

＜ 楕円の方程式を導く ＞

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ を焦点とし, この 2 点からの距離の和が $2a$ である軌跡 (楕円の方程式) を求める。
ただし, $FF' < 2a$ であることが必要なので $a > c > 0$ とする。

この楕円上の点を $P(x, y)$ とすると,

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ である。}$$

P が楕円上にあるのは $PF + PF' = 2a$ のときであるから

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 &= (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ -2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\ a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx\end{aligned}$$

両辺を 2 乗すると

$$\begin{aligned}a^2\{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\}^2 &= (a^2 + cx)^2 \\ a^2\{(x+c)^2 + y^2\} &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2\{x^2 + 2cx + c^2 + y^2\} &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)\end{aligned}$$

点 P の位置が y 軸上にあるときの図を考えると短軸の長さ $2b$ とすれば

$b^2 + c^2 = a^2$ が成り立つ。すなわち $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ これを代入すると

$$\begin{aligned}\therefore b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \text{すなわち } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\end{aligned}$$

逆に, この楕円上のすべての点 $P(x, y)$ は, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ のとき, 条件 $PF + PF' = 2a$ を満たす。

したがって, 求める軌跡は, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ である。 //

$b^2 + c^2 = a^2$ が成り立つから $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$

このことから楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の焦点 F, F' の座標は次のようになる。

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

＜双曲線の漸近線について＞

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ の漸近線は $y = \pm \frac{b}{a}x$

ただし, $a > 0, b > 0$

大雑把な考え方で x と y が十分に大きい部分で議論すると

x と y は 1 や -1 よりもはるかに大きいので,

右辺の 1 や -1 を無視して考えることができます。

すると双曲線の方程式は x と y が十分に大きい部分で $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ と近似できます。

これを变形すると $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, つまり $y = \pm \frac{b}{a}x$ となります。

これが漸近線の方程式です。以下の証明で確認してみましょう。

＜ $x \rightarrow \infty$ での漸近線＞

$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - g(x)| = 0$ が成立するとき, $f(x)$ は $g(x)$ に漸近するという。

特に $g(x)$ が一次関数のとき, $g(x)$ を $f(x)$ の漸近線という。

(proof)

双曲線の漸近線公式を証明します。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を変形する。

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

よって双曲線の上側の式は $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ である。

これが $x \rightarrow \infty$ で $y = \frac{b}{a}x$ に近づくことを証明する。

つまり, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x \right| = 0$ を言えばよい。

分子を有理化することによって証明できる。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| b \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a} \right) \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{b \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{a} \right) \left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a} \right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| b \frac{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) - \left(\frac{x}{a} \right)^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{-b}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a}} \right| = 0 = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

よって $y = \frac{b}{a}x$ は漸近線である。また, 対称性により $y = -\frac{b}{a}x$ も漸近線となる。

(q.e.d)

「アポロニウスの円」を使わない解き方

数学 II の教科書 p.94 例題 10

原点 O からの距離と点 A(3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

< 解答例 >

点 P の座標を (x, y) とする。

P に関する条件は

$$OP:AP=2:1$$

$$\text{これより } 2AP=OP$$

$$\text{すなわち } 4AP^2=OP^2$$

$$AP^2 = (x-3)^2 + y^2, OP^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{代入すると } 4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$$

$$4(x^2 - 6x + 9 + y^2) = x^2 + y^2$$

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 = x^2 + y^2$$

$$3x^2 - 24x + 36 + 3y^2 = 0$$

$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 36 = 0$$

$$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

よって、点 P は円 $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 P は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、点 (4, 0) を中心とする半径 2 の円である。 //

数学 III の教科書 p.24 練習 24

方程式 $2|z-3|=|z|$ が満たす点 z 全体は、どのような図形か。

< 解答例 >

$$\text{方程式の両辺を 2 乗すると } 4|z-3|^2 = |z|^2$$

$$\text{よって } 4(z-3)(\overline{z-3}) = z\overline{z}$$

$$4(z-3)(\overline{z-3}) = z\overline{z}$$

$$4z\overline{z} - 12z - 12\overline{z} + 36 = z\overline{z}$$

$$3z\overline{z} - 12z - 12\overline{z} + 36 = 0$$

$$z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 12 = 0$$

$$z\overline{z} - 4\overline{z} - 4z + 12 = 0$$

$$\overline{z}(z-4) - 4z + 16 - 16 + 12 = 0$$

$$\overline{z}(z-4) - 4(z-4) = 4$$

$$(z-4)(\overline{z}-4) = 4$$

$$(z-4)(\overline{z-4}) = 4$$

$$|z-4|^2 = 2^2$$

$$\therefore |z-4| = 2$$

これは点 4 を中心とする半径 2 の円である。 //

「アポロニウスの円」を使う解き方

数学 II の教科書 p.94 例題 10

原点 O からの距離と点 A(3, 0) からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡を求めよ。

< 解答例 >

点 P の座標を (x, y) とする。

P に関する条件は

$$OP:AP=2:1$$

$$\text{これより } 2AP=OP$$

$$\text{すなわち } 4AP^2=OP^2$$

$$AP^2 = (x-3)^2 + y^2, OP^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{代入すると } 4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$$

$$\text{これを整理して } (x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

よって、点 P は円 $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点 P は、条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、点 (4, 0) を中心とする半径 2 の円である。 //

数学 III の教科書 p.24 練習 24

方程式 $2|z-3|=|z|$ が満たす点 z 全体は、どのような図形か。

< 解答例 >

$$\text{方程式の両辺を 2 乗すると } 4|z-3|^2 = |z|^2$$

$$\text{よって } 4(z-3)(\overline{z-3}) = z\overline{z}$$

$$\text{これを整理して } |z-4|^2 = 2^2$$

$$\therefore |z-4| = 2$$

これは点 4 を中心とする半径 2 の円である。 //

さて、何をやっているのでしょうか？