

例題 1

関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は $x = 0$ で連続であるか。また $x = 0$ で微分可能であるか。

① $x = a$ で連続 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立するか調べる。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ と $f(a)$ は別物として考える。

② $x = a$ で微分可能 $\rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ の存在を調べる。

— 解答例 —

$$x \neq 0 \text{ で, } 0 < \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \quad x^2 > 0 \text{ より}$$

$$0 < \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ なので, はさみうちの原理より } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

また, $f(0) = 0$ より, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ となり, $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。 //

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ここで } 0 < \left| \sin \frac{1}{h} \right| \leq 1, \quad |h| > 0 \text{ より}$$

$$0 < |h| \cdot \left| \sin \frac{1}{h} \right| \leq |h|$$

$$\text{すなわち } 0 < h \sin \frac{1}{h} \leq |h|$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \text{ なので, はさみうちの原理より}$$

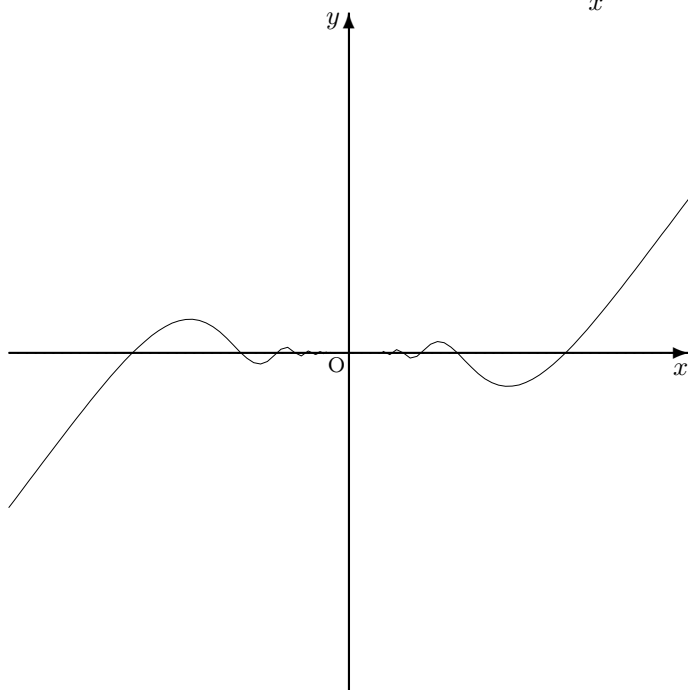
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| h \sin \frac{1}{h} \right| = 0$$

$$\text{ゆえに } \textcircled{1} \text{ は } \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

よって $f'(0)$ が存在するので,

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である。 //

(参考) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$



例題 2

関数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は $x = 0$ で連続であるか。また $x = 0$ で微分可能であるか。

— 解答例 —

$x \neq 0$ で、 $0 < \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ 、 $|x| > 0$ より

$$0 < |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad \text{すなわち} \quad 0 < \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ なので、はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

また、 $f(0) = 0$ より、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ となり、 $f(x)$ は $x = 0$ で連続である。 //

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$$

$\sin \frac{1}{h}$ は $h \rightarrow 0$ のとき、 1 と -1 の間で振動して

収束しないので $\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ は存在しない。

よって $f'(0)$ が存在しないので、

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でない。 //

