大小関係

e^{π} と π^{e} の大小を比べよ。ただし，e は自然対数の底，π は円周率とする。

—解答例—

$0 < e < \pi$ であることにより，

関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $(0 < x)$ の増減について考える。

$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の絶対値の自然対数をとると

$\log |\, f(x) \,| = \log x^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} \log x$

両辺を x について微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\log x + 1}{x^2}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{-\log x + 1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-\log x + 1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(-\log x + 1)$$

$f'(x) = 0$ のとき，$-\log x + 1 = 0$ より $x = e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	$\pi^{\frac{1}{\pi}}$

増減表より，$\pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}}$ であるから，この両辺を $e\pi$ 乗すると

$$(\pi^{\frac{1}{\pi}})^{e\pi} < (e^{\frac{1}{e}})^{e\pi}$$

$\therefore$ $\pi^{e} < e^{\pi}$ である。 //