演習問題　No.1

数 III

$1 < a < e$ のとき，曲線 $C : y = \log ax$ がある。この曲線 C の $x = 1$ における接線を l とするとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底であり，曲線 C の対数の底は e とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C，直線 l 及び x 軸とで囲まれた部分の図形を図示し，その部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ。

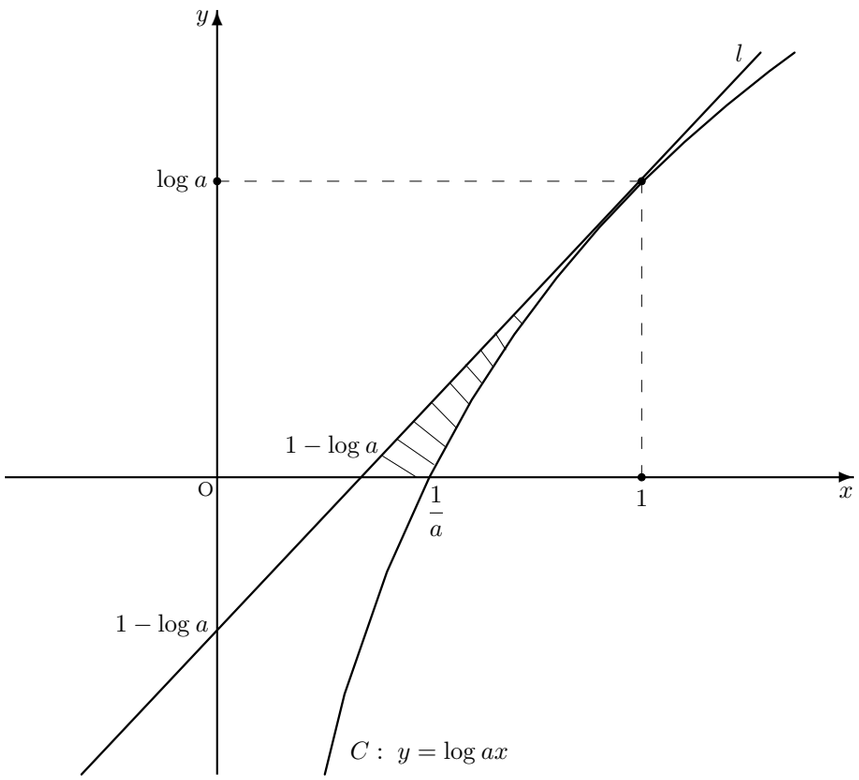
—解答例—

(1) $y = \log x$ について，$y' = \dfrac{1}{x}$ なので $(1,\ \log a)$ における接線 l の方程式は

$$y - \log a = \frac{1}{1}(x-1)$$

$$\therefore\ y = x + \log a - 1 \quad //$$

(2)



曲線 C，直線 l 及び x 軸とで囲まれた部分の図形は上図の斜線部分であり，境界線を含む。

—解答例—

$S(a)$ は底辺の長さ $\log a$，高さ $\log a$ の三角形の面積から，曲線 C と x 軸と直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積を引いたものである。

$$\begin{aligned}
S(a) &= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \int_{\frac{1}{a}}^{1} \log ax dx \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \int_{\frac{1}{a}}^{1} (\log a + \log x) dx \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \Big[\, x\log a + x\log x - x \,\Big]_{\frac{1}{a}}^{1} \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \left\{ \left(1 \cdot \log a + 1 \cdot \log 1 - 1\right) - \left(\frac{1}{a} \cdot \log a + \frac{1}{a} \cdot \log \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \left\{ \left(\log a + 0 - 1\right) - \left(\frac{1}{a}\log a - \frac{1}{a}\log a - \frac{1}{a}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \left(\log a - 1 + \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\log a)^2 - \log a + 1 - \frac{1}{a} \quad //
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{S(a)}{a-1} &= \frac{1}{a-1}\left\{ \frac{1}{2}(\log a)^2 - \log a + 1 - \frac{1}{a} \right\} \\
&= \frac{1}{a-1}\left\{ \frac{1}{2}(\log a)(\log a - 2) + \frac{a-1}{a} \right\} \\
&= \frac{\log a}{a-1} \cdot \frac{\log a - 2}{2} + \frac{1}{a} = \frac{\log a - 0}{a-1} \cdot \frac{\log a - 2}{2} + \frac{1}{a} \\
&= \frac{\log a - \log 1}{a-1} \cdot \frac{\log a - 2}{2} + \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

$f(x) = \log x$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より，$\displaystyle\lim_{a \to 1} \frac{\log a - \log 1}{a-1} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ であるから，

$$\therefore \lim_{a \to 1+0} \frac{S(a)}{a-1} = 1 \cdot \frac{\log 1 - 2}{2} + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0 \quad //$$

(2001 年新潟県教員採用試験 高校･数学)

演習問題　No.2

数 III

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ の $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$（$n$ は自然数）の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin x dx$ を求めよ。

(2) $y=e^{-x}\sin x$ のグラフを $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲でかけ。

(3) S_n を求めよ。

(4) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

—解答例—

(1) $$\int e^{-x}\sin x dx = (-e^{-x})\sin x - \int(-e^{-x})\cos x dx = -e^{x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx$$
$$= -e^{-x}\sin x + \left\{(-e^{x})\cos x - \int(-e^{-x})(-\sin x)dx\right\}$$
$$= -e^{-x}\sin x - e^{x}\cos x - \int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}(\sin x+\cos x) - \int e^{-x}\sin x dx$$

$$\therefore \int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad //$$

(別解)

$$\begin{array}{rl} & (e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ +) & (e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \\ \hline & (e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)' = -2e^{-x}\sin x \end{array}$$

これより，$e^{-x}\sin x = \left\{-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'$ であるから

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad //$$

(2) $y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$y'=0$ となる x は $e^{-x}>0$ より $-\sin x+\cos x=0$ すなわち $\sin x=\cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	↗	0

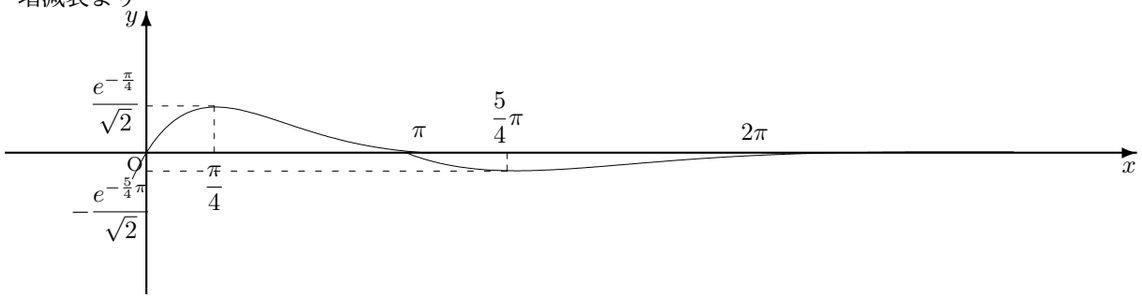
x 軸との交点は $y=0$ のとき $e^{-x}\sin x=0$

$e^{-x}>0$ より $\sin x=0$

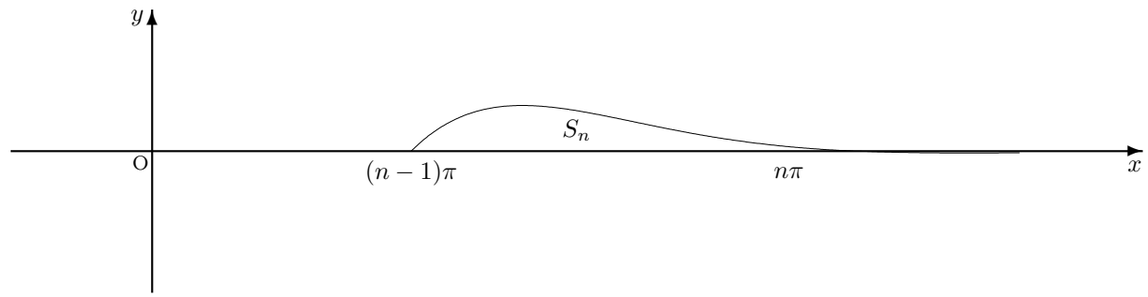
$0 \leqq x \leqq 2\pi$ なので $x=0,\ \pi,\ 2\pi$

で x 軸と交わる。

増減表より



—解答例—



(point 1)　$\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n$ で整理していく

(point 2)　$|\,(-1)^n\,| = |\,(-1)^{(n-1)}\,| = 1$ で絶対値が消える。

(3) $$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\,e^{-x}\sin x\,|\,dx = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x dx\right|$$
$$= \left|\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right| \quad \leftarrow (1) \text{ の結果を使う}$$
$$= \left|\left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(\sin n\pi+\cos n\pi)\right\} - \left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(\sin(n-1)\pi+\cos(n-1)\pi)\right\}\right|$$
$$= \left|\left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(-1)^n\right\} - \left\{-\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(-1)^{(n-1)}\right\}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}e^{-n\pi}(-1)^{(n-1)} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(-1)^{(n-1)}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right)(-1)^{(n-1)}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right)\left|(-1)^{(n-1)}\right| = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right) \quad //$$

(point 3)　S_n の式を等比数列の基本形に変形する。（ar^{n-1} の形にする。）

(point 4)　公比の絶対値が 1 より小さいときに収束することを確認し，$\dfrac{a}{1-r}$ の公式で和を求める。

(4) $$S_n = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi+\pi-\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-(n-1)\pi}\cdot e^{-\pi}+e^{-(n-1)\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\pi}}+1\right)(e^{-\pi})^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^{\pi}}{e^{\pi}}\right)\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は初項 $\dfrac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}$，公比 $\dfrac{1}{e^{\pi}}$ の無限等比級数である。

公比について $0<\dfrac{1}{e^{\pi}}<1$ より収束し，その和は

$$\frac{\dfrac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}}{1-\dfrac{1}{e^{\pi}}} = \frac{\dfrac{e^{\pi}+1}{2e^{\pi}}}{\dfrac{e^{\pi}-1}{e^{\pi}}} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} \text{ である。} \qquad \therefore \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)} \quad //$$

(2000 年新潟県教員採用試験 高校・数学)

演習問題　No.3

数 III

関数 $f(x)$ が，$f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $a=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt$，$b=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt$ とおくとき，$f(x)$ を a，b，$\cos x$，$\sin x$ で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

—解答例—

(1) $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$

$$=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt$$

$$=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(t)\sin x\cos t-f(t)\cos x\sin t\}dt$$

$$=\cos x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin x\cos tdt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos x\sin tdt$$

$$=\cos x+\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt-\cos x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt$$

$$=\cos x+\sin x\cdot a-\cos x\cdot b$$

$$=a\sin x+(1-b)\cos x \quad /\!/$$

(2) $a=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos tdt$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{a\sin t+(1-b)\cos t\}\cdot\cos tdt$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos tdt+\frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 tdt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$b=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin tdt$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{a\sin t+(1-b)\cos t\}\cdot\sin tdt$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin^2 tdt+\frac{1-b}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos tdt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

—解答例—

①，② について

$$\int_0^{\pi}\sin t\cos tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\sin t\cos tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2tdt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 2\pi-\cos 0)=0$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 tdt=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 tdt=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$① \iff a=\frac{a}{\pi}\cdot 0+\frac{1-b}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \iff 2a+b=1$$

$$② \iff b=\frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1-b}{\pi}\cdot 0 \iff a-2b=0$$

これを解くと，$a=\dfrac{2}{5}$，$b=\dfrac{1}{5}$

以上より，求める $f(x)$ は，

$$f(x)=\frac{2}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x \quad /\!/$$

(香川大学 教育)

演習問題　No.4

数 III

$a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx$　$(n = 1, 2, \cdots)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ の値を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{1}{n} = \theta$ とする。

$$a_n = \int_0^{\theta} x\cos^2 x dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\theta} x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\theta} x\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\theta} + \frac{1}{2}\left\{\left[x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\theta} - \int_0^{\theta} 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\, dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\theta} + \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\theta} - \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\sin 2x\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta\sin 2\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\theta}\right)$$

$$= \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \frac{1}{8}\left[\cos 2x\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \frac{1}{8}(\cos 2\theta - \cos 0)$$

$$= \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4}\theta\sin 2\theta + \frac{1}{8}\cdot(1 - 2\sin^2\theta) - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta$$

よって　$n^2 a_n = \dfrac{1}{\theta^2}\cdot a_n = \dfrac{1}{\theta^2}\left(\dfrac{\theta^2}{4} + \dfrac{1}{4}\theta\sin 2\theta - \dfrac{1}{4}\sin^2\theta\right)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$n \to \infty$ のとき，$\theta \to 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_2 = \lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}\ /\!/$$

—解答例—

[別解]　$y = \cos x$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少であるから

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 < \cos\dfrac{1}{n} \leqq \cos x \leqq \cos 0$

それぞれを 2 乗して，$\cos^2\dfrac{1}{n} \leqq \cos^2 x \leqq \cos^2 0$

$x > 0$ であるから，それぞれを x 倍すると　$x\cos^2\dfrac{1}{n} \leqq x\cos^2 x \leqq x\cos^2 0$

それぞれを 0 から $\dfrac{1}{n}$ の範囲で積分すると

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2\frac{1}{n}dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 0 dx$$

それぞれを n^2 倍して

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2\frac{1}{n}dx \leqq n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx \leqq n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 0 dx \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

① について

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2\frac{1}{n}dx = n^2\cos^2\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{n}} x dx = n^2\cos^2\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2\cos^2\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{n}$$

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 x dx = n^2 a_n$$

$$n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cos^2 0 dx = n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x\cdot 1^2 dx = n^2\int_0^{\frac{1}{n}} x dx = n^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2\cdot\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

であるから

① $\iff$ $\dfrac{1}{2}\cos^2\dfrac{1}{n} \leqq n^2 a_n \leqq \dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots\cdots$②

② について $n \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{n} \to 0$ だから，$\cos\dfrac{1}{n} \to 1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

よって，はさみうちの原理により，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{2}\ /\!/$

(旭川医大)

演習問題　No.5

数 III

n を自然数とし，$f_n(x)=\dfrac{2nx}{x^2+n^2}$ $(x \geqq 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f_n(x)$ のグラフをかけ。変曲点も求めること。

(2) 2 曲線 $y=f_n(x)$, $y=f_{n+1}(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

—解答例—

$f_n(x)=\dfrac{2nx}{x^2+n^2}$ $(x \geqq 0)$ を x について微分すると

$$f_n'(x)=\frac{2n(x^2+n^2)-2nx\cdot 2x}{(x^2+n^2)^2}=\frac{-2nx^2+2n^3}{(x^2+n^2)^2}=\frac{-2n(x+n)(x-n)}{(x^2+n^2)^2}$$

$$\begin{aligned}f_n''(x)&=\frac{-4nx(x^2+n^2)^2-(-2nx^2+2n^3)\cdot 2(x^2+n^2)\cdot 2x}{(x^2+n^2)^4}\\&=\frac{(x^2+n^2)\{-4nx(x^2+n^2)-(-2nx^2+2n^3)\cdot 2\cdot 2x\}}{(x^2+n^2)^4}=\frac{-4nx(x^2+n^2-2x^2+2n^2)}{(x^2+n^2)^3}\\&=\frac{4nx(x^2-3n^2)}{(x^2+n^2)^3}=\frac{4nx(x+\sqrt{3}n)(x-\sqrt{3}n)}{(x^2+n^2)^3}\end{aligned}$$

$x \geqq 0$ における増減表をかくと

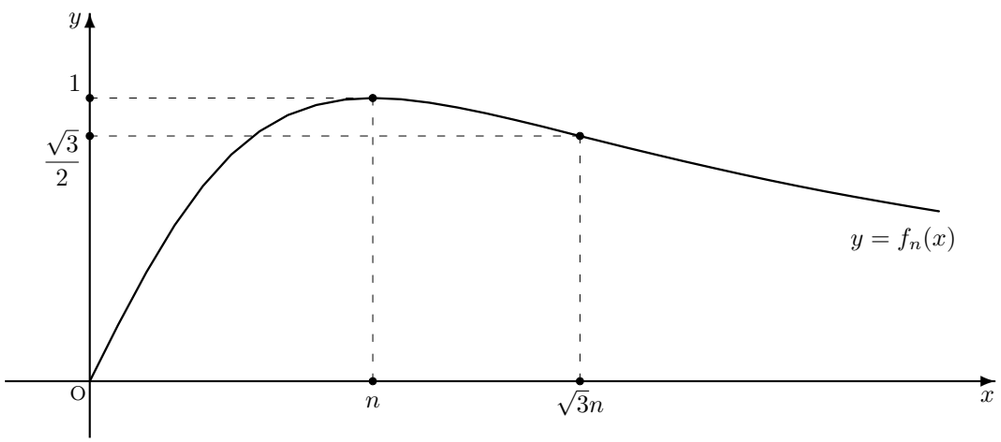
$$f_n(n)=\frac{2n\cdot n}{n^2+n^2}=1$$

$$f_n(\sqrt{3}n)=\frac{2n\cdot\sqrt{3}n}{(\sqrt{3}n)^2+n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2nx}{x^2+n^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2n}{x}}{1+\frac{n^2}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$	$\sqrt{3}n$	$\cdots$	∞
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f_n''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	↱	1	⤵	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⤷	0

変曲点は $\left(\sqrt{3}n,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，$y=f_n(x)$ のグラフは次のようになる。



//

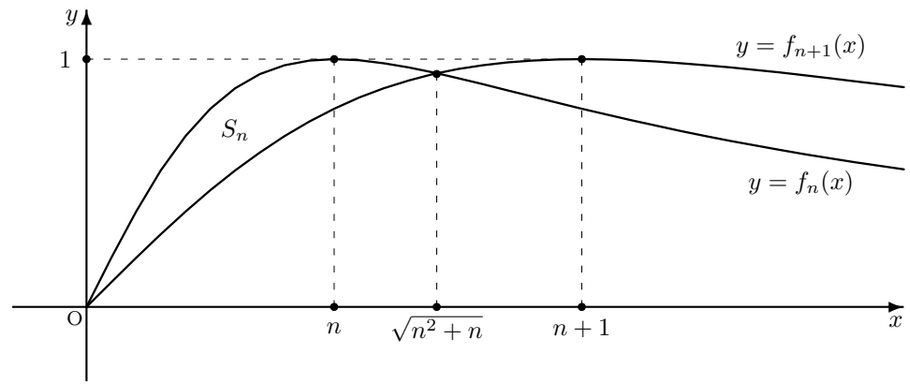
—解答例—

(2) $$\begin{aligned}f_{n+1}(x)-f_n(x)&=\frac{2(n+1)x}{x^2+(n+1)^2}-\frac{2nx}{x^2+n^2}=\frac{2(n+1)x(x^2+n^2)-2nx\{x^2+(n+1)^2\}}{\{x^2+(n+1)^2\}(x^2+n^2)}\\&=\frac{2x\{(n+1)(x^2+n^2)-n\{x^2+(n+1)^2\}\}}{\{x^2+(n+1)^2\}(x^2+n^2)}\\&=\frac{2x\{(n+1)x^2+(n+1)n^2-nx^2-n(n+1)^2\}}{\{x^2+(n+1)^2\}(x^2+n^2)}=\frac{2x(x^2-n^2-n)}{\{x^2+(n+1)^2\}(x^2+n^2)}\\&=\frac{2x(x+\sqrt{n^2+n})(x-\sqrt{n^2+n})}{\{x^2+(n+1)^2\}(x^2+n^2)}\end{aligned}$$

これより 2 曲線は $f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$ すなわち，$x=\sqrt{n^2+n}$ のときに交わる。

$0 \leqq x \leqq \sqrt{n^2+n}$ において，$f_{n+1}(x)-f_n(x)<0$ すなわち，$f_{n+1}(x)<f_n(x)$ であり，

S_n をグラフに図示すると下図のようになる。



$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\sqrt{n^2+n}}\left\{\frac{2nx}{x^2+n^2}-\frac{2(n+1)x}{x^2+(n+1)^2}\right\}dx=\int_0^{\sqrt{n^2+n}}\left\{\frac{n(x^2+n^2)'}{x^2+n^2}-\frac{(n+1)\{x^2+(n+1)^2\}'}{x^2+(n+1)^2}\right\}dx\\&=\Big[\,n\log(x^2+n^2)-(n+1)\log\{x^2+(n+1)^2\}\,\Big]_0^{\sqrt{n^2+n}}\\&=\{n\log(2n^2+n)-(n+1)\log(2n^2+3n+1)\}-\{n\log n^2-(n+1)\log(n+1)^2\}\\&=n\log(2n+1)n-(n+1)\log(2n+1)(n+1)-2n\log n+2(n+1)\log(n+1)\\&=n\log(2n+1)+n\log n-(n+1)\log(2n+1)-(n+1)\log(n+1)-2n\log n+(2n+2)\log(n+1)\\&=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(2n+1)=\log(n+1)^{n+1}-\log n^n-\log(2n+1)\\&=\log\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+1)n^n}\end{aligned}$$ //

(3) $$S_n=\log\frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n+1)n^n}=\log\left\{\frac{n+1}{2n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}=\log\left\{\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log\left(\frac{1+0}{2+0}\cdot e\right)=\log\frac{e}{2}=1-\log 2$ //

(2009 年 静岡大学)

演習問題　No.6

数 III

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくとき，次の (1)〜(3) の問いに答えなさい。

(1) I_{n+2} と I_n の間の関係式を求めよ。

(2) $I_{n+1}I_n$ を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ であることを示せ。

—解答例—

(1) $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n+1} x\,dx$

$$= \Big[(-\cos x)\sin^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(n+1)\sin^n x\cos x\,dx$$

$$= \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\frac{\pi}{2} - \left(-\cos 0\right)\sin^{n+1} 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^2 x\,dx$$

$$= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} x\,dx\right) = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$\therefore\ I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$　すなわち，$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ //

(2)　$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ の両辺に I_{n+1} をかけると

$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$

これは数列 $\{(n+1)I_{n+1}I_n\}$ が定数数列 (公比 1 の等比数列) であることを意味しているから，

$$(n+1)I_{n+1}I_n = 1\cdot I_1\cdot I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos 0\right)\right\}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \{0-(-1)\}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad //$$

[別解]　$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \iff I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n \iff I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}$

この両辺に I_n をかけると $I_{n+1}I_n = \frac{n}{n+1}I_nI_{n-1}$ であるから，これを繰り返し用いると

$$I_{n+1}I_n = \frac{n}{n+1}I_nI_{n-1} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}I_{n-1}I_{n-2} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}I_{n-3} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}I_1I_0 = \frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \cdots = \frac{\pi}{2(n+1)} \quad //$$

—解答例—

(3)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \sin x \leqq 1$

この x の範囲で $\sin^n x \geqq \sin^{n+1} x$ であるから，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \geqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx$

$\therefore\ I_n \geqq I_{n+1}$　これより $I_{n+1} \leqq I_n \iff I_n \leqq I_{n-1}$

この両辺に I_n をかけると，$I_n^2 \leqq I_nI_{n-1}$

(2) より，$I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ なので $0 \leqq I_n^2 \leqq \frac{\pi}{2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n} = 0$ であるからはさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} I_n^2 = 0$　$\therefore\ \lim_{n\to\infty} I_n = 0$ //

(神戸大学)

[参考 1]　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$

(1) の結果 $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ を繰り返し用いることで

n が偶数のとき $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n が奇数のとき $I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$

が成り立つことがわかるので、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{16}{35}$　や　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$

のような計算 (高校の範囲外なので反則技) ができる。また，

$$I_{2m}I_{2m+1} = \left(\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)$$

$= \frac{1}{2m+1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(2m+1)}$　は (2) と同じ意味です。(n を $2m$ に変えただけ。)

[参考 2]　定積分と漸化式の例

① $I_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx$ とおくと，$I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1}\,dx = \int_1^e 1\cdot(\log x)^{n+1}\,dx$

$$= \Big[x\cdot(\log x)^{n+1}\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n\,dx = e - (n+1)I_n$$

② $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とおくと，$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\cdot(\tan x)'dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \cdots = \frac{1}{n+1}$$

演習問題　No.7

数 III

$f(x)=xe^{-x}$　について次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ での $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ である。

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^m f(x)dx=\frac{1}{2}$ をみたす正数 m は $1<m<2$ の範囲にあることを示せ。

—解答例—

(1)　$f(x)=xe^{-x}$ より $f'(x)=1\cdot e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

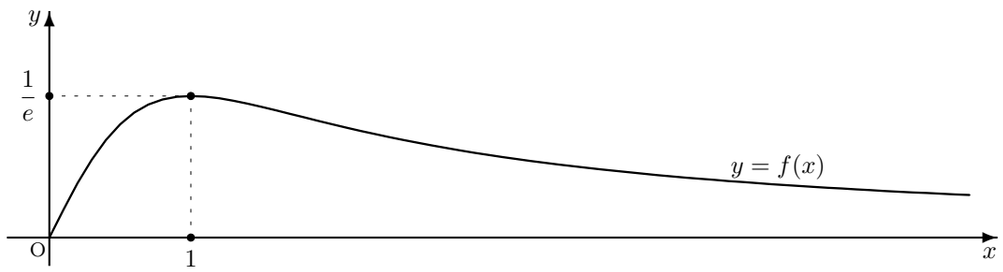
$f(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$，$f(0)=0$

$x>0$ で $f(x)=xe^{-x}>0$ である。また，題意より

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ であるから増減表をかくと以下のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

増減表よりグラフをかくと



以上より，

$x=1$ のとき，最大値 $\frac{1}{e}$

$x=0$ のとき，最小値 0　//

(2)　$\int_0^n f(x)dx=\int_0^n xe^{-x}\,dx=\Big[\,x(-e^{-x})\,\Big]_0^n-\int_0^n 1\cdot(-e^{-x})\,dx$

$$=-ne^{-n}+\int_0^n e^{-x}\,dx=-ne^{-n}+\Big[\,-e^{-x}\,\Big]_0^n=-ne^{-n}-e^{-n}+1$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}(-ne^{-n}-e^{-n}+1)=\lim_{n\to\infty}(-\frac{n}{e^n}-\frac{1}{e^n}+1)=-0-0+1=1$　//

—解答例—

(3)　$(proof)$

$h(m)=\int_0^m f(t)dt-\frac{1}{2}$　$(m>0)$ とおく。

$h'(m)=\frac{d}{dm}\left(\int_0^m f(t)dt-\frac{1}{2}\right)=\frac{d}{dm}\int_0^m f(t)dt-\left(\frac{1}{2}\right)'=f(m)=me^{-m}>0$　$(\because$ (1) のグラフ$)$

よって $h(m)$ は増加関数であり，

(2) より $\int_0^m f(x)dx=-me^{-m}-e^{-m}+1$ であるから

$h(1)=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2}=-1\cdot e^{-1}-e^{-1}+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{2}{e}=\frac{e-4}{2e}<0$

（$\because e=2.7182\cdots$　なので $e-4<0$ である。）

$h(2)=\int_0^2 f(x)dx-\frac{1}{2}=-2\cdot e^{-2}-e^{-2}+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{e^2}=\frac{e^2-6}{2e^2}>0$

（$\because e=2.7182\cdots$　なので $e^2>(2.7)^2=7.29$ より，$e^2-6>0$ である。）

$h(1)$ と $h(2)$ は符号が異なるから方程式 $h(m)=0$ は $1<m<2$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ。

$h(m)=0 \iff \int_0^m f(t)dt-\frac{1}{2}=0$　なので

$\int_0^m f(x)dx=\frac{1}{2}$ をみたす正数 m は $1<m<2$ の範囲にある。

$(q.e.d.)$

(1990 年 筑波大学)

$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ の証明

$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$x>0$ で $f'(x)=e^x-1>0$　ゆえに $x>0$ で $f(x)$ は増加関数。

また，$f(0)=0$ なので $x>0$ で $f(x)=e^x-(1+x)>0$ が成り立つ。

$g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ とおくと $x>0$ で $g'(x)=f(x)=e^x-(1+x)>0$ が成り立ち，

$x>0$ で $g(x)$ は増加関数。また，$g(0)=0$ なので $x>0$ で $g(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)>0$ が成り立つ。

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$　より，$e^x>\frac{x^2}{2}$

$\frac{x^2}{2}<e^x \iff \frac{x^2}{e^x}<2 \iff \frac{x}{e^x}<\frac{2}{x} \iff xe^{-x}<\frac{2}{x}$

$\therefore\ 0<xe^{-x}<\frac{2}{x}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから、はさみうちの原理により，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ が成り立つ。

$(q.e.d.)$

演習問題　No.8

数 III

関数 $y=f(x)=x^2-2$ で示される曲線上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする $(n=1,\ 2,\ \cdots)$。このようにして得られる数列 $\{x_n\}$ について，つぎの問いに答えよ。

(1)　x_{n+1} を x_n を用いて表せ。

(2)　$x_n>0$ で，$x_n\neq\sqrt{2}$ ならば，$x_{n+1}>\sqrt{2}$ であることを示せ。

(3)　$x_1>0$ で，$x_1\neq\sqrt{2}$ ならば，$n\geqq 2$ のとき，$x_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2}(x_n-\sqrt{2})$ であることを示せ。

(4)　$x_1>0$ で，$x_1\neq\sqrt{2}$ ならば，数列 $\{x_n\}$ は $n\geqq 2$ のとき単調減少で，$\sqrt{2}$ に収束することを示せ。

—解答例—

(1)　$f'(x)=2x$ より

点 $(x_n\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

$$y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n)$$

$$y=2x_nx-2x_n^2+(x_n^2-2)$$

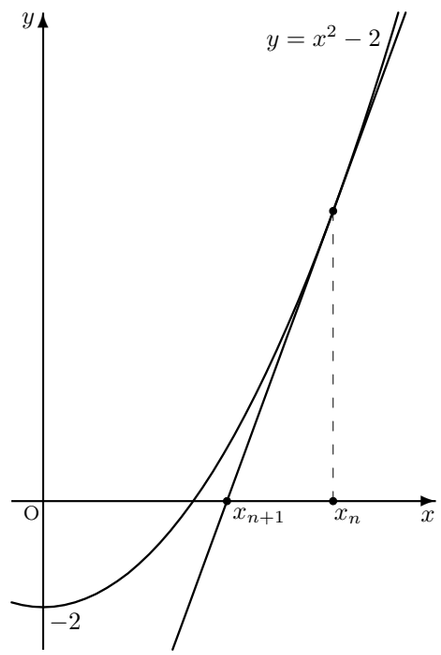
$$y=2x_nx-x_n^2-2\quad\cdots①$$

接線 ① と x 軸の交点が $(x_{n+1},\ 0)$ になるので

$$0=2x_nx_{n+1}-x_n^2-2$$

$$2x_nx_{n+1}=x_n^2+2$$

$$x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}\quad //$$



(2)　$(proof)$

$x_n>0$ で，$x_n\neq\sqrt{2}$ のとき，

(左辺)−(右辺)$=x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{x_n^2+2}{2x_n}-\sqrt{2}=\dfrac{x_n^2+2-2\sqrt{2}x_n}{2x_n}=\dfrac{x_n^2-2\sqrt{2}x_n+2}{2x_n}$

$$=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}>0$$

よって $x_{n+1}-\sqrt{2}>0$ が成り立つので $x_{n+1}>\sqrt{2}$ が示された。

$(q.e.d.)$

—解答例—

(3)　$(proof)$　$x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}=\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}\cdot(x_n-\sqrt{2})\quad\cdots\cdots\cdots②$

ここで　$\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}=\dfrac{x_n}{2x_n}-\dfrac{\sqrt{2}}{2x_n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2x_n}<\dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}<\dfrac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots③$

また，(2) より，$n\geqq 2$ で $x_n-\sqrt{2}>0$　なので，② と③ から

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}\cdot(x_n-\sqrt{2})<\frac{1}{2}\cdot(x_n-\sqrt{2})$$

すなわち　$x_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{1}{2}\cdot(x_n-\sqrt{2})$　が成り立つ。　$(q.e.d.)$

(4)　$(proof)$　$x_1>0$ で，$x_1\neq\sqrt{2}$ のとき，(2),(3) より $n\geqq 2$ で

$$x_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\cdot(x_n-\sqrt{2})<x_n-\sqrt{2}$$

$\therefore\ x_{n+1}-\sqrt{2}<x_n-\sqrt{2}$ であり，$x_{n+1}<x_n$

ゆえに $n\geqq 2$ において数列 $\{x_n\}$ は単調減少である。また，

$$0<x_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2}\cdot(x_{n-1}-\sqrt{2})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x_{n-2}-\sqrt{2})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x_{n-3}-\sqrt{2})$$

$$0<x_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^1(x_{n-1}-\sqrt{2})<\left(\frac{1}{2}\right)^2(x_{n-2}-\sqrt{2})<\left(\frac{1}{2}\right)^3(x_{n-3}-\sqrt{2})$$

$$0<x_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^1(x_{n-1}-\sqrt{2})<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-\sqrt{2})$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2-\sqrt{2})=0$ なので，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{2})=0$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$$

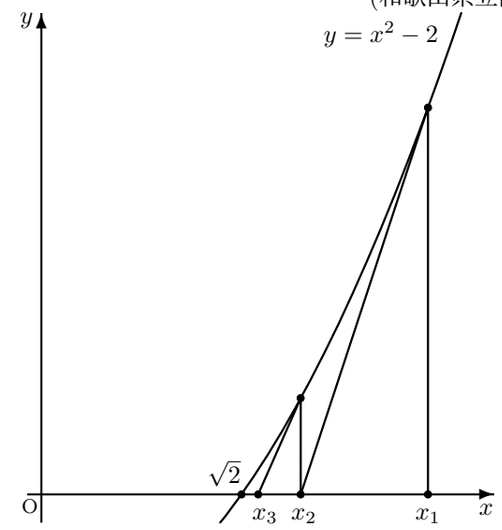
以上より，数列 $\{x_n\}$ は $\sqrt{2}$ に収束することが示された。　$(q.e.d.)$

(和歌山県立医大)

[参考]

(4) のように $f(x)=0$ の解である $\sqrt{2}$ の近似値を計算する手法を「ニュートン法」といいます。

（何回も計算を繰り返すことによって精度があがります。）



演習問題　No.9

数 III

$n=1,2,3,\cdots$ に対して

$$S_n=\int_0^1 x^{2n+1}e^{-x^2}dx$$

とおく。以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $I=\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ および，S_1 の値を求めよ。

(2) S_{n+1} を S_n を用いて表せ。

(3) $T_n=\dfrac{S_n}{n!}$ とおくとき，T_{n+1} を T_n を用いて表せ。

(4) S_n を求めよ。　（必要ならば和の記号 $\sum$ を用いてよい）

(5) n が 1 以上の整数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{(n+1)!}<e-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)!}$$

—解答例—

(1) $I=\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}(-x^2)'\,dx=-\frac{1}{2}\Big[\,e^{-x^2}\,\Big]_0^1=-\frac{1}{2}\{-e^{-1}-(-e^0)\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$ //

$S_1=\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}\,dx$

$t=x^2$ とおくと $dt=2x\,dx$

x	$0\to1$
t	$0\to1$

$S_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 te^{-t}2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}\,dt$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\Big[\,t(-e^{-t})\,\Big]_0^1-\displaystyle\int_0^1 1\cdot e^{-t}dt\right\}=\dfrac{1}{2}\left(-e^{-1}-0+\displaystyle\int_0^1 e^{-t}dt\right)=\dfrac{1}{2}\left(-e^{-1}+\Big[\,-e^{-t}\,\Big]_0^1\right)$

$=\dfrac{1}{2}\{-e^{-1}+(-e^{-1})-(-e^0)\}=\dfrac{1}{2}(1-2e^{-1})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}$ //

point

$(e^{-x^2})'=e^{-x^2}(-x^2)'$

$=-2xe^{-x^2}$ より

$\leftarrow\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)'=xe^{-x}$

(2) $S_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{2n+3}e^{-x^2}dx=\int_0^1 x^{2n+2}\cdot xe^{-x^2}dx$

(1) の I の計算から $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ （C は積分定数）

これより部分積分を用いると

$S_{n+1}=\left[\,x^{2n+2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\right)\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1(2n+2)x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx$

$=-\dfrac{1}{2}e^{-1}+(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2e}+(n+1)S_n$

$S_{n+1}=(n+1)S_n-\dfrac{1}{2e}$ //　$\cdots\cdots\cdots$①

(3) ① の両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{S_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{(n+1)S_n}{(n+1)n!}-\dfrac{1}{2e(n+1)!}$

$\dfrac{S_{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{S_n}{n!}-\dfrac{1}{2e(n+1)!}$　なので　$T_{n+1}=T_n-\dfrac{1}{2e(n+1)!}$ //　$\cdots\cdots\cdots$②

—解答例—

(4)　② より数列 $\{T_n\}$ の階差数列が $-\dfrac{1}{2e(n+1)!}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$T_n=T_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2e(k+1)!}\right)$　　← (1) より，$T_1=\dfrac{S_1}{1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2e}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\cdot2-\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}\left(2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e}\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{1}{2e}\cdot e-\frac{1}{2e}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{1}{2e}\left(e-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)$

この T_n の式に $n=1$ を代入すると $T_1=\dfrac{1}{2e}\left(e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k!}\right)=\frac{1}{2e}\left(e-1-\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

よって $n=1$ のときも成り立つ。

$\therefore\ S_n=n!T_n=n!\cdot\dfrac{1}{2e}\left(e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\frac{n!}{2e}\left(e-1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ //

(5)　$(proof)$　(4) より $S_n=\dfrac{n!}{2e}\left(e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\right)\iff e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{2e}{n!}S_n$　$\cdots\cdots\cdots$③

$0\leqq x\leqq1\iff0\leqq x^2\leqq1\iff-1\leqq-x^2\leqq0$

底 e は 1 より大きいから $e^{-1}\leqq e^{-x^2}\leqq e^0$

この不等式を x^{2n+1} 倍すると　$x^{2n+1}e^{-1}\leqq x^{2n+1}e^{-x^2}\leqq x^{2n+1}e^0$

この不等式を 0 から 1 まで積分することによって

$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}e^{-1}dx<\int_0^1 x^{2n+1}e^{-x^2}dx<\int_0^1 x^{2n+1}e^0dx$　$\cdots\cdots\cdots$④

が成り立つ。④ について

$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}e^{-1}dx=\frac{1}{e}\int_0^1 x^{2n+1}dx=\frac{1}{e}\left[\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\,\right]_0^1=\frac{1}{2e(n+1)}$

$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}e^{-x^2}dx=S_n$,　$\displaystyle\int_0^1 x^{2n+1}e^0dx=\left[\,\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\,\right]_0^1=\frac{1}{2(n+1)}$

よって，④ $\iff\dfrac{1}{2e(n+1)}<S_n<\dfrac{1}{2(n+1)}$ となるので両辺を $\dfrac{2e}{n!}$ 倍すると

$\dfrac{2e}{n!}\cdot\dfrac{1}{2e(n+1)}<\dfrac{2e}{n!}\cdot S_n<\dfrac{2e}{n!}\cdot\dfrac{1}{2(n+1)}$

③ より $\dfrac{1}{(n+1)n!}<e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)n!}$

ゆえに $\dfrac{1}{(n+1)!}<e-1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{e}{(n+1)!}$ が成り立つことが示された。　$(q.e.d.)$

(2009 年 電気通信大学)

演習問題　No.10

数 C

a を実数とする。行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の各問に答えよ。

(1) 行列 $E-A$ が逆行列を持つかどうか調べよ。また，逆行列を持つ場合にはそれを求めよ。

(2) A^n を求めよ。$(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $S_n=E+A+A^2+\cdots+A^n$ とおくとき，S_n を求めよ。$(n=1,2,3,\cdots)$

—解答例—

(1) $E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a & -1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$

$det(E-A)=(1-a)(1-a)-(-1)\cdot 0=(1-a)^2$ であるから

$(1-a)^2=0$ すなわち $a=1$ のとき，$E-A$ は逆行列をもたない。

$a\neq 1$ のとき，$E-A$ は逆行列をもつ

その逆行列は $(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$ である。//

(2) A についてケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-2aA+a^2E=O$

$(A-aE)^2=O$ ……①

① で $A-aE=B$ とおくと　$B^2=O$ なので $B^3=O,\ B^4=O,\ B^5=O,\ \cdots,B^n=O$ ……②

また，$A-aE=B \iff A=aE+B$ ……③

$n\geqq 2$ のとき　③ より，

$A^n=(aE+B)^n$

$={}_nC_0(aE)^n+{}_nC_1(aE)^{n-1}B^1+{}_nC_2(aE)^{n-2}B^2+{}_nC_3(aE)^{n-3}B^3+\cdots+{}_nC_nB^n$

② より上の式の右辺は第 3 項以降がすべて O になるから

$A^n={}_nC_0(aE)^n+{}_nC_1(aE)^{n-1}B^1+O+\cdots+O=a^nE^n+na^{n-1}E^{n-1}B$

$=a^nE+na^{n-1}E(A-aE)=a^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+na^{n-1}\left\{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}-a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

$n=1$ のときも成り立つので求める A^n は　$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ //

[(2) 別解]　$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$ を計算した結果，$A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ と推測できる。

[I] $n=1$ のとき，$A=A^1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で成り立つ。

[II] $n=k$ のとき，すなわち $A^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ が成り立つと仮定すると

$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$ より $n=k \implies n=k+1$ が成り立つ。

[I],[II] が成り立つので数学的帰納法により，すべての自然数 n について $A^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ が成り立つ。//

—解答例—

(3) $S_n=E+A+A^2+\cdots+A^n$ ……④

④ の両辺に左から行列 A をかけて

$AS_n=A+A^2+A^3+\cdots+A^{n+1}$ ……⑤

④ − ⑤ より，$S_n-AS_n=E-A^{n+1}$　$\therefore$　$(E-A)S_n=E-A^{n+1}$ ……⑥

(i) $a\neq 1$ のとき，$E-A$ は逆行列をもつから⑥ の両辺に左から $(E-A)^{-1}$ をかけて

$S_n=(E-A)^{-1}(E-A^{n+1})=\dfrac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}\right\}$

$=\dfrac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a^{n+1} & -(n+1)a^n \\ 0 & 1-a^{n+1} \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} (1-a)(1-a^{n+1}) & 1-(n+1)a^n+na^{n+1} \\ 0 & (1-a)(1-a^{n+1}) \end{pmatrix}$

(ii) $a=1$ のとき

$S_n=E+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$

以上 (i),(ii) より，求める S_n は

$a\neq 1$ のとき，$S_n=\dfrac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} (1-a)(1-a^{n+1}) & 1-(n+1)a^n+na^{n+1} \\ 0 & (1-a)(1-a^{n+1}) \end{pmatrix}$

$a=1$ のとき，$S_n=\begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$ //

[(3) 別解]　そのまま和を考えると

$S_n=E+A+A^2+\cdots+A^n$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a^3 & 2a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n & 0+1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1} \\ 0 & 1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n \end{pmatrix}$　各成分で計算する。

$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & (a\neq 1) \quad \leftarrow \text{初項 } 1, \text{公比 } a, \text{項数 } n+1 \text{ の等比数列の和} \\ n+1 & (a=1) \quad \leftarrow \text{初項 } 1, \text{項数 } n+1 \text{ の定数数列の和} \end{cases}$

$1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}=\begin{cases} \dfrac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2} & (a\neq 1) \quad \leftarrow T_n \text{とおいて } T_n-aT_n \text{を計算する} \\ \dfrac{1}{2}n(n+1) & (a=1) \quad \leftarrow 1+2+3+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k \end{cases}$

以上より求める S_n は

$a\neq 1$ のとき，$S_n=\begin{pmatrix} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \dfrac{1-(n+1)a^n+na^{n+1}}{(1-a)^2} \\ 0 & \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{pmatrix}$，$a=1$ のとき，$S_n=\begin{pmatrix} n+1 & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}$ //

(2011 年 茨城大学)

演習問題　No.11

数 C

実数 a に対し，$A=\begin{pmatrix}1 & a-2\\ a+1 & -3\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての a に対して A が逆行列をもつことを示し，A の逆行列を求めよ。

(2) $E-A$ が逆行列をもたないような a の値を求めよ。

以下では，a を (2) で求めた値のうち正のものとする。

(3) $A\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}$ となる b を求めよ。また，$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ となる k を求めよ。

(4) b を (3) で求めた値とし，$P=\begin{pmatrix}b & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ とする。$AP=PQ$ となる 2 次の正方行列 Q を求めよ。

(5) 自然数 n に対して A^n を求めよ。

—解答例—

(1) $detA=1\cdot(-3)-(a-2)(a+1)=-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$

であるから任意の実数 a に対して $detA\neq 0$ したがって A は逆行列をもち，

$$A^{-1}=\frac{1}{-a^2+a-1}\begin{pmatrix}-3 & -(a-2)\\ -(a+1) & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-a+1}\begin{pmatrix}3 & a-2\\ a+1 & -1\end{pmatrix}\quad /\!/$$

(2) $E-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a-2\\ a+1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -a+2\\ -a-1 & 4\end{pmatrix}$

$det(E-A)=0\cdot 4-(-a+2)(-a-1)=-(a-2)(a+1)$

であるから $E-A$ が逆行列をもたないような実数 a は $det(E-A)=0$ より

$$a=2,\ -1\quad /\!/$$

(3) $a=2$ より，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ である。

題意より $A\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}b\\3b-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\3\end{pmatrix}\quad\therefore\ 3b-9=3$

$b=4$

また，$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}\quad\therefore\ k=-3$

以上より，$b=4,\ k=-3$ $/\!/$

(4) $b=4$ なので $P=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ より $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

$AP=PQ\iff Q=P^{-1}AP$ を用いると

$$Q=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\quad /\!/$$

—解答例—

[(4) 別解]　$P=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ であり，$Q=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$ とおく。

$$AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix},\qquad PQ=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4p & 4q\\ 3p+r & 3q+s\end{pmatrix}$$

$AP=PQ$ より，各成分が等しいので $4p=4,\ 4q=0,\ 3p+r=3,\ 3q+s=-3$

これを解くと $p=1,\ q=0,\ r=0,\ s=-3$ であるから $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ $/\!/$

(5) $AP=PQ\iff A=PQP^{-1}$ であるから

$$A^n=(PAP^{-1})^n=\underbrace{(PQP^{-1})(PQP^{-1})(PQP^{-1})\cdots(PQP^{-1})(PQP^{-1})}_{PQP^{-1}\text{が } n \text{ 個}}$$

$$=PQP^{-1}PQP^{-1}PQP^{-1}\cdots PQP^{-1}PQP^{-1}$$

$$=PQ(P^{-1}P)Q(P^{-1}P)Q(P^{-1}P)\cdots(P^{-1}P)Q(P^{-1}P)QP^{-1}$$

$$=PQEQEQE\cdots EQEQP^{-1}\qquad(\because\ P^{-1}P=E)$$

$$=P\underbrace{QQQ\cdots QQ}_{Q\text{ が } n \text{ 個}}P^{-1}=PQ^nP^{-1}$$

$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ より，$Q^n=\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$ だから

$$A^n=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ (-3)^{n+1} & 4(-3)^n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3+(-3)^{n+1} & 4(-3)^n\end{pmatrix}\quad /\!/$$

(2010 年 電気通信大学)

$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の証明

[I] $n=1$ のとき，$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^1 & 0\\ 0 & b^1\end{pmatrix}$ で成り立つ。

[II] $n=k$ のとき，すなわち $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}a^k & 0\\ 0 & b^k\end{pmatrix}$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^k & 0\\ 0 & b^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^{k+1} & 0\\ 0 & b^{k+1}\end{pmatrix}$$

$\therefore\ n=k\implies n=k+1$ が成り立つ

[I],[II] が成り立つので数学的帰納法により，すべての自然数 n について $A^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$ が成り立つ。

$(q.e.d.)$

演習問題　No.12

数 C

実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(u,\ v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，行列 A によって点 P は点 Q に移るという。

点 $(1,\ 3)$ は行列 A により点 $(10,\ 10)$ に移り，さらに等式

$$A^2-7A+10E=0$$

が成り立つものとする。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A により $(10,\ 10)$ が移る点の座標を求めよ。

(2) 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ。

(3) 次の条件 $(*)$ をみたす直線 l の方程式を求めよ。

$(*)$ 直線 l 上のすべての点が行列 A により l 上の点に移る。

—解答例—

(1) $(1,\ 3)$ は行列 A により $(10,\ 10)$ に移るので $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ……①

また，$A^2-7A+10E=0 \iff A^2=7A-10E$ ……②

① の両辺に左から A をかけると② を代入できる。

$$A\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (7A-10E)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 10E\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 7\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 70 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ A\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$$

よって求める点の座標は $(60,\ 40)$ //

(2) ① より $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, (1) より $A\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$ から

$A\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$　　ここで $\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-20}\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ だから

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 80 & 40 \\ 20 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

よって $a=4,\ b=2,\ c=1,\ d=3$ //

—解答例—

(3) 直線 l の方程式は，$x=k$ または $y=mx+n$ とおける。

(i) l が $x=k$ のとき l 上の点は $(k,\ t)$ とおける。(t は実数)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+2t \\ k+3t \end{pmatrix}$$

条件 $(*)$ より点 $(4k+2t,\ k+3t)$ は $l: x=k$ 上にあるから

$4k+2t=k$ すなわち $t=-\dfrac{3}{2}k$ ……③

よって 1 つの k の値に対して 1 つの t の値が決まるので，(t の恒等式にならない)

任意の実数 t に対して ③ が成立する k は存在しない。

したがって l が $x=k$ の式のとき，$(*)$ の条件を満たさない。

(ii) l が $y=mx+n$ のとき，l 上の点は $(t,\ mt+n)$ とおける。(t は実数)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t+2mt+2n \\ t+3mt+3n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4+2m)t+2n \\ (1+3m)t+3n \end{pmatrix}$$

条件 $(*)$ より点 $((4+2m)t+2n,\ (1+3m)t+3n)$ は $l: y=mx+n$ 上にあるから

$$(1+3m)t+3n = m\{(4+2m)t+2n\}+n$$

$$(1+3m)t+3n = m(4+2m)t+2mn+n$$

この式が任意の実数 t に対して成立する条件は係数を比較して　(t の恒等式)

$$\begin{cases} 1+3m = m(4+2m) & \cdots\cdots\cdots ④ \\ 3n = 2mn+n & \cdots\cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

④ を解く　$1+3m=4m+2m^2$

$$2m^2+m-1=0$$

$$(2m-1)(m+1)=0$$

$$m=\frac{1}{2},\ -1$$

⑤ を解く　$3n=2mn+n$

$$2mn-2n=0$$

$$2n(m-1)=0$$

$m=\dfrac{1}{2},\ -1$ なので $n=0$　　$\therefore\ (m,\ n)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ (-1,\ 0)$

以上 (i),(ii) より，求める直線 l の方程式は $y=\dfrac{1}{2}x$ と $y=-x$ //

(2011 年 筑波大学)