（新潟大学理系 2012 年）

自然数 n に対して，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

(proof)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = {}_nC_0\cdot 1^n + {}_nC_1\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + {}_nC_2\cdot 1^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3\cdot 1^{n-3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 + {}_nC_4\cdot 1^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \cdots + {}_nC_n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n^4}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n^n}$$

$$= 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-3}{n}\right)\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 1+1+\frac{1}{2!}\cdot 1+\frac{1}{3!}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{4!}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot 1}_{n-1\text{ 個}}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{2\times 2\times 2}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2\times 2\cdots 2\times 2}}_{n-1\text{ 個}}$$

$$= 1+\underbrace{1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{\text{初項 1，公比 }\frac{1}{2}\text{，項数 }n\text{ の等比数列の和}}$$

$$= 1+\frac{1\cdot\{1-(\frac{1}{2})^n\}}{1-\frac{1}{2}} = 1+2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1+2-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n < 3$$

以上より，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が証明された。$(q.e.d.)$