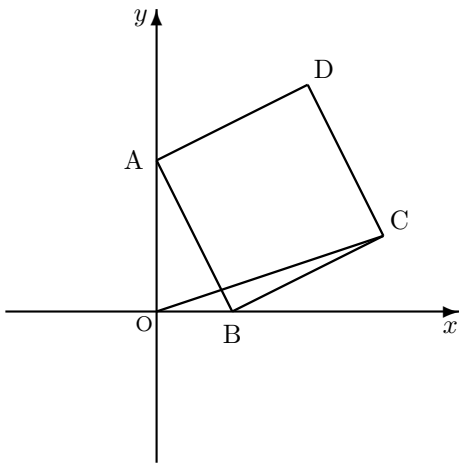
20 年前の模試に出た問題

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数学 IAIIB のどこかの分野です。

下の図のように，一辺の長さが 2 の正方形 ABCD が点 A が y 軸の正の部分、点 B が x 軸の正の部分をそれぞれ動く。原点を O とするとき，OC の長さの最大値を求めよ。

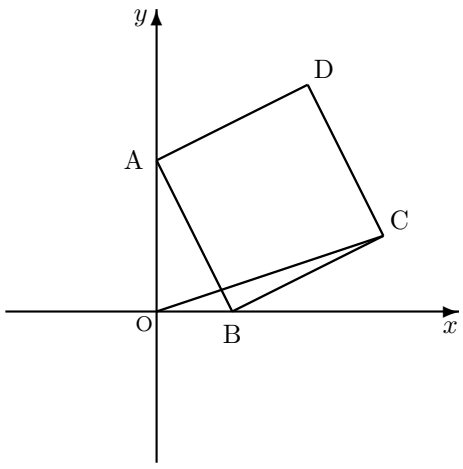


20 年前の模試に出た問題

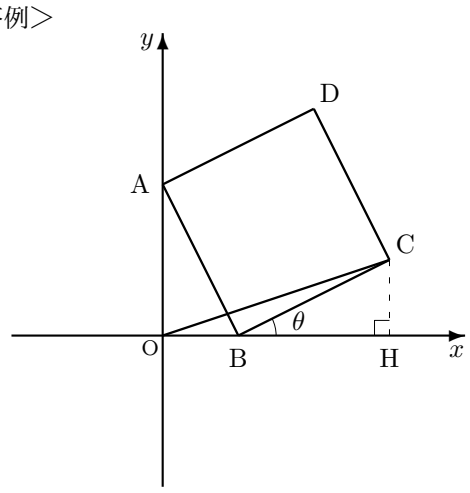
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数学 IAIIB のどこかの分野です。

下の図のように，一辺の長さが 2 の正方形 ABCD が点 A が y 軸の正の部分、点 B が x 軸の正の部分をそれぞれ動く。原点を O とするとき，OC の長さの最大値を求めよ。



＜解答例＞



図のように C から x 軸上に垂線を下ろし，交点を H とおく。

$\angle\mathrm{CBH}=\theta$ とおくと

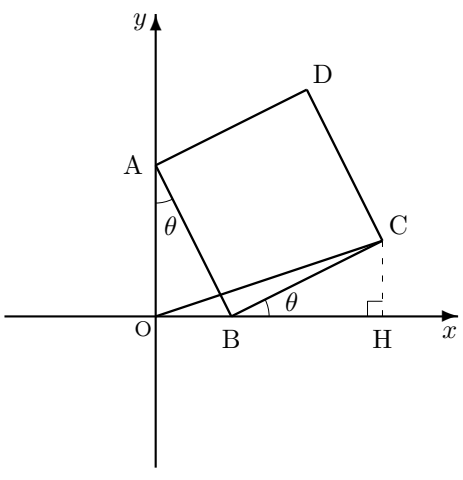
$\angle\mathrm{OBA}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{CBH}$

$=180^\circ-90^\circ-\theta$

$=90^\circ-\theta$　なので

$\angle\mathrm{BAO}+\angle\mathrm{OBA}=90^\circ$ より，

$\angle\mathrm{BAO}+(90^\circ-\theta)=90^\circ$ だから，$\angle\mathrm{BAO}=\theta$



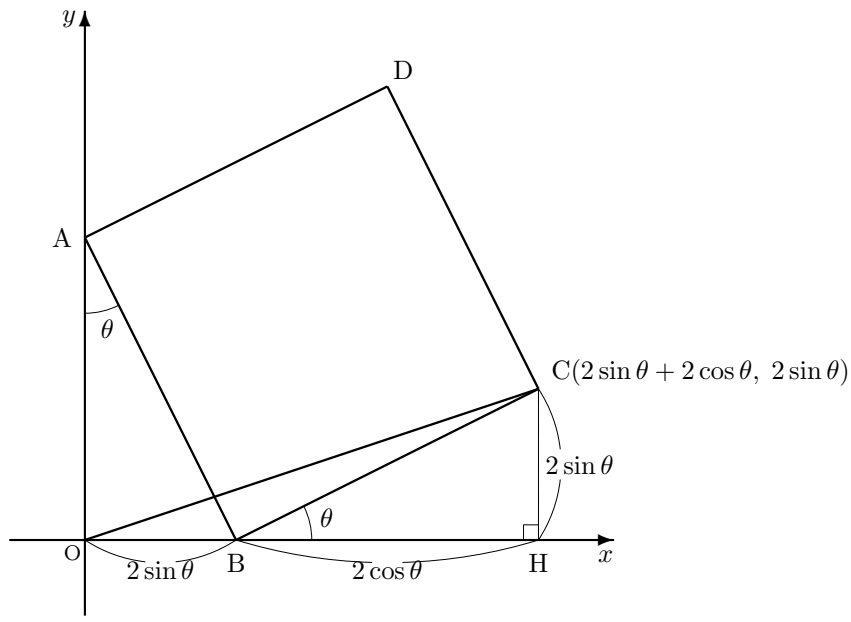
よって，OB=ABsin $\theta=2\sin\theta$

BH=BCcos $\theta=2\cos\theta$ だから

OH=OB+BH= $2\sin\theta+2\cos\theta$

また，CH=BCsin $\theta=2\sin\theta$ となるので

点 C の座標は，$\mathrm{C}(2\sin\theta+2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ である。



OC の長さを計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{OC}&=\sqrt{(2\sin\theta+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}\\&=\sqrt{4\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\\&=\sqrt{8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}\end{aligned}$$

$\sqrt{\ }$ の中身を $y=8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta\cdots\cdots$ ① とおく。

2 倍角の公式を以下のように変形させる。

$$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1 \iff \cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta \iff \sin\theta\cos\theta=\frac{\sin2\theta}{2}$$

これを ① の式に代入すると，

$$\begin{aligned}y&=8\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+8\cdot\frac{\sin2\theta}{2}+4\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}\\&=4(1-\cos2\theta)+4\sin2\theta+2(1+\cos2\theta)\\&=4-4\cos2\theta+4\sin2\theta+2+2\cos2\theta\\&=4\sin2\theta-2\cos2\theta+6\\&=\sqrt{4^2+(-2)^2}\sin(2\theta+\alpha)+6\\&=2\sqrt5\sin(2\theta+\alpha)+6\cdots\cdots②\end{aligned}$$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{-2}{2\sqrt5}=-\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt5}=\dfrac{2}{\sqrt5}$　を満たす角。

② で $0<\theta<90^\circ$ より，

$0<2\theta<180^\circ \iff \alpha<2\theta+\alpha<180^\circ+\alpha$ であるから

$\sin(2\theta+\alpha)$ の値は $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 1 をとる。

よって y の最大値は $2\sqrt5+6$ となる。

$$\begin{aligned}\text{OC の最大値は }\sqrt{2\sqrt5+6}&=\sqrt{6+2\sqrt5}\\&=\sqrt{5+1+2\sqrt{5\cdot1}}\\&=\sqrt5+\sqrt1\\&=\sqrt5+1\end{aligned}$$

また，$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ を解くと，$\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$

以上より，OC は $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt5+1$ をとる。 //