

1 $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $x^5 + \frac{1}{x^5}$

2 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $A(0, 1)$, $B(6, 5)$, $C(-3, 8)$ を通るとき、次の問いに答えよ。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) この放物線の頂点の座標を求めよ。また、放物線と x 軸の交点の座標を求めよ。

3 三角形 ABC において、 $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$ であり、 $\angle ABC = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) 点 A から辺 BC に垂直に線を下ろして、その交点を H とするとき、 $\triangle AHC$ の面積を求めよ。

4 A さん、 B さん、 C さん、 D さん、 E さん、 F さんの 6 人を 3 つのグループに分ける。

ただし、一つのグループに必ず一人は入るとする。次の場合の数を求めよ。

(1) A さん、 B さん、 C さんを別々のグループに分ける分け方

(2) A さん、 B さん、 C さんが一つのグループにいる分け方

1

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3} \text{ より, } x + \frac{1}{x} = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4 //$$

$$(2) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52 //$$

$$(3) x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14 \text{ であるから,}$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 52 \cdot 14 - 4 = 724 //$$

2

(1) 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 A(0, 1), B(6, 5), C(-3, 8) を通るから

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 5 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c \\ 8 = a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) + c \end{cases} \quad \text{すなわち, } \begin{cases} c = 1 \\ 36a + 6b + c = 5 \\ 9a - 3b + c = 8 \end{cases} \quad c \text{ を消去して, } \begin{cases} 36a + 6a = 4 \\ 9a - 3b = 7 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと, $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = 1 //$

$$(2) y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 \text{ を平方完成すると, } y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - \frac{1}{3} \text{ ゆえに求める頂点の座標は } \left(2, -\frac{1}{3}\right) \text{ である。} //$$

放物線 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$ と x 軸の交点の x 座標は $\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 = 0$ より

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0, \quad x = 1, 3$$

したがって, 求める x 軸との交点の座標は (1, 0) と (3, 0) である。 //

3

$$(1) \triangle ABC \text{ について余弦定理より } \cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5} //$$

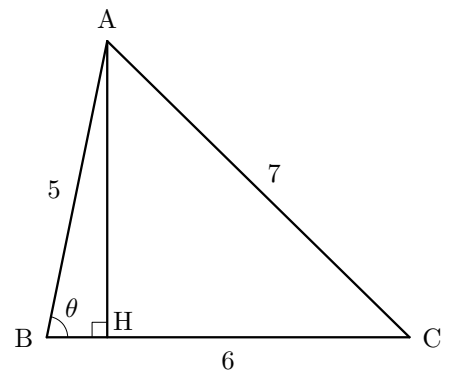
$$(2) 0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より, } \sin \theta > 0 \text{ だから, } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{求める面積は } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6} //$$

$$(3) \text{ 直角三角形 AHB について, } BH = AB \cos \theta = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

点 H は辺 BC を 1 : 5 に内分するので面積比についても

$$\triangle AHB : \triangle AHC = 1 : 5 \text{ となるから, } \triangle AHC = \frac{5}{6} \triangle ABC = \frac{5}{6} \cdot 6\sqrt{6} = 5\sqrt{6} //$$



4

(1) A さんのいるグループ, B さんのいるグループ, C さんのいるグループのそれぞれに残りの D さん E さん F さんは自由に入ることができる。D さんの入るグループが 3 通り, E さんの入るグループが 3 通り, F さんの入るグループが 3 通りであるから, 求める場合の数は, $3 \times 3 \times 3 = 27$ 通りである。 //

(2) A さん B さん C さんの 3 人が入っているグループに追加できる人数は 1 人や 0 人である。これで場合分けをする。

(i) A さん B さん C さんのいるグループに 1 人追加する場合

追加する 1 人の選び方は 3 通りである。残りの 2 人は 1 人ずつで 2 グループになればよいから 1 通りである。

よって $3 \times 1 = 3$ 通り。

(ii) A さん B さん C さんのいるグループに 0 人追加する (追加しない) 場合

残りの 3 人を 2 つのグループに分ける分け方は ${}_3C_2 = 3$ 通りである。(← 3 人から 2 人を選ぶ)

以上より, (i)+(ii) = $3 + 3 = 6$ 通りである。 //

(2) は樹形図を書いた方が早いです。