2015年　東京大学　前期

$\boxed{1}$　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C:\ \ y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

$\boxed{2}$　どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字は，

AACDAAB

となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$　a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p\ \ (x > 0)$ と $y = \log x\ \ (x > 0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

$\boxed{4}$　数列 $\{p_n\}$ を次のように定める

$$p_1 = 1,\ \ p_2 = 2,\ \ p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1 = 1,\ \ q_2 = 1,\ \ q_{n+2} = q_{n+1} + q_n\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ。

$\boxed{5}$　m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

$\boxed{6}$　n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|\,x\,| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\,x\,| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|\,x\,| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|\,x\,| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|\,x\,| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1 + e^{x+1})dx$$

2015年　京都大学　前期

$\boxed{1}$　2つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

【補足説明】ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。

$\boxed{2}$　次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である。

(b) 半径1の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう。

$\boxed{3}$

(1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ。

(2) $a_1=1$ として，$n=1,2,\cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。

$\boxed{4}$　一辺の長さが1の正四面体ABCDにおいて，Pを辺ABの中点とし，点Qが辺AC上を動くとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$　a，b，c，d，e を正の実数として整式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$
$$g(x)=dx+e$$

を考える。すべての正の整数 n に対して，$\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

$\boxed{6}$　2つの関数を

$$f_0(x)=\frac{x}{2},\qquad f_1(x)=\frac{x+1}{2}$$

とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,2,\cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

2015年　東北大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2+4y^2=1, \qquad x>0, \qquad y>0$$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし，P を通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$　xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式

$$x^3-x>y>-x$$

の表す領域を D とする。また，P を D の点とする

(1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

$\boxed{3}$　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+p_3=0 \qquad \cdots(*)$$

を考える

(1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$　$a>0$ を実数とする。$n=1,2,3,\cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$\left(2n\pi,\ 0\right), \qquad \left((2n+\frac{1}{2})\pi,\ \frac{1}{\{(2n+\frac{1}{2})\pi\}^a}\right), \qquad \left((2n+1)\pi,\ 0\right)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx, \qquad C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1) $n=1,2,3,\cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$　$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 A$(-2,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(t,\ \sqrt{3}t)$，を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{6}$　$k\geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，

$$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n>k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n=p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ の個数を求めよ。

2015年　新潟大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$　整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$　△ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\qquad 4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$　座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする。点 $\mathrm{B}(0,\ -2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接線をそれぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$p<q$ である。放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2) 面積 S を b を用いて表せ。

(3) 点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

$\boxed{4}$　数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n=a_{n-1}-1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n=a_{n-1}+6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。

$\boxed{5}$　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad (n\text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)dt \qquad (n\text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$-\frac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\frac{x^4}{4!}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式

$$-\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

2015年　新潟大学　（文系・農学部）　前期

$\boxed{1}$　整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$　△ABC の外心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\qquad 4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$$

をみたすとする。次の問いに答えよ。

(1) $100+3\vec{a}\cdot\vec{b}+5\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ が成り立つことを示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) △ABC の重心を G とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$　$f(x)=x^2-2x+2$ とする。放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線を l_1 とし，放物線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{Q}(p+1,\ f(p+1))$ における接線を l_2 とする。2 直線 l_1，l_2 の交点を R とする。ただし p は定数である。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l_1，l_2 の方程式をそれぞれ p を用いて表せ。

(2) 交点 R の座標を p を用いて表せ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{4}$　数列 $\{a_n\}$ を次の条件 (i) および (ii) をみたすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n=a_{n-1}-1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n=a_{n-1}+6$ である。

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 50 項の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 50 項までの和を求めよ。

2015年　金沢大学　（理系）　前期

$\boxed{1}$ 四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$ に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\qquad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2,\qquad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$$

とする。3 点 O，A，B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，α と β を h を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直行していることを示せ。

(3) △PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ を用いてもよい。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$，$\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) $0\leqq t\leqq 1$ に対し $g(x)=f(x)-f(t)$ とおく。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4) (3) の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，a の値を求める必要はない。

$\boxed{3}$ 関数 $y=\log_3 x$ とその逆関数 $y=3^x$ のグラフが，直線 $y=-x+s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点の座標は $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ であることを示せ。

(2) s，t，u は $s=t+u$，$u=\log_3 t$ を満たすことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるように，定数 k の値を求め，その極限値を求めよ。

$\boxed{4}$ $a>1$ とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $\displaystyle I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)dx$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)$ を求めよ。