数学B　数列　　漸化式の基礎トレーニング

____組____番　氏名____________________

＜例題＞　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(準備)　$a_{n+1}=pa_n+q$ タイプのの漸化式は，公比が p と考えて，
$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$ の形に変形したい。
そこで，与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n-2$ で
$a_{n+1}=a_n=c$ とすると，　$c=3c-2$ （特性方程式）
これを解くと，$c=1$ だから，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$ となる。

(解答例)
漸化式は，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　と変形できる。
ゆえに数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=2-1=1$
公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-1=1\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=3^{n-1}+1 \quad /\!/$$

$\boxed{1}$　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3$，$a_{n+1}=4a_n-3$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+4$

(3)　$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-4$

(4)　$a_1=4$，$a_{n+1}=-2a_n+1$

＜例題＞　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(準備)　$a_{n+1}-a_n=2n$ なので，$\{a_n\}$ の階差数列は $2n$

(解答例)

$n\geqq 2$ のとき $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+2\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$\begin{aligned}&=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\\&=1+(n-1)n\\&=n^2-n+1\end{aligned}$$

$a_n=n^2-n+1$ に $n=1$ を代入すると
$a_n=1^2-1+1=1$ で $n=1$ のときも成り立つ。
以上より求める一般項は $a_n=n^2-n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $/\!/$

$\boxed{2}$　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+8n$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4n-2$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+3n-1$

(4)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+4^n$

数学B　数列　　漸化式の基礎トレーニング　解答例

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=4a_n-3$

―解答例―

漸化式は，$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$ 　と変形できる。
ゆえに数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=3-1=2$
公比 4 の等比数列であるから

$$a_n-1=2\cdot 4^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=2\cdot 4^{n-1}+1 \quad /\!/$$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+4$

―解答例―

漸化式は，$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$ 　と変形できる。
ゆえに数列 $\{a_n+2\}$ は初項 $a_1+2=2+2=4$
公比 3 の等比数列であるから

$$a_n+2=4\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=4\cdot 3^{n-1}-2 \quad /\!/$$

(3) $a_1=5,\ a_{n+1}=3a_n-4$

―解答例―

漸化式は，$a_{n+1}-2=3(a_n-2)$ 　と変形できる。
ゆえに数列 $\{a_n-2\}$ は初項 $a_1-2=5-2=3$
公比 3 の等比数列であるから

$$a_n-2=3\cdot 3^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=3^n+2 \quad /\!/$$

(4) $a_1=4,\ a_{n+1}=-2a_n+1$

―解答例―

漸化式は，$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$ 　と変形できる。
ゆえに数列 $\{a_n-\dfrac{1}{3}\}$ は初項 $a_1-\dfrac{1}{3}=4-\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{3}$
公比 -2 の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\cdot(-2)^{n-1}$$
$$\therefore\ a_n=\frac{11}{3}\cdot(-2)^{n-1}+\frac{1}{3} \quad /\!/$$

$\boxed{2}$ を解く際に以下の知識が必要となります。覚えていますか？

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ 　　② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=cn$ 　(ただし，c は定数)　　ここまでは公式です。

※階差数列は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$ に変えてある計算なので注意してください。

① は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}=\frac{1}{2}(n-1)n$

② は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$

③ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}c=c(n-1)$ 　(ただし，c は定数)

結果を覚える必要はありません。
n を $n-1$ に変えて計算できるようにしてください。

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+8n$

―解答例―

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}8k=4+8\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=4+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$
$$=4+4(n-1)n$$
$$=4(n^2-n+1)$$

$a_n=4(n^2-n+1)$ に $n=1$ を代入すると
$a_n=4(1^2-1+1)=4$ で $n=1$ のときも成り立つ。
以上より求める一般項は $a_n=4(n^2-n+1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $/\!/$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4n-2$

―解答例―

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)=2+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}2$

$$=2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-2(n-1)$$
$$=2+2(n-1)n-2(n-1)$$
$$=2n^2-4n+4$$

$a_n=2n^2-4n+4$ に $n=1$ を代入すると
$a_n=2\cdot 1^2-4\cdot 1+4=2$ で $n=1$ のときも成り立つ。
以上より求める一般項は $a_n=2n^2-4n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $/\!/$

(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+3n-1$

―解答例―

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-(n-1)$$
$$=1+\frac{3}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=\frac{1}{2}(3n^2-5n+4)$$

$a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-5n+4)$ に $n=1$ を代入すると
$a_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 1^2-5\cdot 1+4)=1$ で $n=1$ のときも成り立つ。
以上より求める一般項は $a_n=\dfrac{1}{2}(3n^2-5n+4)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $/\!/$

(4) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+4^n$

―解答例―

$n\geqq 2$ のとき $\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=2+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot 4^{k-1}$ 　← ar^{n-1} の形

$$=2+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} \quad \text{←初項 4 公比 4 項数 } n-1$$
$$=\frac{4^n+2}{3} \quad \text{等比数列の和の公式}$$

$a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$ に $n=1$ を代入すると
$a_n=\dfrac{4^1+2}{3}=2$ で $n=1$ のときも成り立つ。
以上より求める一般項は $a_n=\dfrac{4^n+2}{3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $/\!/$