減衰曲線 $y=e^{-x}\sin x$

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ の $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$（$n$ は自然数）の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{-x}\sin x dx$ を求めよ。

(2) $y=e^{-x}\sin x$ のグラフを $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲でかけ。

(3) S_n を求めよ。

(4) 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。

—解答例—

(1)
$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x dx &= (-e^{-x})\sin x - \int(-e^{-x})\cos x dx = -e^{x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx \\ &= -e^{-x}\sin x + \left\{(-e^{x})\cos x - \int(-e^{-x})(-\sin x)dx\right\} \\ &= -e^{-x}\sin x - e^{x}\cos x - \int e^{-x}\sin x dx = -e^{-x}(\sin x+\cos x) - \int e^{-x}\sin x dx\end{aligned}$$

$\therefore \displaystyle\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ （C は積分定数） //

(別解)

$$\begin{array}{rrl} & (e^{-x}\sin x)' = & -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ +) & (e^{-x}\cos x)' = & -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \\ \hline & (e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x)' = & -2e^{-x}\sin x \end{array}$$

これより，$e^{-x}\sin x = \left\{-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'$ であるから

$$\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad //$$

(2) $y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

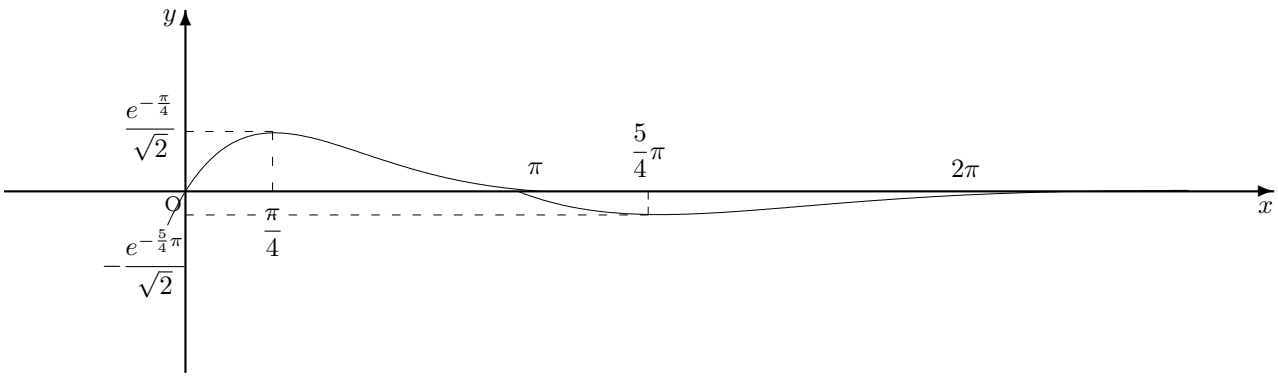
$y'=0$ となる x は $e^{-x}>0$ より $-\sin x+\cos x=0$ すなわち $\sin x=\cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

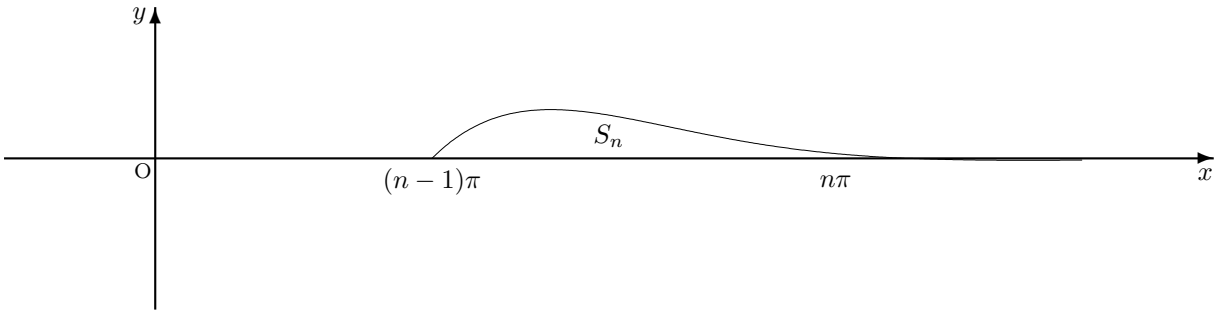
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0

x 軸との交点は $y=0$ のとき $e^{-x}\sin x=0$
$e^{-x}>0$ より $\sin x=0$
$0 \leqq x \leqq 2\pi$ なので $x=0,\ \pi,\ 2\pi$
で x 軸と交わる。

増減表より



—解答例—



(point 1)　$\sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n$ で整理していく

(point 2)　$|\,(-1)^n\,| = |\,(-1)^{(n-1)}\,| = 1$ で絶対値が消える。

(3)　$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\,e^{-x}\sin x\,|\,dx = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}\sin x dx\right|$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right| \qquad \leftarrow (1)\text{ の結果を使う}$$

$$= \left|\left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(\sin n\pi + \cos n\pi)\right\} - \left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(\sin(n-1)\pi + \cos(n-1)\pi)\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{-\frac{1}{2}e^{-n\pi}(-1)^n\right\} - \left\{-\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(-1)^{(n-1)}\right\}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}e^{-n\pi}(-1)^{(n-1)} + \frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(-1)^{(n-1)}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right)(-1)^{(n-1)}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right)\left|(-1)^{(n-1)}\right| = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right) \ /\!/$$

(point 3)　S_n の式を等比数列の基本形に変形する。(ar^{n-1} の形にする。)

(point 4)　公比の絶対値が 1 より小さいときに収束することを確認し，$\dfrac{a}{1-r}$ の公式で和を求める。

(4)　$$S_n = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-n\pi+\pi-\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-(n-1)\pi}\cdot e^{-\pi} + e^{-(n-1)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)e^{-(n-1)\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\pi}+1\right)(e^{-\pi})^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+e^\pi}{e^\pi}\right)\left(\frac{1}{e^\pi}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{e^\pi+1}{2e^\pi}\left(\frac{1}{e^\pi}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ は初項 $\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}$，公比 $\dfrac{1}{e^\pi}$ の無限等比級数である。

公比について $0 < \dfrac{1}{e^\pi} < 1$ より収束し，その和は

$$\frac{\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}}{1-\dfrac{1}{e^\pi}} = \frac{\dfrac{e^\pi+1}{2e^\pi}}{\dfrac{e^\pi-1}{e^\pi}} = \frac{e^\pi+1}{2(e^\pi-1)}$$ である。　$\displaystyle\therefore \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{e^\pi+1}{2(e^\pi-1)}$ //