2013年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　2次正方行列 A と2つの列ベクトル $X=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ があり，

$AX=3Y,\ AY=X$ が成り立っているとする。下の問いに答えなさい。

(1) A と A^2 を求めなさい。

(2) 自然数 n について A^n を求めなさい。

$\boxed{2}$　c を正の定数とする。平面上の原点 O $(0,\ 0)$ および，3点 A$(0,\ 1)$, B$(0,\ -1)$, C$(c,\ 0)$ について下の問いに答えなさい。

(1) 点 P が線分 OC 上を動くとき，3点からの距離の2乗の和 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値とそのときの P の座標を求めなさい。

(2) 点 Q が線分 OC 上を動くとき，3点からの距離の和 AQ+BQ+CQ の最小値とそのときの Q の座標を求めなさい。

$\boxed{3}$　a を実数の定数倍とする。2曲線 $y=x^2$ と $y=\dfrac{4}{x+a}$ がちょうど2つの共有点を持っているとき，下の問いに答えなさい。

(1) a の値を求めなさい。

(2) 2曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい。

$\boxed{4}$　2チームが試合をする。1回の試合で一方が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けは起こらないとする。先に4勝したチームを優勝とするとき，下の問いに答えなさい。

(1) 第4試合で優勝が決まる確率を求めなさい。

(2) 第7試合で優勝が決まる確率を求めなさい。

(3) 2チームの勝ち数の差が，優勝が決まるまで常に1以下である確率を求めなさい。

2012年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい。

(1) A^2 と A^3 を求めなさい。

(2) 自然数 n に対して A^n を推測し，それを数学的帰納法により証明しなさい。

$\boxed{2}$　関数 $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ について，以下の問いに答えなさい。

(1) $x > 0$ における $y = f(x)$ の概形を書きなさい。

(2) $t > 0$ のとき，3直線 $y = 0,\ x = t,\ x = t + 2$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最小値を求めなさい。

$\boxed{3}$　以下の問いに答えなさい。

(1) 袋の中に赤玉1個と白玉2個が入っている。この袋の中を見ないで玉を1個ずつ取り出す。取り出した玉は元に戻さない。k 回目に赤玉が取り出される確率 P_k $(k = 1,\ 2,\ 3)$ を求めなさい。

(2) 袋の中に赤玉2個と白玉 n 個が入っている。この袋の中を見ないで玉を1個ずつ取り出す。取り出した玉は元に戻さない。k 回目に2個目の赤玉が取り出される確率 Q_k $(k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n + 2)$ を求めなさい。

$\boxed{4}$　以下の問いに答えなさい。

(1) 自然数 $m,\ n$ に対して，m 以上 $m + n$ 以下の自然数の和を $m,\ n$ の式で表しなさい。

(2) 12は，$12 = 3 + 4 + 5$ と連続する3つの自然数の和として表すことができる。88を連続する2つ以上の自然数の和として表しなさい。

2011年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　実数 a に対して 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 6 - a = 0$$

を考える。また，この 2 次方程式が整数解を持つような a を小さい順に並べたものを $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) この 2 次方程式が実数解を持つような a の範囲を求めなさい。

(2) a_1 と a_2 を求めなさい。

(3) a_n を n の式で表しなさい。

(4) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。S_n を n の式で表しなさい。

$\boxed{2}$　半径 1 の球を含む円すいの体積の最小値，およびそのときの円すいの高さと底面の半径を求めなさい。

$\boxed{3}$　曲線 $C : y = e^{2x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t})$ における接線 l と x 軸との交点を Q とする。以下の問いに答えなさい。

(1) Q が x 軸の正の部分にあるような t の範囲を求めなさい。

(2) t が前問の範囲にあるとき，C および 3 直線 $l,\ y = 0,\ x = 0$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。

$\boxed{4}$　A，B の 2 種類のカードがある。A を 2 枚，B を 3 枚それぞれ積み重ね，3 人の人が順番に 1 枚のカードを次のように持ち帰ることにする。A，B 両方のカードが残っているときは A か B かを確率 $\dfrac{1}{2}$ で選んで 1 枚持ち帰る。また，どちらか一方のカードしか残っていないときはそれを 1 枚持ち帰る。このようにすると最後に 2 枚のカードが残る。これについて次の問いに答えなさい。

(1) A のカードが 2 枚残る確率を求めなさい。

(2) B のカードが 2 枚残る確率を求めなさい。

(3) B のカードが 2 枚残ったとき，1 番目の人が B のカードを持ち帰った条件付き確率を求めなさい。

2010年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　平面上の点 P_n，Q_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を次のように定める。

$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(0,\ 1)$ とする。

P_n，Q_n が定められているとして，Q_n を中心に P_n を時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた点を P_{n+1} とする。

さらに，P_{n+1} を中心に Q_n を半時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた点と P_{n+1} の中点を Q_{n+1} とする。

このとき，以下の問いに答えなさい。

(1) P_2，P_3 の座標を求めなさい。

(2) すべての P_n を通る直線の方程式を求めなさい。

(3) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ の長さを n の式で表しなさい。

(4) P_n の x 座標を x_n とおく。x_n を n の式で表しなさい。

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めなさい。

$\boxed{2}$　関数 $f(x)=(ax+b)e^{-3x}$ について以下の問いに答えなさい。

(1) 導関数 $f'(x)$ を $f'(x)=(cx+d)e^{-3x}$ と表すとき，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となる 2×2 行列 A を求めなさい。

(2) 前問の A の逆行列を求めなさい。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-3x}dx$ を求めなさい。

$\boxed{3}$　曲線 $C: y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ について以下の問いに答えなさい。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{-\frac{1}{2}t^2})$ における接線の方程式を求めなさい。

(2) (1) の接線と x 軸，y 軸および直線 $x=t$ で囲まれる台形の面積を $S(t)$ とする。

$t>0$ の範囲で t が動くとき，$S(t)$ の最大値を与える t とその最大値を求めなさい。

2009年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　$0 < r < 1$ とする。点 A(1, 0) を中心とする半径 r の円周を C_r とする。以下の問いに答えなさい。

(1) C_r の方程式を書きなさい。

(2) C_r 上の点 P$(a,\ b)$ における接線が原点 O を通るとする。ただし $b > 0$ とする。
$a,\ b$ を r を用いて表しなさい。

(3) r が変化するとき，接点 P の軌跡の方程式を $y = f(x)$ とする。$f(x)$ を求めなさい。

(4) $y = f(x)$ のグラフの概形を書きなさい。

$\boxed{2}$　$x > \sqrt{2}$ とする。$y = \dfrac{3x+4}{2x+3}$ とするとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2x+3}$ を示しなさい。

(2) $0 < \dfrac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} < (3-2\sqrt{2})^2$ を示しなさい。

(3) $x_1 = 2,\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n+4}{2x_n+3}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列を $\{x_n\}$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めなさい。

$\boxed{3}$　xy 平面の $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，曲線 $y = \sin x$ と x 軸とで囲まれた部分を S とする．
以下の問いに答えなさい。

(1) S の面積を求めよ。

(2) 実数 t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，S のうち $\dfrac{t}{2} \leqq x \leqq t$ のにある部分の面積 $A(t)$ の最大値を求めよ。

2008 年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$ (1) 不等式 $1.2^n > 10$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2) xy 平面に $\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$ をとる。点 P が x 軸の正の部分を動くとき，
$\triangle\mathrm{ABP}$ の外接円の半径が最小となる P の座標を求めなさい。

$\boxed{2}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ の値を求めなさい。

(2) 曲線 $y = 2\cos x - 1$ と x 軸および 2 直線 $x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分を
x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えなさい。

(1) 等式 $\dfrac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{n - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{n + \frac{1}{2}}$ を利用して，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ を求めなさい。

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$ を示しなさい。

$\boxed{4}$ 曲線 $C : y = \log x$ について以下の問いに答えなさい。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線の方程式を求めなさい。

(2) $1 < a < b$ とする。前問の接線と x 軸および 2 直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれる図形の面積を $S(t)$ とする。
P が C 上を動くとき，$S(t)$ の最小値を求めなさい。

2007年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　次の問いに答えなさい。

(1) 無限級数 $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\cdots$ の和を求めなさい。

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} x(\cos x+\sin x)dx$ の値を求めなさい。

(3) 放物線 $y=x^2-2x-1$ と原点に関して対称な曲線を表す方程式を求めなさい。

$\boxed{2}$　2次方程式 $x^2-x+1=0$ の2つの解を $\alpha,\ \beta$ とする。

(1) $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を求めなさい。

(2) 整式 $(x+1)(x^2-x+1)$ を展開しなさい。

(3) α^3，β^3 を求めなさい。

(4) $\frac{1}{\alpha^{100}}+\frac{1}{\beta^{100}}$ を求めなさい。

$\boxed{3}$　xy 平面上に正三角形があり，その一辺の傾きが1であるとする。

(1) 他の2辺の傾きを求めなさい。

(2) この正三角形の3つの頂点が曲線 $y=x^2$ 上にあるとする。3つの頂点の x 座標を求めなさい。

$\boxed{4}$　実数 t が $1\leqq t\leqq e$ の範囲を動くとき，$S(t)=\int_0^1 |\,e^x-t\,|\,dx$ の最大値と最小値を求めなさい。

2006 年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$ 平面上の 2 点 O(0, 0)，A(1, 2) を考える。P が x 軸上を動くとき，
$\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2$ の最小値とそれを与える P の座標を求めなさい。

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えなさい。

(1) $x=\cos\theta$ とおくとき，$p=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，$q=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ を x の整式として表しなさい。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ のとき，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ であることを示しなさい。

(3) $\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めなさい。

$\boxed{3}$ 方程式 $x-3\log x=0$ の正の実数解の個数を求めなさい。ただし，$\log x$ は自然対数を表す。

$\boxed{4}$ △ABC において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$，$\angle\mathrm{A}=x$ とする。$f(x)=\mathrm{BC}$ とおくとき，
以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x)$ を x の式として表しなさい。

(2) △ABC の外接円の半径を R とするとき，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ を R で表しなさい。

(3) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ の最大値を求めなさい。

$\boxed{5}$ 曲線 $y=e^{-x}$ を C とする。以下の問いに答えなさい。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{-t})$ における接線と x 軸の交点を Q とし，Q における x 軸の垂線と C との交点を R とする。C および 2 つの線分 PQ，QR で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい。

(2) $\mathrm{P}_1(0,\ 1)$ とする。自然数 n に対して，P_n から Q_n，P_{n+1} を次のように定める。
P_n における C の接線と x 軸との交点を Q_n とし，Q_n における x 軸の垂線と C との交点を P_{n+1} とする。
C および 2 つの線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$，$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積を S_n とするとき，
無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めなさい。

2005 年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　以下の問いに答えなさい。

(1) 赤玉 2 個と白玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，2 個目の赤玉が出たらそこでやめる。それまでに取り出された玉の数の個数の期待値を求めなさい。
ただし，取り出した玉をもとにもどさないものとする。

(2) 変数 x の値が $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(x) = \sin x + \cos x$ の値の範囲を求めなさい。

$\boxed{2}$　正七角形について，以下の問いに答えなさい。

(1) 対角線の総数を求めなさい。

(2) 対角線を 2 本選ぶ組み合わせは何通りあるか答えなさい。

(3) 頂点を共有する 2 本の対角線は何組あるか答えなさい。

(4) 共有点を持たない 2 本の対角線は何組あるか答えなさい。

(5) 正七角形の内部で交わる 2 本の対角線は何組あるか答えなさい。

$\boxed{3}$　n を 3 以上の自然数とし，半径 1 の円に内接する正 n 角形の周の長さを l_n とする。

(1) $l_n = 2n \sin \dfrac{\pi}{n}$ であることを示しなさい。

(2) l_3，l_6 を求めなさい。

(3) $r_n = \dfrac{2l_n}{l_{2n}}$ と定めるとき，$r_{2n} = \sqrt{2 + r_n}$ が成り立つことを示しなさい。

(4) l_{12} を求めなさい。

$\boxed{4}$　t を実数とし，曲線 $y = e^{-x}$ 上の点 $(t,\ e^{-t})$ における接線を l とする。
以下の問いに答えなさい。

(1) l が x 軸の正の部分と交わるような t の範囲を求めなさい。

(2) t が上の範囲を動くとき，l と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ を t で表しなさい。

(3) $S(t)$ の最大値を求めなさい。

2004年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$　3個のさいころを同時に投げる。以下の問いに答えよ。

(1) 出る目がすべて一致する確率を求めよ。

(2) 出る目がすべて異なる確率を求めよ。

(3) 出る目がすべて一致すれば60点，2つだけ一致すれば4点，すべて異なれば3点もらえるとする。得点の期待値を求めよ。

$\boxed{2}$　$f(x) = |x^2 - x|$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) a を正の数とするとき，$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値 $M(a)$ を求めよ。

$\boxed{3}$　t を正の数とする。曲線 $y = e^{-x}$ と x 軸との間で $t \leqq x \leqq 3t$ の部分の面積を $A(t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $A(t)$ を t の式として表せ。

(2) $A(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

$\boxed{4}$　以下の問いに答えよ。ただし，t は実数とする。

(1) $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(t - \sin x)dx$ とおくとき，$f(t) = 0$ となる t を求めよ。

(2) $g(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(t - \sin x)^2 dx$ とおくとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

2003 年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$ 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれた 10 本のくじがあり，このうち連続する 2 つの数の 2 本が当たりである。ただし，10 と 1 は連続しているとする。当たりくじ 1 本の賞金は 1 万円である。このくじを 3 本引くとして，次の 2 通りの引き方を考える。

連番方式 ： 1 から 10 までの数の中からでたらめに 1 つ選ぶ。選ばれた数を N として $N,\ N+1,\ N+2$ の 3 本のくじを引く。ただし，$N=9$ のときは 9, 10, 1 の 3 本を引き，$N=10$ のときは 10, 1, 2 の 3 本を引く。

バラ方式 ： 10 本のくじからでたらめに 3 本引く。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 連番方式で，k 本 $(k=0,\ 1,\ 2)$ 当たる確率 $P(k)$ を求めよ。

(2) バラ方式で，k 本 $(k=0,\ 1,\ 2)$ 当たる確率 $Q(k)$ を求めよ。

(3) 連番方式の賞金の期待値 E を求めよ。

(4) バラ方式の賞金の期待値 F を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) 角 $\alpha,\ \beta$ に対して，2 点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$ 間の距離を求めよ。

(2) 2 点 $(1,\ 0)$，$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$ 間の距離を求めよ。

(3) 前問 (1),(2) で求めた距離が等しいことに注意して，三角関数 $\cos\theta$ についての加法定理を示せ。

$\boxed{3}$ 平面を動く点 P があり，x 軸上では速さ 2 で，x 軸以外では速さ 1 で動く。点 A(0, 1) から点 B(2, 0) に最短時間で行くための経路を求めよ。

$\boxed{4}$ $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で曲線 $y=e^x$ と x 軸ではさまれる部分を S とし，これを直線 $x=t$ に対して対称に移動したものを T とする。以下の問いに答えよ。

(1) S の面積を求めよ。

(2) S と T が共通部分を持つような t の範囲を求め，そのときの共通部分の面積 $A(t)$ を t で表せ。

(3) t が前問の範囲を動くとき，$A(t)$ の最大値を求めよ。

2002年　長岡技術科学大学　前期

$\boxed{1}$ 半径1の半円 $x^2+y^2=1,\ y \geqq 0$ 上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ y)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ をとる。ただし，$x>0$ とする。台形 APQB の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) S を x の関数として表せ。

(2) S の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ 時刻 $t=0$ で原点にいる粒子が x 軸の正の方向に進む，時刻 t における粒子の速度を $\dfrac{1}{t^2+3t+2}$，時刻 t における粒子の x 座標を $f(t)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{t^2+3t+2}=\dfrac{a}{t+1}+\dfrac{b}{t+2}$ を満たす定数 $a,\ b$ を求めよ。

(2) $f(2)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} f(t)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 太郎と花子が直線 AB 上で，点 A をスタート地点とし，6m 離れた点 B をゴールとする競争を次のようなルールで行う。「ジャンケンをして勝てば 2m 進み，負ければ 1m 進む。先に B に到達するか通過した方を勝ちとする。ただし，同時に B に到達した場合は引き分けとする。」何回かのジャンケンの後，太郎が x m，花子が y m 進んでいる確率を $p(x,\ y)$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $p(4,\ 2),\ p(3,\ 3),\ p(5,\ 4),\ p(6,\ 6)$ を求めよ。

(2) 太郎が競争に勝つ確率を求めよ。

$\boxed{4}$ xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を実数 $r,\ \theta$ を用いて $x=r\cos\theta,\ y=\sin\theta$ と表す。P は $r=\dfrac{1}{1-K\cos\theta}$ を満たす曲線上にあるとする。ただし，K は定数で，$0<K<1$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-r^2\sin\theta$ および $\dfrac{dy}{d\theta}=r^2(\cos\theta-K)$ を示せ。

(2) θ が時間 t の微分可能な関数で，$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{r^2}$ を満たしているとき，$\dfrac{dx}{dt}=-\sin\theta$ および $\dfrac{dy}{dt}=\cos\theta-K$ を示せ。

(3) θ が上問の条件を満たしているとき，P の加速度 $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の反対向きで，加速度の大きさ $\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$ は $\dfrac{1}{r^2}$ に等しいことを示せ。ここで O は原点を表す。