

センター試験 数学II・数学B 問題 (2015.1.18 実施)

第1問 (配点 30)

〔1〕 O を原点とする座標平面上の2点 $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta, 2\sin\theta - \sin 7\theta)$ を考える。

ただし, $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$, $PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$\begin{aligned} OQ^2 &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} (\cos 7\theta \cos \theta + \sin 7\theta \sin \theta) \\ &= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} \cos(\boxed{\text{オ}} \theta) \end{aligned}$$

である。

よって, $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲で, OQ は $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき, 最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

(2) 3点 O, P, Q が一直線上にあるような θ の値を求めてみよう。

直線 OP を表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 次の ㉠~㉣のうちから一つ選べ。

㉠ $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$ ㉡ $(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

㉢ $(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$ ㉣ $(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより, $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲で, 3点 O, P, Q が一直線上にあるのは $\theta = \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることが

わかる。

(3) $\angle OQP$ が直角となるのは $OQ = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって, $\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲で, $\angle OQP$ が直角となるのは $\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$ のときである。

〔2〕 a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(*) \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y は $x = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, $y = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ となる。ただし $p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(2) $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 連立方程式 $(*)$ を満たす正の実数 x, y について, $x + y$ の最小値を求めてみよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから, $(*)$ を満たす正の実数 x, y は, a を用いて

$$x = 2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}, y = 2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$$

と表される。したがって, 相加平均と相乗平均の関係を利用すると, $x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ を

とることがわかる。ただし $q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第2問 (配点 30)

- (1) 関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよう。 h が 0 でないとき, x が a から $a + h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{\text{ア}}$ + $\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}$ である。したがって, 求める微分係数は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow \boxed{\text{ウ}}} \left(\boxed{\text{ア}} + \frac{h}{\boxed{\text{イ}}} \right) = \boxed{\text{エ}}$$

である。

- (2) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C とし, C 上に点 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ をとる。ただし, $a > 0$ とする。点 P における C の接線 l の方程式は

$$y = \boxed{\text{オ}}x - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である。直線 l と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, 0\right)$ である。点 Q を通り l に垂直な直線を m とすると, m の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

直線 m と y 軸との交点を A とする。三角形 APQ の面積を S とおくと

$$S = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{セ}})}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また, y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a(a^2 + \boxed{\text{タ}})}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a(a^2 - \boxed{\text{テ}})}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。 $a > 0$ であるから, $S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また, $a > 0$

のときの $S - T$ の増減を調べると, $S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第3問 (配点 20)

自然数 n に対し, 2^n の一の位の数 a_n とする。また, 数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{①}$$

を満たすとする。

- (1) $a_1 = 2, a_2 = \boxed{\text{ア}}, a_3 = \boxed{\text{イ}}, a_4 = \boxed{\text{ウ}}, a_5 = \boxed{\text{エ}}$ である。このことから, すべての自然数 n に対して, $a_{\boxed{\text{オ}}} = a_n$ となることがわかる。 $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを, 次の ①~④ のうちから一つ選べ。

- ① $5n$ ② $4n + 1$ ③ $n + 3$ ④ $n + 4$ ⑤ $n + 5$

- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① を繰り返し用いることにより

$$b_{n+4} = \frac{a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n}{2^{\boxed{\text{カ}}}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことがわかる。ここで, $a_{n+3} a_{n+2} a_{n+1} a_n = 3 \cdot 2^{\boxed{\text{キ}}}$ であることから, $b_{n+4} = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} b_n$ が成り立つ。

このことから, 自然数 k に対して

$$b_{4k-3} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k-2} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}, \quad b_{4k} = \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{k-1}$$

である。

- (3) $S = \sum_{j=1}^n b_j$ とおく。自然数 m に対して

$$S_{4m} = \boxed{\text{タ}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^m - \boxed{\text{チ}}$$

である。

- (4) 積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を T_n とおく。自然数 k に対して

$$b_{4k-3} b_{4k-2} b_{4k-1} b_{4k} = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{テ}}(k-1)}$$

であることから, 自然数 m に対して

$$T_m = \frac{1}{\boxed{\text{ツ}}^m} \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \right)^{\boxed{\text{ト}}m^2 - \boxed{\text{チ}}m}$$

である。また, T_{10} を計算すると, $T_{10} = \frac{3^{\boxed{\text{タ}}}}{2^{\boxed{\text{タネ}}}}$ である。

第4問 (配点 20)

1 辺の長さが 1 のひし形 OABC において, $\angle AOC = 120^\circ$ とする。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P とし, 直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ となるようにとる。以下, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) 三角形 OPQ の面積を求めよう。 $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{b}$ である。実数 t を用いて $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$

と表されるので, $\overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{エ}} t \vec{a} + \vec{b}$ である。ここで, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{キ}}$ であるこ

とから, $t = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから, $|\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$, $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって, 三角形 OPQ の面積 S_1 は

$S_1 = \frac{\boxed{\text{ソ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2) 辺 BC を 1 : 3 に内分する点を R とし, 直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。 $\overrightarrow{OT}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し, 三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

T は直線 OR 上の点であり, 直線 PQ 上の点でもあるので, 実数 r, s を用いて

$$\overrightarrow{OT} = r\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ}$$

と表すと, $r = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$, $s = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって, $\overrightarrow{OT} = \frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} \vec{b}$ である。

上で求めた r, s の値から, 三角形 OPQ の面積 S_1 と, 三角形 PRT の面積 S_2 との比は, $S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である。