

時刻 t における座標が $x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = \sin 2t$ で表される xy 平面上の点 P の運動を考える.

- (1) P の速さ, すなわち速度ベクトル $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ の大きさの最大値と最小値を求めよ.
- (2) t が $0 \leq t < 2\pi$ の範囲を動く間に P が 2 回以上通過する点が唯一つ存在することを示し, その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ.

— 解答例 —

(1) $x(t) = 2 \cos t + \cos 2t$, $y(t) = \sin 2t$ とおく,

また, $x(t), y(t)$ を t について微分した関数をそれぞれ $x'(t), y'(t)$ とおく。

$$x'(t) = -2 \sin t - \sin 2t \cdot 2 = -2(\sin t + \sin 2t), \quad y'(t) = \cos 2t \cdot 2 = 2 \cos 2t$$

速度ベクトルの大きさの 2 乗を $V(t)$ とおくと

$$V(t) = \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 = \{-2(\sin t + \sin 2t)\}^2 + (2 \cos 2t)^2$$

$$= 4(\sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) + 4 \cos^2 2t$$

$$\frac{V(t)}{4} = \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 2t = (1 - \cos^2 t) + 2 \sin t \cdot 2 \sin t \cos t + 1$$

$$= 1 - \cos^2 t + 4 \sin^2 t \cos t + 1 = 2 - \cos^2 t + 4(1 - \cos^2 t) \cos t$$

$$= 2 - \cos^2 t + 4 \cos t - 4 \cos^3 t = -4 \cos^3 t - \cos^2 t + 4 \cos t + 2$$

$\cos t = X$ において $f(X) = -4X^3 - X^2 + 4X + 2$ ($-1 \leq X \leq 1$) を考える。

$$f'(X) = -12X^2 - 2X + 4 = -2(6X^2 + X - 2) = -2(3X + 2)(2X - 1)$$

X	...	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...
$f'(X)$	-	-	-	0	+	0	-	-	-
$f(X)$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$

$$f(-1) = 4 - 1 - 4 + 2 = 1$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{27} - \frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{2}{27}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 + 2 = \frac{13}{4}$$

$$f(1) = -4 - 1 + 4 + 2 = 1$$

増減表より, $f(X)$ の最大値は $\frac{13}{4}$, 最小値は $\frac{2}{27}$ であるから $V(t)$ の最大値は 13, 最小値は $\frac{8}{27}$

よって速度ベクトルの大きさは, $\cos t = \frac{1}{2}$ すなわち $t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{13}$

$\cos t = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ をとる。 //

(2) $x'(t) = -2(\sin t + \sin 2t) = -2(\sin t + 2 \sin t \cos t) = -2 \sin t(2 \cos t + 1)$ であるから

t	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\sin t$	0	+	+	+	0	-	-	-	0
$2 \cos t + 1$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$x'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$x(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leq t < 2\pi$ の範囲で

$\sin t = 0$ を解くと, $t = 0, \pi$

$2 \cos t + 1 = 0$ を解くと, $t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

よって増減表は左図のようになる。

— 解答例 —

$$y'(t) = \cos 2t \cdot 2 = 2 \cos 2t \text{ であるから}$$

$0 \leq t < 2\pi$ の範囲で

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π
$y'(t)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$y(t)$		↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

$\cos 2t = 0$ を解くと,

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

よって増減表は

左図のようになる。

$$t = 0 \text{ のとき, } x(0) = 2 \cos 0 + \cos 0 = 3,$$

$$y(0) = \sin 0 = 0$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ のとき, } x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cos \frac{2}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{3}{2}, \quad y\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 \cos \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{2}\pi = -\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin \frac{3}{2}\pi = -1$$

$$t = \pi \text{ のとき, } x(\pi) = 2 \cos \pi + \cos 2\pi = -1,$$

$$y(\pi) = \sin 2\pi = 0$$

$$t = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2 \cos \frac{5}{4}\pi + \cos \frac{5}{2}\pi = -\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin \frac{5}{2}\pi = 1$$

$$t = \frac{4}{3}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 2 \cos \frac{4}{3}\pi + \cos \frac{8}{3}\pi = -\frac{3}{2}, \quad y\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \sin \frac{8}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{7}{4}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 2 \cos \frac{7}{4}\pi + \cos \frac{7}{2}\pi = -\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \sin \frac{7}{2}\pi = -1$$

$$t = 2\pi \text{ のとき, } x(2\pi) = 2 \cos 2\pi + \cos 4\pi = 3,$$

$$y(2\pi) = \sin 4\pi = 0$$

増減表を書くと以下のようになる。

ただし, 矢印の向きはその区間における点 P の速度ベクトルの向きである。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$x(t)$	3	←	$\sqrt{2}$	←	$-\frac{3}{2}$	→	$-\sqrt{2}$	→	-1
$y(t)$	0	↑	1	↓	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↓	-1	↑	0
$(x(t), y(t))$	(3, 0)	↖	$(\sqrt{2}, 1)$	↙	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↘	$(-\sqrt{2}, -1)$	↗	$(-1, 0)$

t	π	...	$\frac{5}{4}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	$\frac{7}{4}\pi$	...	2π
$x(t)$	-1	←	$-\sqrt{2}$	←	$-\frac{3}{2}$	→	$\sqrt{2}$	→	3
$y(t)$	0	↑	1	↓	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↓	-1	↑	0
$(x(t), y(t))$	$(-1, 0)$	↖	$(-\sqrt{2}, 1)$	↙	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↘	$(\sqrt{2}, -1)$	↗	(3, 0)

— 解答例 —

$$x(2\pi - t) = 2 \cos(2\pi - t) + \cos\{2(2\pi - t)\} = 2 \cos(-t) + \cos(4\pi - 2t)$$

$$= 2 \cos t + \cos(-2t) = 2 \cos t + \cos 2t = x(t)$$

$$y(2\pi - t) = \sin\{2(2\pi - t)\} = \sin(4\pi - 2t) = \sin(-2t) = -\sin 2t = -y(t)$$

$x(2\pi - t) = x(t)$ なので t のときと $2\pi - t$ のときは x 座標は等しい。

$y(2\pi - t) = -y(t)$ なので t のときと $2\pi - t$ のときは y 座標の絶対値が等しい。

すなわち, $0 \leq t \leq \pi$ の範囲の曲線と $\pi \leq t \leq 2\pi$ の範囲の曲線が x 軸に関して対称である。

よって x 軸上の点で P が 2 回以上通過する可能性があるので x 軸との交点を求める。

$$y = 0 \text{ より, } y = \sin 2t = 0 \text{ を } 0 \leq t < 2\pi \text{ の範囲で解くと } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

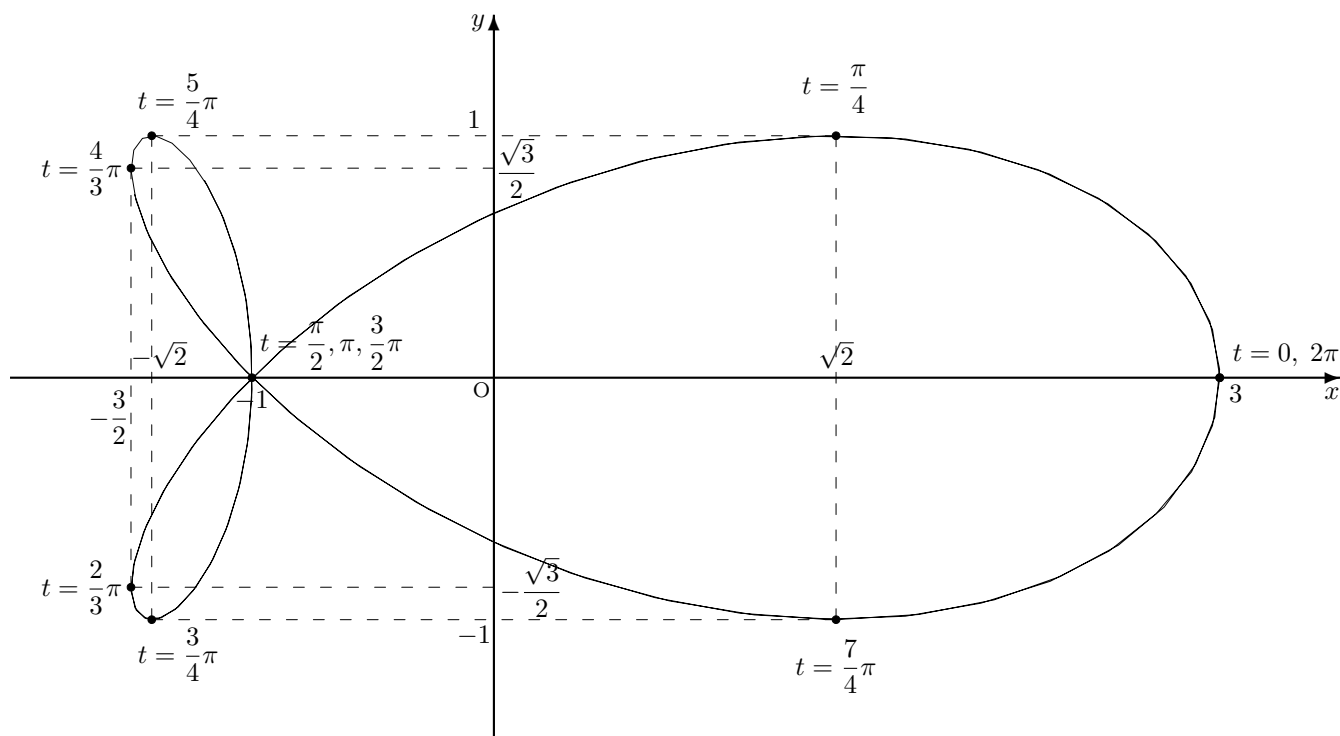
$$t = 0 \text{ のとき, 増減表より } (x(0), y(0)) = (3, 0)$$

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0 \quad \therefore \left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1, 0)$$

$$t = \pi \text{ のとき, 増減表より } (x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0)$$

$$t = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき, } x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cos \frac{3}{2}\pi + \cos 3\pi = -1, \quad y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin 3\pi = 0 \quad \therefore \left(x\left(\frac{3}{2}\pi\right), y\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = (-1, 0)$$

以上より, 点 P の通過する曲線のグラフを描く。



よって, 点 P が 2 回以上通過する点は $(-1, 0)$ のみであることが示された。(q.e.d.)

— 解答例 —

$t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ のときに $(-1, 0)$ を通過するので

$x'(t) = -2(\sin t + \sin 2t), y'(t) = 2 \cos 2t$ より,

$t = \frac{\pi}{2}$ のとき, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi) = -2, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \pi = -2$

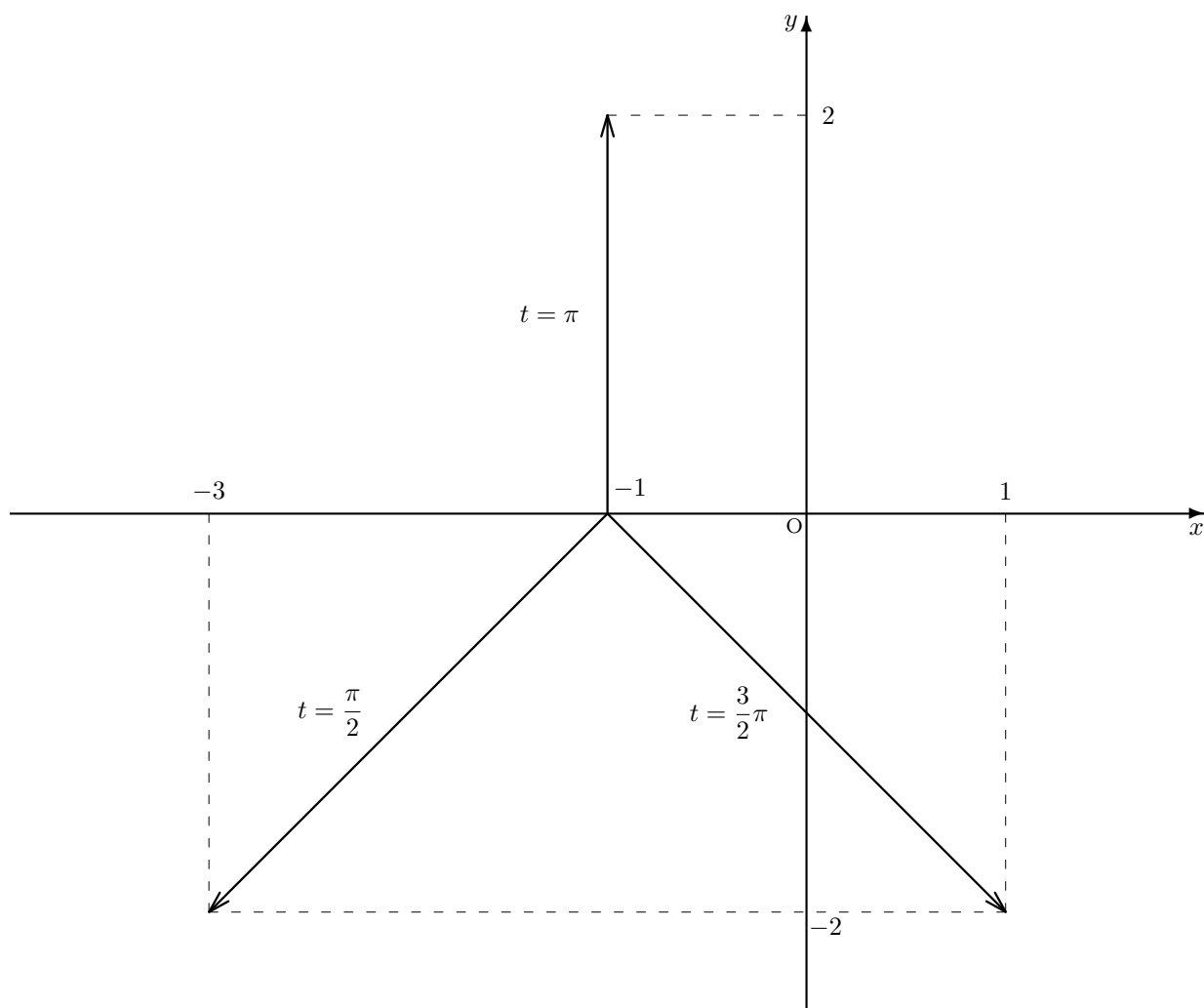
$t = \pi$ のとき, $x'(\pi) = -2(\sin \pi + \sin 2\pi) = 0, y'(\pi) = 2 \cos 2\pi = 2$

$t = \frac{3}{2}\pi$ のとき, $x'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2(\sin \frac{3}{2}\pi + \sin 3\pi) = 2, y'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cos 3\pi = -2$

まとめると

$$(x'(t), y'(t)) = \begin{cases} (-2, -2) & (t = \frac{\pi}{2}) \\ (0, 2) & (t = \pi) \\ (2, -2) & (t = \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

である。これを図示すると以下の図のようになる。



//