

ベーシックスタイル数学演習 IAIIB240

座標空間において，3点 $A(0, -1, 2)$ ， $B(-1, 0, 5)$ ， $C(1, 1, 3)$ の定める平面を α とし，原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たす s, t を求めよ。

(3) 点 H の座標を求めよ。

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

ベーシックスタイル数学演習ⅠAⅡB240

座標空間において、3点A(0, −1, 2), B(−1, 0, 5), C(1, 1, 3)の定める平面をαとし、
原点Oから平面αに垂線OHを下ろす。
(1) △ABCの面積を求めよ。
(2) $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たすs, tを求めよ。
(3) 点Hの座標を求めよ。
(4) 四面体OABCの体積を求めよ。

— 解答例 —

- (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4$
 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{11 \cdot 6 - 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2} //$
- (2) 省略
- (3) 直線ABの方程式は点A(0, −1, 2)を通り、 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 3)$ を方向ベクトルとするから
媒介変数をtとすると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ すなわち、 $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ となる。
 $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1}$ より、 $x+y+1=0$ であり、同様に $\frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ より、 $3y-z+5=0$ なので
直線ABを含む平面の方程式はkを実数とすると
$$x+y+1+k(3y-z+5)=0\cdots\cdots\textcircled{1}$$
 ← 直線ABの平面束(へいめんそく)
とおける。
①がC(1, 1, 3)を通るので代入して、
$$1+1+1+k(3\cdot 1-3+5)=0$$
$$\therefore k=-\frac{3}{5}$$

このkを①に代入して
$$x+y+1-\frac{3}{5}(3y-z+5)=0$$
$$5x+5y+5-9y+3z-15=0$$
$$5x-4y+3z-10=0\cdots\cdots\textcircled{2}$$

②が平面αの方程式である。

— 解答例 —

- 平面αの法線ベクトルは(5, −4, 3)であるから
直線OHの方程式はO(0, 0, 0)を通り(5, −4, 3)が方向ベクトルであるから
媒介変数をsとすると $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5s \\ -4s \\ 3s \end{pmatrix} \cdots\cdots\textcircled{3}$
平面αと直線OHの交点は③を②に代入して
$$5\cdot 5s-4\cdot (-4s)+3\cdot 3s-10=0$$
$$50s=10$$
$$\therefore s=\frac{1}{5}$$

この $s=\frac{1}{5}$ を③に代入して
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot \frac{1}{5} \\ -4\cdot \frac{1}{5} \\ 3\cdot \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

以上より求めるHの座標は $\left(1, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) //$
< 平面αの方程式を求めるもっと酷い裏技(外積) 高校生使用不可 >
 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の両方に垂直なベクトルは
$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1-3\cdot 2 \\ 3\cdot 1-(-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2-1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の両方に垂直なベクトルは $\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$
であるから、平面αは $-5(x-0)+4(y+1)-3(z-2)=0$
すなわち、
$$5x-4y+3z-10=0\cdots\cdots\textcircled{2}$$
- (3) $OH = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$
四面体OABCの体積 $= \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{5}{3} //$$