

円外の点から引いた接線

円 $x^2 + y^2 = 13$ に , 点 A(1, 5) から引いた接線の方程式を求めよ。

解答は裏面にあります。

ベーシックスタイル数学演習 I・II・A・B 74 ページ

[Style49] 点 (2, 1) を通り ,円 $x^2 + y^2 = 1$ に接する直線の方程式を求めよ。

問題集で解答を確認してください。

解答例

円外の点から引いた接線
円 $x^2 + y^2 = 13$ に、点 A(1, 5) から引いた接線の方程式を求めよ。

< 解答その1 接点の座標を P(a, b) とおく求め方 >

接点の座標を P(a, b) とおく、点 P は円 $x^2 + y^2 = 13$ 上の点なので $a^2 + b^2 = 13$ …①

また接線は $ax + by = 13$ …②

とおける。② は点 A(1, 5) を通るので $a \cdot 1 + b \cdot 5 = 13$ すなわち、 $a + 5b = 13$ …③

① と ③ を連立方程式として解く。

③ より、 $a = -5b + 13$ として a を消去すると

$$\begin{aligned} (-5b + 13)^2 + b^2 &= 13 && \text{この式を展開して整理して} \\ b^2 - 5b + 6 &= 0 \\ (b - 2)(b - 3) &= 0 \\ \therefore b &= 2, 3 \end{aligned}$$

$b = 2$ のとき $a = -5 \cdot 2 + 13 = 3$ 、 $b = 3$ のとき $a = -5 \cdot 3 + 13 = -2$ 、

よって、 $(a, b) = (3, 2)$ を ② に代入して $3x + 2y = 13$

$$(a, b) = (-2, 3) \text{ を ② に代入して } -2x + 3y = 13$$

以上より、求める接線の方程式は、 $3x + 2y - 13 = 0$ 、 $2x - 3y + 13 = 0$ //

コメント …… 解きやすくて接点の座標もわかるという便利な解答。素晴らしいと思うけど、
円の中心が原点でなかったら ② の式はどうするの？

< 解答その2 「点と直線の距離 = 円の半径」を使う求め方 >

(1, 5) を通り、傾き m の直線の方程式は $y - 5 = m(x - 1)$ とおける。

すなわち、 $mx - y - m + 5 = 0$ …①

円の中心 (0, 0) と直線 ① の距離が $\sqrt{13}$ だから、

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 - m + 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13} \iff |-m + 5| = \sqrt{13(m^2 + 1)}$$

両辺を2乗して、整理すると、

$$6m^2 + 5m - 6 = 0 \iff (3m - 2)(2m + 3) = 0 \iff m = \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$$

$m = \frac{2}{3}$ のとき、① に代入して、 $\frac{2}{3}x - y - \frac{2}{3} + 5 = 0 \iff 2x - 3y + 13 = 0$

$m = -\frac{3}{2}$ のとき、① に代入して、 $-\frac{3}{2}x - y + \frac{3}{2} + 5 \iff 3x + 2y - 13 = 0$

以上より、求める接線の方程式は、 $3x + 2y - 13 = 0$ 、 $2x - 3y + 13 = 0$ //

コメント …… 思いつきにくいけど計算量は一番少ないはず。

< 解答その3 判別式 $D = 0$ を使う求め方 >

(1, 5) を通り、傾き m の直線の方程式は $y - 5 = m(x - 1)$ とおける。

すなわち、 $y = mx - m + 5$ …①

円 $x^2 + y^2 = 13$ に代入して y を消去すると

$$x^2 + (mx - m + 5)^2 = 13$$

展開して整理する

$$\begin{aligned} x^2 + m^2x^2 + m^2 + 25 - 2m^2x - 10m + 10mx - 13 &= 0 \\ (m^2 + 1)x^2 - 2(m^2 - 5m)x + (m^2 - 10m + 12) &= 0 \end{aligned}$$

判別式を D とすると、円と直線が接するので $D = 0$ だから

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (m^2 - 5m)^2 - (m^2 + 1)(m^2 - 10m + 12) = 0 \\ (m^4 - 10m^3 + 25m^2) - (m^4 - 10m^3 + 12m^2 + m^2 - 10m + 12) &= 0 \\ m^4 - 10m^3 + 25m^2 - m^4 + 10m^3 - 12m^2 - m^2 + 10m - 12 &= 0 \\ 12m^2 + 10m - 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$6m^2 + 5m - 6 = 0 \iff (3m - 2)(2m + 3) = 0 \iff m = \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$$

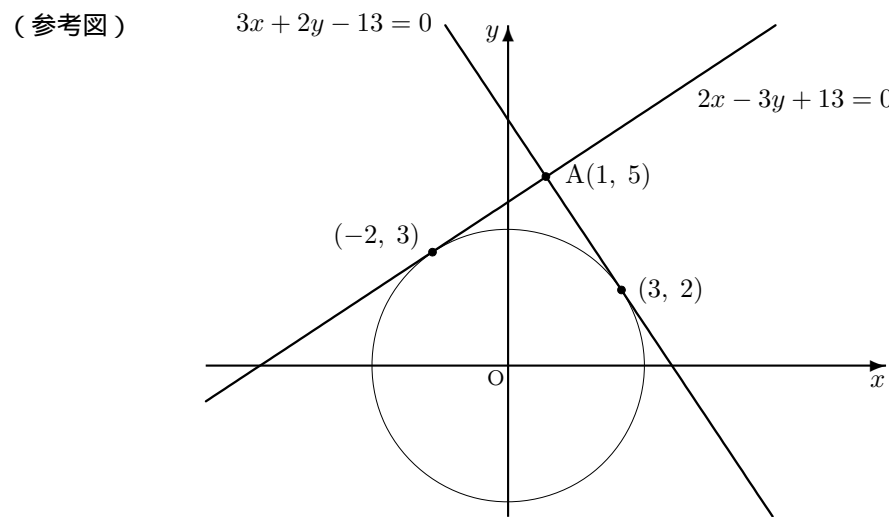
$m = \frac{2}{3}$ のとき、① に代入して、 $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 5 \iff 2x - 3y + 13 = 0$

$m = -\frac{3}{2}$ のとき、① に代入して、 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 5 \iff 3x + 2y - 13 = 0$

以上より、求める接線の方程式は、 $3x + 2y - 13 = 0$ 、 $2x - 3y + 13 = 0$ //

コメント …… 計算が大変だけど、方針は分かりやすい。

① の式が $y = \circ x +$ の短い形なら式の展開が楽。



心ある人は3通り全部の解答を身につけてきますよね。