演習問題 No.1

数 III

$1 < a < e$ のとき、曲線 $C: y = \log ax$ がある。この曲線 C の $x = 1$ における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底であり、曲線 C の対数の底は e とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C 、直線 l 及び x 軸とで囲まれた部分の図形を図示し、その部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ。

演習問題 No.2

数 III

曲線 $y = e^{-x} \sin x$ の $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ (n は自然数) の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1) 不定積分 $\int e^{-x} \sin x dx$ を求めよ。

(2) $y = e^{-x} \sin x$ のグラフを $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲でかけ。

(3) S_n を求めよ。

(4) 無限級数の和 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。

演習問題 No.3

数 III

関数 $f(x)$ が $f(x) = \cos x + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(x-t) dt$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

(1) $a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t dt$, $b = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin t dt$ とおくと、 $f(x)$ を $a, b, \cos x, \sin x$ で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

演習問題 No.4

数 III

$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} x \cos^2 x dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ の値を求めよ。

数 III

n を自然数とし, $f_n(x) = \frac{2nx}{x^2 + n^2}$ ($x \geq 0$) とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f_n(x)$ のグラフをかけ。変曲点も求めること。
- (2) 2 曲線 $y = f_n(x)$, $y = f_{n+1}(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

数 III

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおくと、次の (1) ~ (3) の問いに答えなさい。

- (1) I_{n+2} と I_n の関係式を求めよ。
- (2) $I_{n+1}I_n$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ であることを示せ。

数 III

$f(x) = xe^{-x}$ について次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ での $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^m f(x) dx = \frac{1}{2}$ をみたす正数 m は $1 < m < 2$ の範囲にあることを示せ。

数 III

関数 $y = f(x) = x^2 - 2$ で示される曲線上の点 $(x_n, f(x_n))$ における接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする ($n = 1, 2, \dots$)。このようにして得られる数列 $\{x_n\}$ について、つぎの問いに答えよ。

- (1) x_{n+1} を x_n を用いて表せ。
- (2) $x_n > 0$ で、 $x_n \neq \sqrt{2}$ ならば、 $x_{n+1} > \sqrt{2}$ であることを示せ。
- (3) $x_1 > 0$ で、 $x_1 \neq \sqrt{2}$ ならば、 $n \geq 2$ のとき、 $x_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{2})$ であることを示せ。
- (4) $x_1 > 0$ で、 $x_1 \neq \sqrt{2}$ ならば、数列 $\{x_n\}$ は $n \geq 2$ のとき単調減少で、 $\sqrt{2}$ に収束することを示せ。

数 III

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$S_n = \int_0^1 x^{2n+1} e^{-x^2} dx$$

とおく。以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $I = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$ および、 S_1 の値を求めよ。

(2) S_{n+1} を S_n を用いて表せ。

(3) $T_n = \frac{S_n}{n!}$ とおくとき、 T_{n+1} を T_n を用いて表せ。

(4) S_n を求めよ。（必要ならば和の記号 $\sum$ を用いてよい）

(5) n が 1 以上の整数のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < \frac{e}{(n+1)!}$$

演習問題 No.10

数 C

a を実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の各問に答えよ。

- (1) 行列 $E - A$ が逆行列を持つかどうか調べよ。また、逆行列を持つ場合にはそれを求めよ。
- (2) A^n を求めよ。 ($n = 1, 2, 3, \dots$)
- (3) $S_n = E + A + A^2 + \dots + A^n$ とおくと、 S_n を求めよ。 ($n = 1, 2, 3, \dots$)

演習問題 No.11

数 C

実数 a に対し, $A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) すべての a に対して A が逆行列をもつことを示し, A の逆行列を求めよ。

(2) $E - A$ が逆行列をもたないような a の値を求めよ。

以下では, a を (2) で求めた値のうち正のものとする。

(3) $A \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix}$ となる b を求めよ。また, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる k を求めよ。

(4) b を (3) で求めた値とし, $P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 $AP = PQ$ となる 2 次の正方行列 Q を求めよ。

(5) 自然数 n に対して A^n を求めよ。

演習問題 No.12

数 C

実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の 2 点 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき、行列 A によって点 P は点 Q に移るといふ。

点 $(1, 3)$ は行列 A により点 $(10, 10)$ に移り、さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = 0$$

が成り立つものとする。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A により $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ。

(2) 実数 a, b, c, d の値を求めよ。

(3) 次の条件 (*) をみたす直線 l の方程式を求めよ。

(*) 直線 l 上のすべての点が行列 A により l 上の点に移る。