三角関数と指数関数の微分の公式を証明する

三角関数の微分

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(proof)　準備として三角関数の和から積の公式を導く

加法定理より
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ①$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ②$$
で ① − ② をすると
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta \cdots\cdots ③$$

③ で $\alpha+\beta = A$，$\alpha-\beta = B$ とおくと $\alpha = \dfrac{A+B}{2}$，$\beta = \dfrac{A-B}{2}$ となるから

③ は $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} \cdots\cdots ④$（三角関数の和から積の公式）となる。

●関数 $\sin x$ を定義により微分すると

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\sin(x+h)-\sin x\right\} \quad \leftarrow ④ \text{ を使う。} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{2\cos\frac{(x+h)+x}{2}\sin\frac{(x+h)-x}{2}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\left\{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\right\} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \quad \text{ここで } \frac{h}{2}=\theta \text{ とおけば，} h\to 0 \text{ のとき，} \theta\to 0 \text{ だから} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\cos(x+\theta)\cdot\frac{\sin\theta}{\theta} \quad \text{ここで } \lim_{\theta\to 0}\cos(x+\theta) = \cos(x+0) = \cos x,\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \text{ であるから} \\
&= \cos x\cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

●関数 $\cos x$ を $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ より合成関数の微分を行う。また，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$ を最後に使う。

$$(\cos x)' = \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = \sin x\cdot(-1) = -\sin x$$

●関数 $\tan x$ を商の微分法を使って微分する。

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

以上より，$(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ が証明された。(q.e.d.)

対数関数の微分

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log_e a} \qquad (\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \text{ただし，} \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

(proof)　●関数 $\log_a x$ を定義により微分すると

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{\log_a(x+h)-\log_a x\} \quad \leftarrow \text{対数の公式 } \log_a M - \log_a N = \log_a\frac{M}{N} \text{ を使う。} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{h}{x} = k$ とおくと，両辺の分母分子をひっくり返して $\dfrac{x}{h} = \dfrac{1}{k}$ より $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{k}$ であり，

$h\to 0$ のとき，$k\to 0$ だから ①を書き換えると

$$\begin{aligned}
① &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{k}\log_a(1+k) \quad \leftarrow \text{対数の公式 } p\log_a M = \log_a M^p \text{ を使う。} \\
&= \lim_{k\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} \cdots\cdots ②
\end{aligned}$$

② で $\lim\limits_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の値を求めると，この極限値は実際に存在し，e という文字で表される。

e は数学者レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) の頭文字 e である。

e をネイピア数またはオイラー数と呼ぶ。

e は無理数で，その値は $e = 2.718281828459045\cdots$ であることが知られている。（裏面参照）

よって，$\lim\limits_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$ を ② に代入すると，底の変換公式により対数の微分公式が導かれる。

$$② = \lim_{k\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{x\log_e a}$$

以上より，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log_e a}$ である。この式で $a = e$ とすると

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x\log_e e} = \frac{1}{x}$$

底が e である対数を自然対数という。今後単に $\log x$ と書けば，自然対数を意味するものをする。

すなわち，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ である。

以上より，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log_e a}$，$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ が証明された。(q.e.d.)

ネイピア数

ネイピア数 e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ ,\qquad \lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e\qquad\qquad \text{ただし，}e=2.7182\cdots$$

自然数 n に対して，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$ が成り立つことを証明せよ。（新潟大学理系 2012 年）

(proof)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n={}_nC_0\cdot1^n+{}_nC_1\cdot1^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+{}_nC_2\cdot1^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+{}_nC_3\cdot1^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+{}_nC_4\cdot1^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4+\cdots+{}_nC_n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-3}{n}\right)\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}\cdot1+\frac{1}{3!}\cdot1\cdot1+\frac{1}{4!}\cdot1\cdot1\cdot1+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots\cdot1\cdot1}_{n-1\text{ 個}}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times2}+\frac{1}{2\times2\times2}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{2\times2\cdots2\times2}_{n-1\text{ 個}}}$$

$$=1+\underbrace{1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{初項 1，公比 }\frac{1}{2}\text{，項数 }n\text{ の等比数列の和}}$$

$$=1+\frac{1\cdot\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1+2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<3$$

以上より，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$ が証明された。($q.e.d.$)

以下，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.7182\cdots$ を導くためのお話。

この大学入試問題解答の途中式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-3}{n}\right)\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

この両辺に $n\to\infty$ をとると

（数学的には正しくない。本当は「数列が収束すること」を厳密に示す必要がある。）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{p!}+\cdots$$

を得ることができる。

この式の右辺を実際に計算すると $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots=2.7182\cdots$ となる。

この値を e とし、ネイピア数またはオイラー数と呼ぶ。

この e を用いたオイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (i は虚数単位) は有名である。
物理学者のリチャード・ファインマンはこの公式を評して「我々の至宝」かつ
「すべての数学のなかでもっとも素晴らしい公式」だと述べている。
この公式に $\theta=\pi$ を代入すると $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$ すなわち $e^{i\pi}=-1$ を得ることができる。
$e^{i\pi}+1=0$ をオイラーの等式と呼ぶ。
The Mathematical Intelligencer 誌の読者調査によると、この等式は「数学における最も美しい定理」
(The most beautiful theorem in mathematics) と呼ばれている

すべての数学の中で最も素晴らしい公式

オイラーの公式

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を証明せよ。

＜その１＞　微分方程式を用いた証明

微分方程式は現在の高等学校では履修しないが,
高校２年生の不定積分で易しいものを高校の教科書で扱っている。
数学 III を勉強すれば理解できない内容ではない。

(proof)

$y = \cos x + i \sin x \quad \cdots\cdots$ ① とおく。

$x = 0$ を代入すると，$y = \cos 0 + i \sin 0 = 1 \quad \cdots\cdots$ ②

① の両辺を x について微分すると

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x + i \cos x$$

この両辺を i 倍すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} \cdot i &= -i \sin x + i^2 \cos x \\ &= -i \sin x - \cos x \qquad (\because i^2 = -1) \\ &= -\cos x - i \sin x \\ &= -(\cos x + i \sin x) \\ &= -y \qquad (\because ①)\end{aligned}$$

$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{i} dx$ で，$i^2 = -1$ より，$i = -\frac{1}{i}$ だから

$$\frac{1}{y} dy = i dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int i dx$$

$$\log y = ix + C$$

② より $x = 0, y = 1$ を代入すると

$\log 1 = i \cdot 0 + C$ より，$C = 0$

すなわち $\log y = ix$ なので $y = e^{ix}$，① より

$$\therefore \quad \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$(q.e.d.)$

＜その２＞　マクローリン展開を用いた証明

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

を用いて $\sin x,\ \cos x,\ e^x$ を冪級数展開すると以下のようになる。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots$$

これらを使って証明する。『数学ガール フェルマーの最終定理』に載っている証明である。
もちろん高校の範囲外であるが，知っている高校生はたくさんいるぞ！
しかし、マクローリン展開を用いた証明は数学的に厳密な証明ではない。
やはり数列の「$\cdots\cdots$」の部分がどうなっているかが疑問視されることになる。

(proof)

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \frac{1}{6!}(ix)^6 + \frac{1}{7!}(ix)^7 + \cdots \\ &= 1 + ix + \frac{1}{2!} i^2 x^2 + \frac{1}{3!} i^3 x^3 + \frac{1}{4!} i^4 x^4 + \frac{1}{5!} i^5 x^5 + \frac{1}{6!} i^6 x^6 + \frac{1}{7!} i^7 x^7 + \cdots \\ &= 1 + ix + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-i) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 1 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot i \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot (-1) \cdot x^6 + \frac{1}{7!} \cdot (-i) \cdot x^7 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} ix^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} ix^5 - \frac{1}{6!} x^6 - \frac{1}{7!} ix^7 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots\right) + \left(ix - \frac{1}{3!} ix^3 + \frac{1}{5!} ix^5 - \frac{1}{7!} ix^7 + \cdots\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots\right) + i\left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \cdots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

以上より，$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が証明された。

$(q.e.d.)$

積の微分と商の微分の公式を証明する

積の微分・商の微分

$f(x),\ g(x)$ が微分可能であるとき

公式１　$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \rightarrow \quad (fg)' = f'g + fg'$

公式２　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \rightarrow \quad \left\{\dfrac{1}{g}\right\}' = -\dfrac{g'}{g^2}$

公式３　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \rightarrow \quad \left\{\dfrac{f}{g}\right\}' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

公式１（proof）

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\{f(x+h) - f(x)\}}{h}\cdot g(x+h)\ +\ f(x)\cdot\frac{\{g(x+h) - g(x)\}}{h}\right)\cdots\cdots ①$$

$f(x),\ g(x)$ が微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)\cdots\cdots ②$$

$g(x)$ は微分可能なので連続である。よって $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)\cdots\cdots ③$

②, ③ より ① $= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

以上より $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ が証明された。($q.e.d.$)

公式２（proof）

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{-\{g(x+h) - g(x)\}}{g(x+h)g(x)}\right\} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\left\{\frac{-1}{g(x+h)g(x)}\right\}\cdots\cdots ④$$

$g(x)$ が微分可能であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)\cdots\cdots ⑤$$

$g(x)$ は微分可能なので連続である。よって $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)\cdots\cdots ⑥$

⑤, ⑥ より ④ $= g'(x)\cdot\dfrac{-1}{g(x)g(x)} = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

以上より $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ が証明された。($q.e.d.$)

公式３（proof）

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\ +\ f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' \qquad \leftarrow 公式１$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\ +\ f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right) \qquad \leftarrow 公式２$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)}\ -\ \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

以上より $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ が証明された。($q.e.d.$)

微分と不定積分

関数 x^n の積分

①〜④ は $n \neq -1$ で成立。

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \cdots\cdots ①$$

←基礎型

$$\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{\frac{m}{n}+1}x^{\frac{m}{n}+1} + C = \frac{n}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} + C \quad \cdots\cdots ②$$

← ① を発展

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + C \quad \cdots\cdots ③$$

←①の $(ax+b)$ タイプ

$$\int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{n}{m+n}(ax+b)^{\frac{m+n}{n}} + C \quad \cdots\cdots ④$$

← ②と③ の複合

$n = -1$ の場合は対数

$$\int \frac{1}{x}dx = \log x + C \quad \cdots\cdots ⑤$$

$\frac{1}{x} = (\log x)'$と一緒に覚える。

② ,④ を使いこなせるのがベスト

三角関数：公式は ② を覚えること！

① $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

教科書の公式をそのまま覚えてもあまり役に立ちません。覚えないよりはマシですが。

② $\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$, $\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k}\tan kx + C$

x を kx に変えた式を公式として覚えてください。

③ $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$, $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$,

$$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

公式にはしませんが，x を $ax+b$ に変えた式にも同じ原理です。対応できるように！

指数関数・対数関数

① $\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

② $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$, $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{a^{kx}}{\log a} + C$

③ $\int e^{mx+n} dx = \frac{1}{m}e^{mx+n} + C$, $\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m}\cdot\frac{a^{mx+n}}{\log a} + C$

大学入試では② のような積分がほとんど。

公式② を覚えるために $\int \{f(x)\}' dx = f(x) + C$ の考え方

● $(\cos kx)' = -\sin kx \cdot (kx)' = -k\sin kx$ より，

$$\sin kx = \left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)' \iff \int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$$

● $(\sin kx)' = \quad \cos kx \cdot (kx)' = \quad k\cos kx$ より，

$$\cos kx = \left(\frac{1}{k}\sin kx\right)' \iff \int \cos kx \, dx = \quad \frac{1}{k}\sin kx + C$$

● $(e^{kx})' = \quad e^{kx} \cdot (kx)' \quad = \quad ke^{kx}$ より，

$$e^{kx} = \left(\frac{1}{k}e^{k}\right)' \iff \int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

合成関数の微分から不定積分が導かれていることをお互いに覚えていけば一石二鳥。
この考え方がしっかりわかれば ③ のタイプであっても怖くない！

対数関数 $\log x$ の積分

$$\int \log x dx = x\log x - x + C \qquad C \text{ は積分定数}$$

大学入試では $\sin x$ と $\cos x$ と e^x 絡みの問題がほとんどですが、大学の先生は
「高校生は sin と cos には強いけど，tan にはめっぽう弱い」ことをよく知っています。
差をつけたいときには出題されると思っていてください。