{1}{x^5} = 11 //$

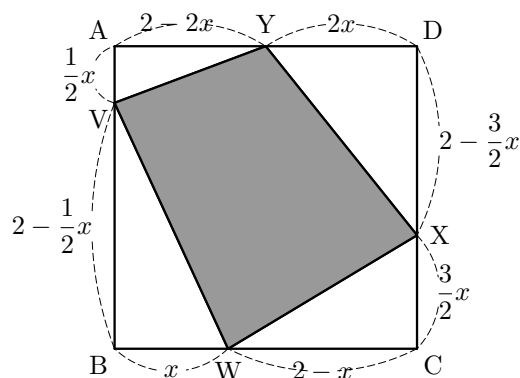
2 (1) $\triangle AVY = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot (2 - 2x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
 $\triangle BWV = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(2 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4}x^2 + x$
 $\triangle CXW = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x \cdot (2 - x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$
 $\triangle DYX = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left(2 - \frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x$

であるから, 四角形 VWXY の面積 S は

$$S = \text{四角形 } ABCD - (\triangle AVY + \triangle BWV + \triangle CXW + \triangle DYX)$$

$$= 2 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)$$

$$= 3x^2 - 5x + 4 //$$



(2) 平方完成すると, $S = 3x^2 - 5x + 4 = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{12}$ より, 定義域が $0 \leq x \leq 1$ なので
 $x = \frac{5}{6}$ のとき, 最小値 $\frac{23}{12} //$

3 (1) $\triangle OAC$ は直角二等辺三角形なので $AO \cdot \sqrt{2} = 7$ より, $AO = \frac{7\sqrt{2}}{2} //$

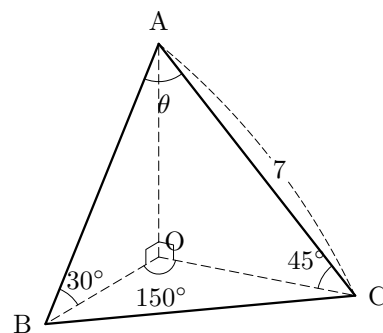
(2) (1) より $AO = CO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $\triangle OAB$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので

$AB \sin 30^\circ = AO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ より, $AB = 7\sqrt{2}$, $BO = AB \cos 30^\circ = \frac{7\sqrt{6}}{2}$

($BO : AO : AB = 1 : 2 : \sqrt{3}$ で求めてもよい。)

$\triangle OBC = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{8}$

四面体 ABCD の体積 V は $V = \frac{1}{2} \cdot \triangle OBC \cdot AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{49\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{343\sqrt{6}}{48} //$



(3) $\triangle OBC$ で余弦定理により

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2 \cdot BO \cdot CO \cos 150^\circ = \left(\frac{7\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{49 \cdot 6}{4} + \frac{49 \cdot 2}{4} + \frac{49 \cdot 6}{4} = \frac{49 \cdot 14}{4} \text{ より, } BC = \frac{7\sqrt{14}}{2}$$

以上より $\triangle ABC$ の 3 辺の比は $AB : BC : AC = 7\sqrt{2} : \frac{7\sqrt{14}}{2} : 7$ だから, $AB : BC : AC = 2\sqrt{2} : \sqrt{14} : 2$

$\triangle ABC$ で余弦定理により, $\cos \theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 2^2 - (\sqrt{14})^2}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} //$

4 (1) 出た目の最小値が 3 以上になるには 3, 4, 5, 6 の目のいずれかが出続ければよい。

よってさいころを n 回投げた場合は, この 4 通りの目が n 回出ればよいから, 求める確率は $\left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n //$

(2) $(X = 3 \text{ になる確率}) = (X = 3 \text{ になる確率}) - (X = 4 \text{ になる確率}) \leftarrow (1) \text{ を使う}$
 $= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leftarrow \frac{4^n - 3^n}{6^n} \text{ も正解}$

1 $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ のとき, 次の値を求めよ。

(1) $a^2 + b^2$

(2) $\left(\frac{1}{b} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - b\right)^2$

(3) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$

2 2 次関数 $f(x) = (a + 2)x^2 - (2a + 4)x + a^2 - a$ について, 次の問いに答えよ。

ただし, a は定数で $a > 0$ であるとする。

(1) 放物線 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が相異なる二つの実数を解に持つための, 定数 a のとり得る範囲を求めよ。

3 円に内接する四角形 ABCD において, $AB=8$, $BC=CD=5$, $AC=7$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\angle ABC$ の大きさを求めよ。

(2) 辺 AD の長さを求めよ。

(3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

4 赤玉 8 個, 白玉 4 個が入った袋の中から, 同時に 6 個の玉を取り出すとき, 次の確率を求めよ。

(1) 6 個のうち赤玉が 4 個で白玉が 2 個である確率。

(2) 赤玉の個数が 3 個以下である確率。

1 (1) $a + b = (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{5}$, $ab = (\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2 = 20 - 4 = 16 //$$

$$(2) \left(\frac{1}{b} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - b\right)^2 = \left(\frac{1-ab}{b}\right)^2 + \left(\frac{1-ab}{a}\right)^2 = \frac{(1-ab)^2}{b^2} + \frac{(1-ab)^2}{a^2} = \frac{a^2(1-ab)^2 + b^2(1-ab)^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{(1-ab)^2(a^2+b^2)}{(ab)^2} = \frac{(1-2)^2 \cdot 16}{2^2} = 4 //$$

【(2) の別解】

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} , \text{同様に } \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{b} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{a} - b\right)^2 = \left\{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})\right\}^2 + \left\{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - (\sqrt{5} + \sqrt{3})\right\}^2 = \left(\frac{-\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{4} + \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{4} = \frac{(5 - 2\sqrt{15} + 3) + (5 + 2\sqrt{15} + 3)}{4} = \frac{16}{4} = 4 //$$

(3) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (2\sqrt{5})^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 40\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$ であるから

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} = \frac{28\sqrt{5}}{2^2} = 7\sqrt{5} //$$

2 (1) $y = (a + 2)(x^2 - 2x) + a^2 - a = (a + 2)\{(x - 1)^2 - 1\} + a^2 - a$

$$= (a + 2)(x - 1)^2 - (a + 2) + a^2 - a = (a + 2)(x - 1)^2 + a^2 - 2a - 2$$

頂点の座標は $(1, a^2 - 2a - 2) //$

(2) $a > 0$ より x^2 の係数は $a + 2 > 0$ であるから, この 2 次関数は下に凸の放物線である。

頂点の y 座標が負になれば x 軸と共有点を 2 個もち, 方程式 $f(x) = 0$ は相異なる二つの実数の解をもつ。

$$a^2 - 2a - 2 < 0 \text{ を解くと } 1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$$

題意より $a > 0$ であるから, 求める a の値の範囲は $0 < a < 1 + \sqrt{3} //$

【(2) の別解】

方程式 $f(x) = 0$ が相異なる二つの実数の解をもつから, 判別式 D とおくと $D > 0$ だから,

$$\frac{D}{4} = (a + 2)^2 - (a + 2)(a^2 - a) > 0 \iff (a + 2)\{(a + 2) - (a^2 - a)\} > 0$$

$$\iff (a + 2)(-a^2 + 2a + 2) > 0 \quad a > 0 \text{ より, } a + 2 > 0 \text{ なので}$$

$$\iff -a^2 + 2a + 2 > 0 \iff a^2 - 2a - 2 < 0 \text{ これを解くと } 1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$$

題意より $a > 0$ であるから, 求める a の値の範囲は $0 < a < 1 + \sqrt{3} //$

3 (1) $\triangle ABC$ について余弦定理より,

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \angle ABC < 180^\circ \text{ より, } \angle ABC = 60^\circ //$$

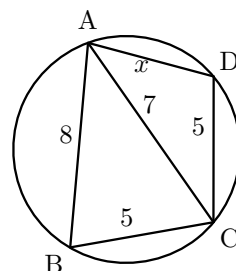
(2) 円に内接する四角形の向かい合う内角の和は 180° だから $\angle ADC = 120^\circ$

$AD = x$ とおくと $\triangle ACD$ について余弦定理より

$$AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cos \angle ADC = AC^2 \text{ だから}$$

$$x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cos 120^\circ = 7^2 \iff x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$\iff (x - 3)(x + 8) = 0 \text{ で } AD = x > 0 \text{ より, } AD = x = 3 //$$



(3) 四角形 $ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot (40 + 15) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{55\sqrt{3}}{4} //$

4 (1) 赤玉 8 個から 4 個, 白玉 4 個から 2 個を取り出せばよいから $\frac{{}_8C_4 \times {}_4C_2}{{}_{12}C_6} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 3}{11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{11} //$

(2) (赤玉 4 個白玉 2 個) の確率は (1) より $\frac{5}{11}$ (赤玉 5 個白玉 1 個) の確率は $\frac{{}_8C_5 \times {}_4C_1}{{}_{12}C_6} = \frac{8 \cdot 7 \times 4}{11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{8}{33}$

(赤玉 6 個白玉 0 個) の確率は $\frac{{}_8C_6}{{}_{12}C_6} = \frac{4 \cdot 7}{11 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{33}$ これらの和が求める確率の余事象の確率になる。

以上より, 求める確率は $1 - \left(\frac{5}{11} + \frac{8}{33} + \frac{1}{33}\right) = \frac{3}{11} //$

1 $a = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$

(2) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

(3) $\frac{a^5 - b^5}{a - b}$

2 2 次関数 $f(x) = x^2 + (4 - 2a)x + b$ (a, b は定数) について, 次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値が -4 であるとする。このとき, b を a の式で表せ。また, $b < 0$ であるための a の値の範囲を求めよ。

3 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において, 辺 AB の中点を M とする。さらに $\theta = \angle CMD$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とする。このとき, 次の問いに答えよ。。

(1) $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) 三角形 CMD の面積を求めよ。

(3) 正四面体 ABCD の体積を求めよ。

4 コインを続けて 6 回投げるとき, 次の確率を求めよ。

(1) 表がちょうど 3 回出る確率

(2) 裏が 3 回以上出る確率

① $a + b = \frac{\sqrt{5}+3}{2} + \frac{\sqrt{5}-3}{2} = \sqrt{5}$, $ab = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \times \frac{\sqrt{5}-3}{2} = \frac{5-9}{4} = -1$ であるから

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (-1) = 7$$

(1) $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} = a^2 + ab + b^2 = a^2 + b^2 + ab = 7 + (-1) = 6 //$

(2) $\frac{a^4 - b^4}{a - b} = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{a - b} = \frac{(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)}{a - b} = (a^2 + b^2)(a+b) = 7\sqrt{5} //$

(3) $(a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = a^5 - a^2b^3 + a^3b^2 - b^5$ より $a^5 - b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) - a^2b^2(a-b)$ だから

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = \frac{(a^2 + b^2)(a^3 - b^3) - a^2b^2(a-b)}{a - b} = \frac{(a^2 + b^2)(a^3 - b^3)}{a - b} - \frac{a^2b^2(a-b)}{a - b} = (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a - b} - (ab)^2$$

$$= 7 \cdot 6 - (-1)^2 = 41 //$$

(a+b)(a^4 - b^4) を計算してもよいが少し面倒。

② (1) $y = x^2 + (4 - 2a)x + b = x^2 - 2(a - 2)x + b = x^2 - 2(a - 2)x + (a - 2)^2 - (a - 2)^2 + b$

$$= \{x - (a - 2)\}^2 - (a - 2)^2 + b = \{x - (a - 2)\}^2 - (a^2 - 4a + 4) + b$$

$$= \{x - (a - 2)\}^2 - a^2 + 4a - 4 + b \quad \text{よって求める頂点の座標は } (a - 2, -a^2 + 4a - 4 + b) //$$

(2) 最小値は -4 であるから, $-a^2 + 4a - 4 + b = -4$ すなわち $b = a^2 - 4a //$

また, $b < 0$ であるから $a^2 - 4a < 0 \iff a(a - 4) < 0 \iff 0 < a < 4 //$

③ (1) $\triangle ABC$ は $AB=BC=CA=2$ の正三角形で, M は AB の中点であるから $CM=\sqrt{3}$

また, 正四面体の各面は合同なので $CM=DM=\sqrt{3}$ だから,

$\triangle CMD$ について余弦定理より,

$$\cos \theta = \frac{CM^2 + DM^2 - CD^2}{2 \cdot CM \cdot DM} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} //$$

(2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ なの $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって求める面積は $\triangle CMD = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot DM \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} //$

(3) 辺 $AB \perp$ 平面 CMD であるから, 正四面体 $ABCD$ を三角錐 $ACMD$ と三角錐 $BCMD$ に分けて考えれば, 三角錐 $ACMD$ と三角錐 $BCMD$ の体積は等しいので, 正四面体 $ABCD$ の体積 = 三角錐 $ACMD$ の体積 $\times 2$ である。

三角錐 $ACMD$ の体積 = $\frac{1}{3} \cdot AM \cdot \triangle CMD = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ より,

求める正四面体 $ABCD$ の体積は $\frac{\sqrt{2}}{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} //$

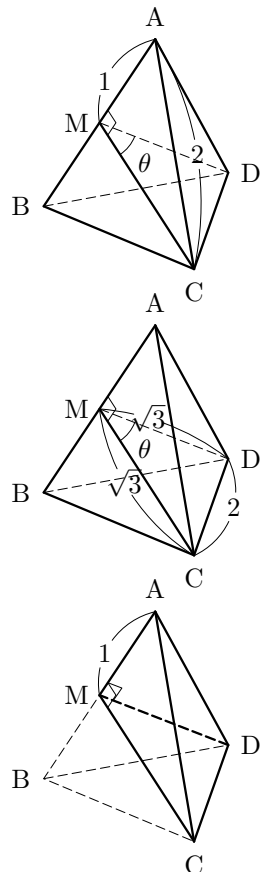
④ (1) ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} //$

(2) ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$$= {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= ({}_6C_3 + {}_6C_4 + {}_6C_5 + {}_6C_6) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = (20 + 15 + 6 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} //$$

表が2回1回0回のときの確率を求めて1から引いてもよい。



1 $a = 5 + 2\sqrt{6}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $a + \frac{1}{a}$

(2) $\left(2a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{a}\right)^2$

(3) $\frac{a^6 + 1}{a^3}$

2 x の関数 $f(x) = x^2 - 2tx + 2t + 1$ について、次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ。

(2) x についての方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもたないときの実数 t の値の範囲を求めよ。

3 1 辺が 4 である正四面体 ABCD において、辺 AB 上に $AP = 2$ 、辺 AC 上に $AQ = 3$ 、
辺 AD 上に $AR = 1$ である 3 点 P, Q, R をとる。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ, QR, RP の長さをそれぞれ求めよ。

(2) $\angle PQR = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

4 6 個の数字 1, 1, 2, 2, 3, 3 を全部使って 6 桁の整数をつくる時、次の問いに答えよ。

(1) 6 桁の整数は、いくつできるか。

(2) 6 桁の整数のうち 150000 から 250000 までの整数は何個あるか。

1

$$(1) \frac{1}{a} = \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = \frac{1 \times (5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = \frac{5-2\sqrt{6}}{25-24} = 5-2\sqrt{6} \text{ であるから } a + \frac{1}{a} = (5+2\sqrt{6}) + (5-2\sqrt{6}) = 10 //$$

$$(2) \text{ まず, } a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = 10^2 - 2 = 98 \text{ であるから}$$

$$\left(2a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 = 4a^2 + 4 + \frac{1}{a^2} + a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} = 5a^2 + \frac{5}{a^2} + 8 = 5\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 8 = 5 \cdot 98 + 8 = 498 //$$

$$(3) \frac{a^6+1}{a^3} = a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3 \cdot a \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) = 10^3 - 3 \cdot 10 = 970 //$$

$$\text{【(3) の別解】 } \frac{a^6+1}{a^3} = a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = 10 \cdot (98 - 1) = 970 //$$

2

$$(1) f(x) = x^2 - 2tx + 2t + 1 = (x-t)^2 - t^2 + 2t + 1 \text{ であるから頂点の座標は } (t, -t^2 + 2t + 1) //$$

$$(2) \text{ 方程式 } f(x) = 0 \text{ の解は, 放物線 } y = f(x) \text{ と } x \text{ 軸 } (y = 0) \text{ の交点の } x \text{ 座標であるから,}$$

方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもたないとき, 放物線 $y = f(x)$ と x 軸が共有点をもたないときである。

つまり, 頂点の y 座標は正である。

$$-t^2 + 2t + 1 > 0 \quad \therefore t^2 - 2t - 1 < 0 \quad (-t^2 + 2t + 1 = 0 \text{ の解は } t = 1 \pm \sqrt{2} \text{ であるから})$$

$$\text{よって, 実数 } t \text{ の値の範囲は } 1 - \sqrt{2} < t < 1 + \sqrt{2} //$$

【(2) の別解】方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると実数解をもたないので $D < 0$ であるから

$$\frac{D}{4} = (-t)^2 - 1 \cdot (2t + 1) < 0 \quad \therefore t^2 - 2t - 1 < 0 \quad \text{以下上記の解答と同じ}$$

3

$$(1) \triangle APQ \text{ において, } PQ^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 7$$

$$PQ > 0 \text{ であるから, } PQ = \sqrt{7} //$$

$$\triangle AQR \text{ において, } QR^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cos 60^\circ = 7$$

$$QR > 0 \text{ であるから, } QR = \sqrt{7} //$$

$$\triangle ARP \text{ において, } RP^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 60^\circ = 3$$

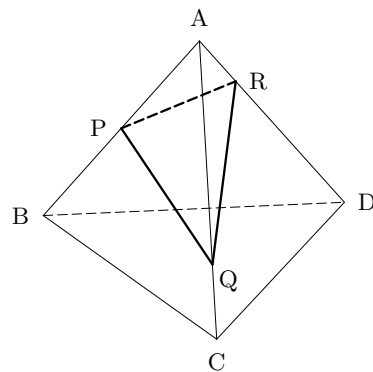
$$RP > 0 \text{ であるから, } RP = \sqrt{3} //$$

$$(2) \triangle PQR \text{ において, } \cos \theta = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{11}{14} //$$

$$(3) 0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ なので } \sin \theta > 0 \text{ であるから}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{14^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{よって, } \triangle PQR \text{ の面積は, } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{4} //$$



4

$$(1) \text{ 同じものを含む順列であるから } \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90 \text{ 個 } //$$

$$(2) 150000 \text{ から } 250000 \text{ までの整数は十万の位が } 2 \text{ で始まる整数である。}$$

$$2 \text{ 以外の } 5 \text{ 個の数字 } 1, 1, 2, 3, 3 \text{ を全部並べる同じものを含む順列であるから, } \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = 30 \text{ 個 } //$$

1 $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

2 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $A(0, 1)$ ， $B(6, 5)$ ， $C(-3, 8)$ を通るとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) この放物線の頂点の座標を求めよ。また，放物線と x 軸の交点の座標を求めよ。

3 三角形 ABC において， $AB=5$ ， $BC=6$ ， $CA=7$ であり， $\angle ABC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) 点 A から辺 BC に垂直に線を下ろして，その交点を H とするとき， $\triangle AHC$ の面積を求めよ。

4 A さん， B さん， C さん， D さん， E さん， F さんの 6 人を 3 つのグループに分ける。

ただし，一つのグループに必ず一人は入るとする。次の場合の数を求めよ。

(1) A さん， B さん， C さんを別々のグループに分ける分け方

(2) A さん， B さん， C さんが一つのグループにいる分け方

1

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} \text{ より, } x + \frac{1}{x} = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4 //$$

$$(2) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52 //$$

$$(3) x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14 \text{ であるから,}$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 52 \cdot 14 - 4 = 724 //$$

2

(1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 A(0, 1), B(6, 5), C(-3, 8) を通るから

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 5 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c \\ 8 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \end{cases} \quad \text{すなわち, } \begin{cases} c = 1 \\ 36a + 6b + c = 5 \\ 9a - 3b + c = 8 \end{cases} \quad c \text{ を消去して, } \begin{cases} 36a + 6a = 4 \\ 9a - 3b = 7 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと, $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = 1 //$

$$(2) y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \text{ を平方完成すると, } y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{1}{3} \text{ ゆえに求める頂点の座標は } \left(2, -\frac{1}{3}\right) \text{ である。} //$$

放物線 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$ と x 軸の交点の x 座標は $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0, \quad x = 1, 3$$

したがって, 求める x 軸との交点の座標は (1, 0) と (3, 0) である。 //

3

$$(1) \triangle ABC \text{ について余弦定理より } \cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5} //$$

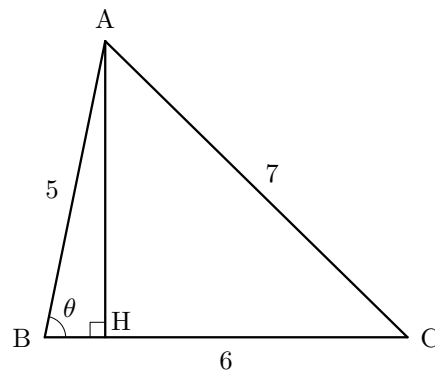
$$(2) 0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より, } \sin \theta > 0 \text{ だから, } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{求める面積は } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6} //$$

$$(3) \text{ 直角三角形 AHB について, } BH = AB \cos \theta = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

点 H は辺 BC を 1 : 5 に内分するので面積比についても

$$\triangle AHB : \triangle AHC = 1 : 5 \text{ となるから, } \triangle AHC = \frac{5}{6} \triangle ABC = \frac{5}{6} \cdot 6\sqrt{6} = 5\sqrt{6} //$$



4

(1) A さんのいるグループ, B さんのいるグループ, C さんのいるグループのそれぞれに残りの D さん E さん F さんは自由に入ることができる。D さんの入るグループが 3 通り, E さんの入るグループが 3 通り, F さんの入るグループが 3 通りであるから, 求める場合の数は, $3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りである。 //

(2) A さん B さん C さんの 3 人が入っているグループに追加できる人数は 1 人や 0 人である。これで場合分けをする。

(i) A さん B さん C さんのいるグループに 1 人追加する場合

追加する 1 人の選び方は 3 通りである。残りの 2 人は 1 人ずつで 2 グループになればよいから 1 通りである。

よって $3 \times 1 = 3$ 通り。

(ii) A さん B さん C さんのいるグループに 0 人追加する (追加しない) 場合

残りの 3 人を 2 つのグループに分ける分け方は ${}_3C_2 = 3$ 通りである。(← 3 人から 2 人を選ぶ)

以上より, (i)+(ii) = $3 + 3 = 6$ 通りである。 //

(2) は樹形図を書いた方が早いです。

1 $a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ のとき, 次の値を求めよ。

- (1) $a + b$
- (2) $a^2 + b^2$
- (3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

2 $AB = AC = 4, \angle BAC = 90^\circ$ の三角形において, 辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上に点 Q があり, $AP = AQ = x$ ($0 < x < 4$) とおく。また, 辺 BC の中点を M とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQM$ の面積 y を x を用いて表せ。
- (2) $0 < x < 4$ の範囲で (1) で求めた関数のグラフをかけ。また, $\triangle PQM$ の面積の最大値を求めよ。

3 四面体 $ABCD$ があり, $AB = AC = 1, AD = 2, \angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle BDC = \theta$ としたとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\triangle BDC$ の面積を求めよ。
- (3) A から $\triangle BDC$ に垂直に線を下ろして, その交点を H とするとき, AH の長さを求めよ。

4 さいころを 5 回振ったとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 奇数がちょうど 3 回出るときの確率を求めよ。
- (2) 奇数が 3 回以上出るときの確率を求めよ。

1

$$(1) a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$a + b = \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{5} //$$

$$(2) ab = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから, } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 //$$

$$(3) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 //$$

2

$$(1) AP = AQ = x \text{ なので } BP = CQ = 4 - x, \text{ また, } BM = CM = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8, \quad \triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2}$$

$$\triangle BPM = \triangle CQM = \frac{1}{2} \cdot (4 - x) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 4 - x$$

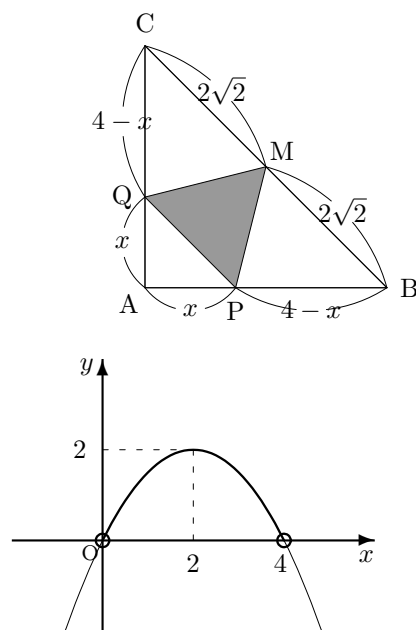
$$\triangle PQM = \triangle ABC - (\triangle APQ + \triangle BPM + \triangle CQM) \text{ であるから}$$

$$y = 8 - \left\{ \frac{x^2}{2} + (4 - x) + (4 - x) \right\}, \text{ すなわち } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x //$$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

よってグラフは右図のようになる。

グラフより $x = 2$ のときに最大値 2 をとる。 //



3

$$(1) \text{ 三平方の定理より } BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad CD = DB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$\triangle BCD$ において余弦定理を用いて

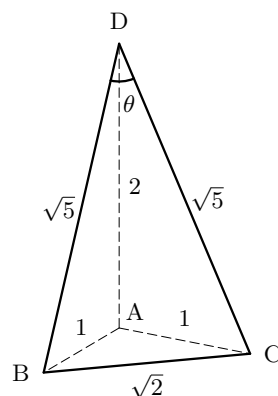
$$\cos \theta = \frac{CD^2 + DB^2 - BC^2}{2 \cdot CD \cdot DB} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} //$$

$$(2) 0 < \theta < 180^\circ \text{ より } \sin \theta > 0 \text{ なので } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{よって求める面積は } \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} //$$

$$(3) \triangle BCD \perp AH \text{ であるから 四面体 } ABCD \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH$$

$$\text{よって } \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot AH \quad \therefore AH = \frac{2}{3} //$$



4

$$(1) {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} //$$

$$(2) {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = (10 + 5 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} //$$

1 $x = \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x - \frac{1}{x}$

(2) $x^2 - \frac{1}{x^2}$

(3) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

2 1 辺が 1 の正方形 ABCD の辺上に $AP = BQ = CR = DS = x$ ($0 < x < 1$) である点 P, Q, R, S をおく。

(1) 四角形 PQRS の面積 y を x を用いて表せ。

(2) y のグラフを書き、その最小値を求めよ。

3 1 辺が 2 の正四面体 ABCD がある。AB の中点を M, CD の中点を N とする。次の問いに答えよ。

(1) $\angle ANB = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) $\triangle ANB$ の面積を求めよ。

(3) MN の長さを求めよ。

4 10 進法の 3 桁の数で、百の位の数字を a , 十の位の数字を b , 一の位の数字を c とするとき、次の場合の数を求めよ。

(1) $a < b < c$ となる 3 桁の数字はいくつあるか。

(2) $a \leq b \leq c$ となる 3 桁の数字はいくつあるか。

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x = \frac{3 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}, \quad \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2}$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2} = \sqrt{14} //$$

$$(2) \quad x + \frac{1}{x} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2} + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{2} \quad \therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = 6\sqrt{7} //$$

$$(3) \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

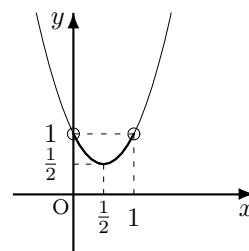
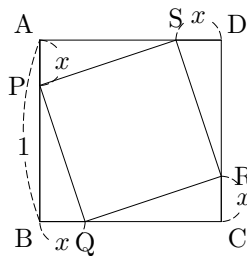
$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{14})^3 + 3 \cdot \sqrt{14} = 14\sqrt{14} + 3\sqrt{14} = 17\sqrt{14} //$$

2

$$(1) y = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1 - x) = 2x^2 - 2x + 1 //$$

$$(2) \ y = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad (0 < x < 1)$$

右図より最小値は $\frac{1}{2}$ $\left(x = \frac{1}{2} \text{ のとき} \right) //$



3

(1) $AN = BN = \sqrt{3}$ より $\triangle ANB$ に余弦定理を用いて

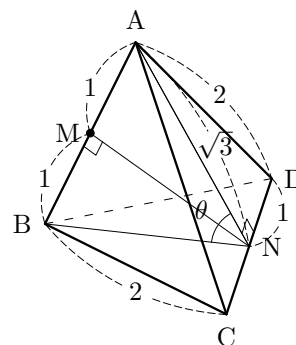
$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} //$$

(2) $\triangle ANB$ の面積を S とおくと, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ なので

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} //$$

(3) $\triangle ANB$ は二等辺三角形なので, $\angle AMN = 90^\circ$ より

$$\therefore MN = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} //$$



4

(1) a は 0 でない数なので, a, b, c は 1 から 9 までの 9 個の数字から 3 文字選べばよい.

選んだ3文字を順に $a < b < c$ とすればよいので，求める個数は ${}_9C_3 = 84$ 個 //

(2) $a = b = c$ となるのは 111 から 999 までの 9 個.

$a = b < c$ となるのは (112 ~ 119 までの 8 個) + (223 ~ 229 までの 7 個) + $\cdots$ + (889 の 1 個) の計 $8 + 7 + 6 + \cdots + 2 + 1 = 36$ 個.

$a < b = c$ となるのは同様に 36 個.

よって、 $a \leq b \leq c$ となるのは (1) の数を加えればよいので、 $84 + 9 + 36 + 36 = 165$ 個 //

(別解) ○を3個と|を8個並べて3桁の数表現できる。例えば、

| ○ | | ○ | | | ○ | | なら 247

○ | | | | | ○ | | | ○ なら 169

| | ○ | | | | ○ ○ | なら 388

この場合の数を数えればよいので、は $\frac{11!}{3! \cdot 8!} = 165$ 個 //

1 $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $a^2 + b^2$

(2) $a^3 + b^3$

(3) $a^5 + b^5$

2 2 次関数の問題 (不明)

3 三角形 ABC において, $AB = 2\sqrt{10}$, $BC = 5$, $CA = \sqrt{5}$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\angle BAC$ は何度か。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) 点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を D とするとき, AD の長さを求めよ。

4

(1) サイコロを 3 回投げて, 出た目の最大が 6 となる確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回投げて, 出た目の最大が 5 となる確率を求めよ。

$$\boxed{1} \quad a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$a + b = \sqrt{6}, \quad ab = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = \frac{6 - 2}{4} = 1$$

$$(1) \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 1 = 4 //$$

$$(2) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \sqrt{6} \cdot (4 - 1) = 3\sqrt{6} //$$

(別解)

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (\sqrt{6})^3 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6} //$$

$$(3) \quad a^5 + b^5 = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2) - a^3b^2 - a^2b^3 = 3\sqrt{6} \cdot 4 - a^2b^2(a + b) = 12\sqrt{6} - 1^2 \cdot \sqrt{6} = 11\sqrt{6} //$$

$\boxed{2}$ 2 次関数の問題 (不明)

$\boxed{3}$

(1) 余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{(2\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5})^2 - 5^2}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

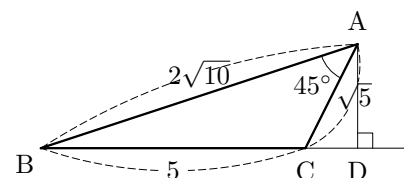
$$\therefore \angle BAC = 45^\circ //$$

(2) $\triangle ABC$ の面積を S とおく.

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5 //$$

(3) $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD$ より

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD \quad \therefore AD = 2 //$$



$\boxed{4}$

(1) サイコロを 3 回投げて, 出た目の最大が 6 となる確率は 1 から (1 から 5 しか出ない確率) を引けばよいので,

$$\therefore 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} //$$

(2) サイコロを 3 回投げて, 出た目の最大が 5 となる確率は

(1 から 5 しか出ない確率) から (1 から 4 しか出ない確率) を引けばよいので,

$$\therefore \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{61}{216} //$$

1 $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 y^2$

(2) $x^2 - y^2$

(3) $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$

2 $y = x^2 - 2ax + 2a$ について

(1) 最小値が -3 のときの a の値を求めよ。

(2) 定義域が $0 \leq x \leq 2$ のとき, 最大値を求めよ。

3 四角形 ABCD において, $AB = 5$, $BC = 8$, $AD = 4$, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 60^\circ$ のとき

(1) 対角線 AC の長さを求めよ。

(2) $\angle ACB = \theta$ としたとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ を求めよ。

(3) 辺 CD の長さを求めよ。

4 a, b, c, d, e の 5 人が A, B, C の 3 部屋に入るとき, 次の場合は何通りあるか。ただし, 空の部屋があってもよい。

(1) a と b が同じ部屋に入るとき。

(2) 1 部屋に 2 人以上入るとき。

$$\boxed{1} \quad x = \sqrt{3} - \sqrt{2}, y = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad x + y = 2\sqrt{3}, \quad x - y = -2\sqrt{2}, \quad xy = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

$$(1) \quad x^2 y^2 = (xy)^2 = 1 //$$

$$(2) \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = -2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = -4\sqrt{6} //$$

$$(3) \quad (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = x^2 - 6 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 6 = 5 - 2\sqrt{6} - 6 = -1 - 2\sqrt{6} //$$

$$\boxed{2} \quad y = x^2 - 2ax + 2a = (x - a)^2 - a^2 + 2a \quad \text{頂点 } (a, -a^2 + 2a)$$

(1) 下に凸なので、最小値は頂点の y 座標 . よって

$$-a^2 + 2a = -3 \quad \therefore a^2 - 2a - 3 = 0 \quad \therefore (a - 3)(a + 1) = 0 \quad \therefore a = 3, -1 //$$

(2)

(i) $a < 1$ のとき

$x = 2$ で最大となるので、最大値 $4 - 4a + 2a = -2a + 4$ ($x = 2$ のとき)

(ii) $a = 1$ のとき

$y = x^2 - 2x + 2$ より $x = 0, 2$ で最大となるので、最大値 2 ($x = 0, 2$ のとき)

(iii) $1 < a$ のとき

$x = 0$ で最大となるので、最大値 $2a$ ($x = 0$ のとき) //

$\boxed{3}$

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理を用いて

$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49 \quad AC > 0 \text{ より } \therefore AC = 7 //$$

(2) $\triangle ABC$ において正弦定理を用いて

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin \theta} \quad \therefore \sin \theta = \frac{5}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14} //$$

$\triangle ABC$ において余弦定理を用いて

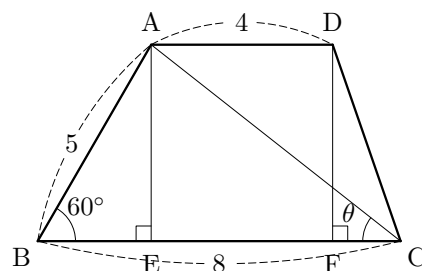
$$\therefore \cos \theta = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{11}{14} //$$

(3) A, D から辺 BC に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F とすると

$$DF = AE = 5 \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad BE = 5 \cos 60^\circ = \frac{5}{2} \quad EF = AD = 4 \text{ より}$$

$$\therefore CF = 8 - BE - EF = 8 - \frac{5}{2} - 4 = \frac{3}{2}$$

$$\triangle CDF \text{ において三平方の定理より } \therefore CD = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{21} //$$



$\boxed{4}$

(1) a と b が同じ部屋に入るのは、A, B, C の 3 通りある .

c, d, e の部屋の入り方はそれぞれ 3 通りずつあるので、 $3^3 = 27$ 通り . よって、 $3 \times 27 = 81$ 通り //

(2) 1 部屋に 2 人以上入るとき必ず 1 部屋は空になる .

(i) 2 部屋が空のとき、5 人全員が A, B, C のどれかの部屋に入るの、3 通り .

(ii) 1 部屋が空のとき

A に 3 人、B に 2 人、C が空のときは ${}_5C_3 = 10$ 通りで、A に 2 人、B に 3 人、C が空のときも ${}_5C_2 = 10$ 通り .

B が空、C が空のときも同じなので、1 部屋が空のときの場合の数は $(10 + 10) \times 3 = 60$ 通り .

よって、1 部屋に 2 人以上入るのは $\therefore 3 + 60 = 63$ 通り //

1 $x - 2y = 3$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $3x^2 - 12xy + 12y^2$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y + 2$

2 1 辺 2 の正方形 ABCD がある。辺 AB，BC 上にそれぞれ点 P，Q をとり， $AP = BQ = x$ ($0 < x < 2$) とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle PQD$ の面積 y を x で表せ。

(2) y の $0 < x < 2$ のグラフを書け。

(3) y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

3 1 辺 4 の正四面体 ABCD の辺 BC 上に $BP = 1$ になる点 P をとる。次の値を求めよ。

(1) AP の長さ。

(2) $\angle APD = \theta$ のとき， $\cos \theta$ の値。

(3) $\triangle APD$ の面積。

4 袋に赤，白，青の玉がそれぞれ 2 個ずつ入っている。次の確率を求めよ。

(1) 袋に入っている玉を同時に 2 個取り出すとき，玉の色が異なる確率。

(2) 袋に入っている玉を同時に 3 個取り出すとき，3 つの玉の色が全て異なる確率。

1 $x - 2y = 3$

(1) $3x^2 - 12xy + 12y^2 = 3(x^2 - 4xy + 4y^2) = 3(x - 2y)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27 //$

(2) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y + 2 = (x - 2y)^2 + 3(x - 2y) + 2 = 3^2 + 3 \cdot 3 + 2 = 20 //$

2

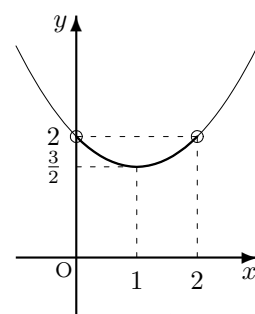
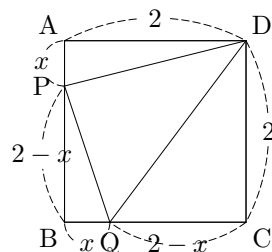
(1) $\triangle PQD = \square ABCD - \triangle DAP - \triangle PBQ - \triangle QCD$

$$\therefore y = 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2 - x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 //$$

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{3}{2} \quad (0 < x < 2)$

グラフは右図のようになる //

(3) 右図より最小値は $x = 1$ のとき $\frac{3}{2} //$



3

(1) $\triangle ABP$ において余弦定理を用いて

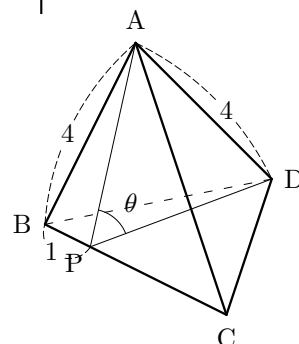
$$AP^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 13 \quad AP > 0 \text{ より } \therefore AP = \sqrt{13} //$$

(2) $AP = DP = \sqrt{13}$. $\triangle APD$ において余弦定理を用いて

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{5}{13} //$$

(3) $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{12}{13}$ なので

$$\triangle APD \text{ の面積は } \therefore \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{12}{13} = 6 //$$



4 袋に赤, 白, 青の玉がそれぞれ 2 個の計 6 個.

(1) 袋に入っている玉を同時に 2 個取り出すときの全事象は ${}_6C_2 = 3 \cdot 5 = 15$.

玉の色が異なるのは (赤 1 個, 白 1 個) または (白 1 個, 青 1 個) または (赤 1 個, 青 1 個) であり, これは互いに排斥であるので, 求める確率は

$$\therefore \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{2 \cdot 2 \times 3}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} //$$

(別解)

玉の色が同じとなるのは (2 個とも赤) または (2 個とも白) または (2 個とも青) なので, 求める確率は

$$\therefore 1 - \frac{{}_2C_2 \times 3}{{}_6C_2} = 1 - \frac{3}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} //$$

(2) 袋に入っている玉を同時に 3 個取り出すときの全事象は ${}_6C_3 = 5 \cdot 4 = 20$.

3 つの玉の色が全て異なるのは, 赤 1 個, 白 1 個, 青 1 個が出ればよいので, 求める確率は

$$\therefore \frac{{}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4} = \frac{2}{5} //$$

1 $x = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}$, $y = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x + y$

(2) $x - y$

(3) $x^3 - y^3$

2 $y = x^2 - 2ax + 2a + 6$ で, 最小値が -2 のとき, 次の問いに答えよ。ただし, a は負の定数とする。

(1) a を求めよ。

(2) この 2 次関数の頂点の座標を求め, グラフを書け。

3 1 辺が 1 の正四面体 ABCD において, BD の中点を M, CD の中点を N とする。

(1) $\triangle AMN$ の辺の長さをそれぞれ求めよ。

(2) $\triangle AMN$ において $\angle MAN$ を θ としたとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) $\triangle AMN$ の面積 S を求めよ。

4 2 つのサイコロを投げるとき, 次の確率をそれぞれ求めよ。

(1) 2 つのサイコロの目の積が偶数になる確率。

(2) 2 つのサイコロの目の和が奇数で, 積が偶数になる確率。

$$\boxed{1} \quad x = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$(1) \quad x+y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = 1 //$$

$$(2) \quad x-y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} //$$

$$(3) \quad xy = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\therefore x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = \sqrt{3} \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} //$$

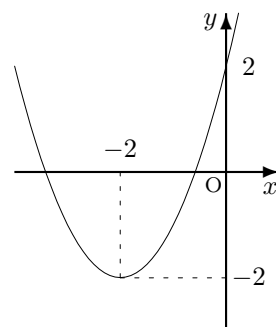
$$\boxed{2} \quad y = x^2 - 2ax + 2a + 6 = (x-a)^2 - a^2 + 2a + 6 \quad \text{頂点 } (a, -a^2 + 2a + 6)$$

(1) この関数は下の凸のグラフなので，最小値は頂点の y 座標である．よって

$$\therefore -a^2 + 2a + 6 = -2 \quad \therefore a^2 - 2a - 8 = 0 \quad \therefore (a-4)(a+2) = 0 \quad a < 0 \text{ より } \therefore a = -2 //$$

(2) この 2 次関数の頂点の座標は $\therefore (-2, -2) //$

グラフは右図のとおり



$\boxed{3}$

(1) $\triangle AMD$, $\triangle AND$ は $\angle D = 60^\circ$ の直角三角形なので

$$\therefore AM = AN = \frac{\sqrt{3}}{2} //$$

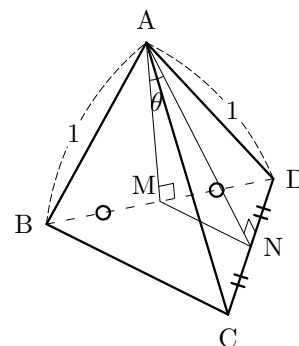
また， $\triangle DMN$ は正三角形なので， $\therefore MN = \frac{1}{2} //$

(2) $\triangle AMN$ において余弦定理より

$$\therefore \cos \theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6} //$$

$$(3) \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \theta = \frac{\sqrt{11}}{16} //$$



$\boxed{4}$

(1) 2 つのサイコロの目の積が奇数になるのは，奇数 $\times$ 奇数しかないので， $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

よって，目の積が偶数になる確率は $\therefore 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} //$

(2) 2 つのサイコロの目の和が奇数で，積が偶数になるのは，1 つが奇数でもう 1 つが偶数のときなので，求める確率は

$$\therefore \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \times 2 = \frac{1}{2} //$$

1 次の式の値を簡単にせよ。

(1) $1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

(2) $1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

(3) $\left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^2 - 4$

2 $y = 3x^2 - 2x$ について次の問いに答えよ。

(1) この 2 次関数のグラフを書け。

(2) $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値を求めよ。

3 円に内接する四角形 ABCD がある。AB = 3, BC = 5, CD = 2, $\angle ABC = 60^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1) AC の長さを求めよ。

(2) $\angle D$ を求めよ。

(3) AD を求めよ。

4 男子 6 人, 女子 6 人の計 12 人がいる。

(1) 男子 3 人, 女子 3 人の組を 2 組作る分け方は何通りあるか。

(2) 女子 2 人, 男子 4 人と男子 2 人, 女子 4 人の 2 組作る分け方は何通りあるか。

1

$$(1) 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} //$$

$$(2) 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} //$$

$$(3) \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)^2 - 4 = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 = 4 - 2\sqrt{3} - 4 = -2\sqrt{3} //$$

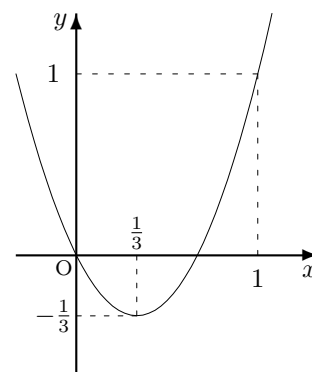
$$2 \quad y = 3x^2 - 2x$$

$$(1) y = 3 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{1}{3}$$

この 2 次関数のグラフは右図のとおり //

(2) $0 \leq x \leq 1$ における最大値と最小値は右図より

$$\begin{cases} \text{最大値 } 1 & (x = 1 \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{3} & \left(x = \frac{1}{3} \text{ のとき} \right) // \end{cases}$$



3

(1) $\triangle ABC$ において余弦定理を用いて

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 19 \quad \therefore AC = \sqrt{19} //$$

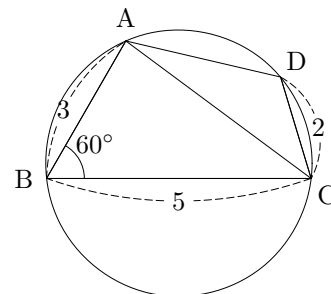
(2) 円に内接する四角形なので, $\therefore \angle D = 120^\circ //$

(3) $AD = x$ とおくと, $\triangle ADC$ において余弦定理を用いて

$$\sqrt{19}^2 = x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$$

$$\therefore 19 = x^2 + 4 + 2x$$

$$\therefore x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \therefore (x + 5)(x - 3) = 0 \quad x > 0 \text{ より } \therefore x = 3 //$$



4 男子 6 人, 女子 6 人の計 12 人がいる。

(1) 男子 3 人, 女子 3 人の組を 2 組作るとその 2 組は区別がつかないので,

$$\therefore \frac{{}_6C_3 \times {}_6C_3}{2!} = 200 \text{ 通り} //$$

(2) 女子 2 人, 男子 4 人と男子 2 人, 女子 4 人の 2 組作るとその 2 組は区別がつくので

$$\therefore {}_6C_2 \times {}_6C_4 = 225 \text{ 通り} //$$

1 $a = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ のとき，式の値を求めよ。

(1) $a + \frac{1}{a}$

(2) $a^2 + \frac{1}{a^2}$

(3) $a^3 + \frac{1}{a^3}$

2

(1) $y = -x^2 + 2ax + 1 - a^2$ の頂点の座標を求めよ。

(2) $y = -x^2 + 2ax + 1 - a^2$ の x 軸との共有点の座標を求めよ。

(3) $y = -x^2 + 2ax + 1 - a^2$ が異符号の 2 つの解を持つ場合の a の値の範囲を求めよ。

3 三角形 ABC で， $AB = 3$ ， $BC = 7$ ， $CA = 5$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos B$ ， $\sin B$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) C から辺 AB に下ろした垂線の足を H とするとき，CH の長さを求めよ。

4

(1) 大小 2 つのサイコロを投げたとき，出た目の和が偶数になるのは何通りあるか。

(2) 大中小 3 つのサイコロを投げたとき，出た目の積が偶数になるのは何通りあるか。

$$\boxed{1} \quad a = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = 5 - 2\sqrt{6}, \quad \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} = (5 - 2\sqrt{6}) + (5 + 2\sqrt{6}) = 10 //$$

$$(2) \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 10^2 - 2 = 98 //$$

$$(3) \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right) = 10 \cdot (98 - 1) = 970 //$$

$\boxed{2}$

$$(1) \quad y = -x^2 + 2ax + 1 - a^2 = -(x - a)^2 + 1 \quad \therefore \text{頂点の座標は } (a, 1) //$$

$$(2) \quad -x^2 + 2ax + 1 - a^2 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \quad \therefore x^2 - 2ax + (a - 1)(a + 1) = 0$$

$$\therefore \{x - (a - 1)\}\{x - (a + 1)\} = 0$$

$$\text{よって, } x \text{ 軸との共有点の座標は } \therefore x = a - 1, a + 1 //$$

$$(3) \quad (2) \text{ より異符号の 2 つの解を持つ場合は, } a - 1 < 0 \text{ かつ } 0 < a + 1 \text{ であればよいので, } \therefore -1 < a < 1 //$$

$$\boxed{3} \quad AB = 3, BC = 7, CA = 5$$

$$(1) \quad \text{余弦定理より } \therefore \cos B = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14} //$$

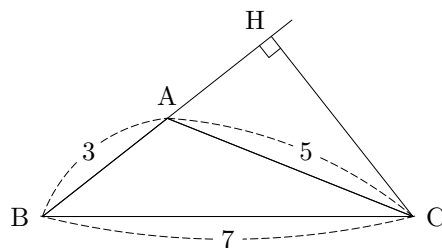
$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{3}}{14} //$$

$$(2) \quad \triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とおくと}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4} //$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \text{ なので,}$$

$$\therefore \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CH \quad \therefore CH = \frac{5\sqrt{3}}{2} //$$



$\boxed{4}$

$$(1) \quad \text{大小 2 つのサイコロを投げたとき, 出た目の和が偶数になるのは,}$$

$$(大, 小) = (奇数, 奇数) \text{ または } (偶数, 偶数) \text{ となるときなので}$$

$$\therefore 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18 \text{ 通り} //$$

$$(2) \quad \text{大中小 3 つのサイコロを投げたときの全事象は } 6^3 = 216 \text{ 通り.}$$

$$\text{出た目の積が奇数になるのは } (大, 中, 小) = (奇数, 奇数, 奇数) \text{ のときなので}$$

$$\therefore 216 - 3 \times 3 \times 3 = 189 \text{ 通り} //$$