

1 実数 a, b に対し平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (ax_n - by_n, bx_n + ay_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって定める。このとき、次の条件 (i), (ii) がともに成り立つような (a, b) をすべて求めよ。

(i) $P_0 = P_6$

(ii) $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ は相異なる。

2 a を実数とし、 $x > 0$ で定義された関数 $f(x), g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$g(x) = \sin x + ax$$

このとき、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが $x > 0$ において共有点がちょうど 3 つ持つような a をすべて求めよ。

3 A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインを B に渡す。

(ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば、コインが表、裏、表、表と出た場合、この時点で A は 1 点、B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1) A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

4 $\triangle ABC$ において $\angle BAC = 90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$ とする。 $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0}$$

を満たすとする。

(1) $\angle APB, \angle APC$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PA}|, |\overrightarrow{PB}|, |\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

5 次の命題 P を証明したい。

命題 P 次の条件 (a), (b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a) A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b) A を 10 進法で表したとき、1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1) y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3 + 3yx^2 < (x + y - 1)(x + y)(x + y + 1) < x^3 + (3y + 1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2) 命題 P を証明せよ。

6 座標空間において、 xy 平面内で不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を A $(-1, 1, 0)$, B $(1, 1, 0)$, C $(1, -1, 0)$, D $(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を、直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1 , 直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0 \leq t < 1$ を満たす実数 t に対し、平面 $x = t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

7 (30 点)

平行四辺形 ABCD において、辺 AB を 1 : 1 に内分する点を E、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を F、辺 CD を 3 : 1 に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし、線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき、比 AP : PQ を求めよ。

8 (35 点)

N を 2 以上の自然数とし、 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ を次の性質 (i)、(ii) をみたす数列とする。

- (i) $a_1 = 2^N - 3$,
(ii) $n = 1, 2, \dots$ に対して、
 a_n が偶数のとき $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}$.

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^M a_n \leq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ。

9 (35 点)

n を自然数とし、整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。このとき a と b は整数であり、さらにそれらをとともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

10 (35 点)

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

11 (30 点)

xy 平面内で、 y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1: y = \sqrt{3} \log(1 + x), \quad C_2: y = \sqrt{3} \log(1 - x)$$

とそれぞれ点 A、点 B で接しているとする。さらに $\triangle ABC$ は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C, C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

ただし、2 つの曲線がある点で接するとは、その点を共有し、さらにその点において共通の接線をもつことである。

12 (35 点)

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

- (1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき、石が座標 x の点にある確率を求めよ。
(2) 石が原点にあるとする。 n を自然数とし、 $2n$ 回硬貨を投げたとき、石が座標 $2n - 2$ の点にある確率を求めよ。

1
 $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ。

2
平面上の 4 点 O, A, B, C が

$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$

を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。

3
原点を O とする xy 平面上に、放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある。 C 上に 2 点

$P(p, 1 - p^2), Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を、 p と q の式で表せ。

(2) $q = p + 1$ であるとき S の最大値を求めよ。

(3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ。

4
 t を正の定数とする。原点を O とする空間内に、2 点 $A(2t, 2t, 0), B(0, 0, t)$ がある。また動点 P は

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$

を満たすように動く。 OP の最大値が 3 になるような t の値を求めよ。

5
サイコロを n 回投げ、 k 回目に出た目を a_k とする。また、 s_n を

$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k$ で定める。

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

- 6 正の実数 a, b, c に対して， O を原点とする座標空間に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある。 $AC=2$, $BC=3$ かつ $\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ。
- (1) $\sin \angle ACB$ の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。
- (2) a, b, c の値を求めよ。
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。また，原点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを求めよ。

- 7 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を
- $$f(\theta) = \frac{2}{3} \sin 3\theta - \sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta$$
- とおく。 $t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とするとき，次の問いに答えよ。
- (1) t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ を示せ。また， $\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。
- (3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。

- 8 $a > 0$ とする。 $x \geq 0$ における関数 $f(x) = e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y = f(x)$ について，次の問いに答えよ。
- (1) C 上の点 $P\left(\frac{1}{a}, f\left(\frac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また， P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。
- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{a}} f(x) dx$ を $t = \sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。
- (3) 曲線 C ，直線 $y = 1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また， $a > 0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

- 9 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。
- (1) 実数 x, y, u, v が， $xA + yE = uA + vE$ を満たすならば， $x = u, y = v$ であることを示せ。
- (2) $A = a_1 A + b_1 E, A^2 = a_2 A + b_2 E$ となる実数 a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して， $A^n = a_n A + b_n E$ となる実数 a_n, b_n を n を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に對して，実数 c_n, d_n が
- $$A + A^2 + A^3 + \dots + A^n = c_n A + d_n E$$
- を満たしているとき，極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n}$ を求めよ。

- 10 正の実数 a, b に対して, 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} ax + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq b \\ 0 \leq y \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a = \frac{3}{2}, b = 3$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $5x + 2y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。
- (2) $a = 1, b = 9$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $2x + y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。
- (3) $ab = 9$ であり, 点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くときの $2x + y$ の最大値が 16 であるとする。このとき, a, b の値を求めよ。

- 11 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は, 点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を, x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と, そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分 AQ の長さ L の最小値と, そのときの x の値を求めよ。

- 12 a を実数とし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & -4 \\ -\frac{3a}{4} & 2 \end{pmatrix}$ は

$A^3 = -a^2 E$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$ を求めよ。
- (3) $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2011} + A^{2012} + A^{2013}$ を求めよ。

- 13 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり, また平行でないとする。次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して, 不等式

$$0 < |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \leq (1+t)^2$$

が成立することを示せ。

- (2) $t \geq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \frac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a} + t\vec{b}|^2}$ とおき,

$f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき, 不等式

$$f(t) \geq \frac{2t^2}{(1+t)^2}$$

が成立することを示せ。

- (3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。

- 14 微分可能な関数 $f(x)$ が, すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし, さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

15 正の実数 a, b に対して, 次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$\begin{cases} ax + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq b \\ 0 \leq y \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a = \frac{3}{2}, b = 3$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $5x + 2y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。
- (2) $a = \frac{3}{2}, b = 6$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $3x + y$ の最大値と, そのときの x, y の値を求めよ。
- (3) $a = 5$ であるとする。点 $P(x, y)$ が領域 D 内を動くとき, $4x + y$ の最大値と, そのとき, x, y の値を求めよ。

16 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は, 点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を, x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と, そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分 AQ の長さ L の最小値と, そのときの x の値を求めよ。

17 正の整数 n に対して $a_n = \sqrt{1 + n^2} - n$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $\frac{1}{2n+1} < a_n < \frac{1}{2n}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 不等式 $a_n > a_{n+1}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $a_n < 0.03$ となる最小の正の整数 n を求めよ。

18 1 次関数 $f(x) = px + q$ に対して, x の係数 p と定数項 q を成分にもつベクトル (p, q) を $\vec{f}$ とする。つまり, $\vec{f} = (p, q)$ とする。

次の問いに答えよ。

- (1) 定積分

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (kx + l)(mx + n)dx$$

を求めよ。ただし, k, l, m, n は定数である。

- (2) 2 つの 1 次関数 $g(x)$ と $h(x)$ に対して, 等式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} g(x)h(x)dx = \vec{g} \cdot \vec{h}$$

が成り立つことを示せ。ただし, $\vec{g} \cdot \vec{h}$ はベクトル $\vec{g}, \vec{h}$ の内積を表す。

- (3) 等式

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x + 1)^2 dx \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{g(x)\}^2 dx = \left\{ \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2x + 1)g(x)dx \right\}^2$$

を満たし, $g(0) = -2$ であるような 1 次関数 $g(x)$ を求めよ。

19 次の問いに答えよ。

- (1) 2 つの循環小数 $a = 1.\dot{2}$, $b = 0.\dot{8}\dot{1}$ に対して, ab の値を求めよ。
- (2) a を定数とする。 xy 平面上の曲線 $y = \log_2 x$ と直線 $y = x + a$ は 2 つの共有点をもつ。
共有点の x 座標 x_1, x_2 が $x_2 = 4x_1$ を満たすように, a の値を定めよ。
- (3) xy 平面において, 曲線 $C : y = \frac{1}{x} (x > 0)$ と直線 $y = -x + \frac{10}{3}$ の 2 つの共有点を A, B とする。
曲線 C 上の点 P が PA=PB を満たすとき, $\triangle PAB$ の面積を求めよ。

20 $\triangle ABC$ は, $\angle AOB = 90^\circ$, $OA=OB=1$ を満たす。3 辺 OA, AB, BO を $t : (1-t)$ ($0 < t < 1$) に内分する点を, それぞれ C, D, E とし, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{CE}$ を t , $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。
- (2) $|\overrightarrow{OD}|^2$, $|\overrightarrow{CE}|^2$ を t の式で表せ。
- (3) $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{CE}$ を示せ。
- (4) $\triangle CDE$ の面積を $S(t)$ とする。
(i) $S(t) = \frac{3t^2 - 3t + 1}{2}$ を示せ。
(ii) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最小値を求めよ。

21 関数 $y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。 xy 平面上に 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と $C_2 : y = f^{-1}(x)$ がある。 次の問いに答えよ。

- (1) 2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (2) $a \geq 2$ とする。 曲線 C_1 上の点 A $\left(a, \frac{a^2}{2}\right)$ における接線を l_1 , 曲線 C_2 上の点 B $\left(\frac{a^2}{2}, a\right)$ における接線を l_2 とし, 2 直線 l_1, l_2 のなす角を $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。
(i) $\tan \theta$ を a の式で表せ。
(ii) $\lim_{a \rightarrow \infty} \sin^2 \theta$ を求めよ。

22 $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & q \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ が $AB = BJ$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。ただし, p, q は定数であり, 以下で用いる n は自然数である。

- (1) p, q の値を求めよ。
- (2) $J^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ。
- (3) $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$ を示せ。
- (4) 行列 A^n の表す一次変換により, xy 平面上の点 $(p, 1), (-2, q)$ が, それぞれ点 P_n, Q_n に移される。
原点を O とし, $\overrightarrow{OP_n}$ と $\overrightarrow{OQ_n}$ のなす角を θ_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n$ を求めよ。

23 2 次正方行列 A と 2 つの列ベクトル $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ があり,

$AX = 3Y$, $AY = X$ が成り立っているとする。下の問いに答えなさい。

- (1) A と A^2 を求めなさい。
- (2) 自然数 n について A^n を求めなさい。

24 c を正の定数とする。平面上の原点 $O(0, 0)$ および, 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$, $C(c, 0)$ について下の問いに答えなさい。

- (1) 点 P が線分 OC 上を動くとき, 3 点からの距離の 2 乗の和 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値とそのときの P の座標を求めなさい。
- (2) 点 Q が線分 OC 上を動くとき, 3 点からの距離の和 $AQ + BQ + CQ$ の最小値とそのときの Q の座標を求めなさい。

25 a を実数の定数倍とする。2 曲線 $y = x^2$ と $y = \frac{4}{x+a}$ がちょうど 2 つの共有点を持っているとき, 下の問いに答えなさい。

- (1) a の値を求めなさい。
- (2) 2 曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい。

26 2 チームが試合をする。1 回の試合で一方が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で, 引き分けは起こらないとする。先に 4 勝したチームを優勝とするとき, 下の問いに答えなさい。

- (1) 第 4 試合で優勝が決まる確率を求めなさい。
- (2) 第 7 試合で優勝が決まる確率を求めなさい。
- (3) 2 チームの勝ち数の差が, 優勝が決まるまで常に 1 以下である確率を求めなさい。

- 1
- 関数 $f(x) = x \sin x$ とおく。また，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。 $a > 0$ のとき，以下の問いに答えよ。
- (1)

$g(x)$ を α を用いて表せ。
- (2)

直線 $y = g(x)$ が原点を通るような最小の α を α_1 とし， $\alpha = \alpha_1$ のときの $g(x)$ を $h(x)$ とおく。 α_1 の値と $h(x)$ を求めよ。
- (3)

$0 \leq x \leq \alpha_1$ において $h(x) \leq f(x)$ であることを示せ。
- (4)

$0 \leq x \leq \alpha_1$ において直線 $y = h(x)$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれてできる図形の面積を求めよ。

- 2
- OA=OB=OC=1 かつ AB=BC=CA を満たす四面体 OABC がある。その体積を V ，AB= m とおき， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。
- (1)

内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ， $\vec{b} \cdot \vec{c}$ ， $\vec{b} \cdot \vec{a}$ を m を用いて表せ。
- (2)

$\triangle ABC$ の重心を G とおくとき，内積 $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AG}$ ， $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{BG}$ ， $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CG}$ の値を求めよ。
- (3)

V を m を用いて表せ。
- (4)

V が最大となる m の値を求めよ。

- 3
- さいころの目によって x 軸上を移動する点 Q を考える。さいころを 1 回投げて 5 または 6 の目が出れば Q は x 軸上を正の向きに 1 だけ移動し，その他の目が出れば Q は x 軸上を負の向きに 1 だけ移動する。最初， Q は x 軸上の原点にあり，さいころを n 回投げて Q が n 回移動したときの Q の x 座標を X_n とおく。整数 k に対し， $X_n = k$ となる確率を $p(n, k)$ と表すとき，以下の問いに答えよ。
- (1)

$p(3, 3)$ ， $p(3, 2)$ ， $p(3, 1)$ ， $p(3, 0)$ の値を求めよ。
- (2)

X_3 の期待値 E を求めよ。
- (3)

$p(n, 0)$ を n を用いて表せ。

- 4
- 数列 $\{r_n\}$ が次の関係式を満たしている。

$$r_1 = 0, \quad r_{n+1} = \frac{r_n + 2}{2r_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

- (1)

$r_{n+1} - \alpha = \beta \frac{r_n - \alpha}{2r_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たす定数 α, β をすべて求めよ。
- (2)

$\frac{r_{n+1} - p}{r_{n+1} - q} = k \frac{r_n - p}{r_n - q} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たす定数 p, q, k の組 (p, q, k) を 1 つ求めよ。ただし， $p \neq q$ とする。
- (3)

数列 $\{r_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4)

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ を求めよ。