2012 年 ○○○○○○大学

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$ を満たす自然数 $p,\ q,\ r$ の組 $(p,\ q,\ r)$ は何通りあるか。

—解答例—

$p,\ q,\ r$ は自然数なので $p \geqq q \geqq r \geqq 1$ とすると，$\dfrac{1}{r} \geqq \dfrac{1}{q} \geqq \dfrac{1}{p}$ である。

これより $\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r} \geqq \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}=1$ であるから，$\dfrac{3}{r} \geqq 1 \quad \therefore 3 \geqq r$

すなわち $1 \leqq r \leqq 3$ であるから r のとりうる値は $r=1,\ 2,\ 3$ である。

(i) $r=1$ のとき

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{1}=1$ すなわち $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=0$

$p,\ q$ は自然数だから，この式を満たす $p,\ q$ は存在しないので不適。

(ii) $r=2$ のとき

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{2}=1$ すなわち $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{q} \geqq \dfrac{1}{p}$ だから $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q} \geqq \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{2}$ であるから $\dfrac{2}{q} \geqq \dfrac{1}{2} \quad \therefore 4 \geqq q$

すなわち $2 \leqq q \leqq 4$ であるから q のとりうる値は $q=2,\ 3,\ 4$ である。

$q=2$ のとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{p}=0$ なので不適

$q=3$ のとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}$ より，$p=6$

$q=4$ のとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$ より，$p=4$

(iii) $r=3$ のとき

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{3}=1$ すなわち $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{q} \geqq \dfrac{1}{p}$ だから $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q} \geqq \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2}{3}$ であるから $\dfrac{2}{q} \geqq \dfrac{2}{3} \quad \therefore 3 \geqq q$

すなわち $3 \leqq q \leqq 3$ であるから q のとりうる値は $q=3$ である。

$q=3$ のとき，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ より，$p=3$

$(i),(ii),(iii)$ より $p \geqq q \geqq r \geqq 1$ のとき

条件をみたす自然数 $p,\ q,\ r$ の組 $(p,\ q,\ r)$ は

$(p,\ q,\ r)=(6,\ 3,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$ なので

$p \geqq q \geqq r \geqq 1$ でないとき，それぞれの場合の数は,

$(p,\ q,\ r)=(6,\ 3,\ 2)$ について $3!=6$ 通り

$(p,\ q,\ r)=(4,\ 4,\ 2)$ について $\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}=3$ 通り

$(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 3)$ について 1 通り

以上より求める場合の数は $6+3+1=10$ 通りである。 //