

センター試験 数学II・数学B 問題 (2013.1.20 実施)

第1問 (配点 30)

〔1〕 O を原点とする座標平面上に2点 $A(6, 0)$, $B(3, 3)$ をとり, 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P , $1:2$ に外分する点を Q とする。3点 O, P, Q を通る円を C とする。

(1) P の座標は (,) であり, Q の座標は (,) である。

(2) 円 C の方程式を次のように求めよう。線分 OP の中点を通り, OP に垂直な直線の方程式は

$$y = \text{カキ} x + \text{ク}$$

であり, 線分 PQ の中点を通り, PQ に垂直な直線の方程式は

$$y = x - \text{ケ}$$

である。

これらの2直線の交点が円 C の中心であることから, 円 C の方程式は

$$(x - \text{コ})^2 + (y + \text{サ})^2 = \text{シス}$$

であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち, 点 O と異なる交点を R とすると, R は線分 OA を : 1 に外分する。

〔2〕 連立方程式

$$\left(\begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2^x + 2^y + 2^z = \frac{35}{2} \\ \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} = \frac{49}{16} \end{array} \right.$$

を満たす実数 x, y, z を求めよう。ただし, x, y, z とする。

$X = 2^x, Y = 2^y, Z = 2^z$ とおくと, x, y, z により X, Y, Z である。() から, X, Y, Z の関係式

$$\left\{ \begin{array}{l} XYZ = \text{ソ} \\ X + Y + Z = \frac{35}{2} \\ XY + YZ + ZX = \frac{\text{タチ}}{\text{ツ}} \end{array} \right.$$

が得られる。

この関係式を利用すると, t の3次式 $(t - X)(t - Y)(t - Z)$ は

$$(t - X)(t - Y)(t - Z) = t^3 - (X + Y + Z)t^2 + (XY + YZ + ZX)t - XYZ$$

$$= t^3 - \frac{35}{2}t^2 + \frac{\text{タチ}}{\text{ツ}}t - \text{ソ}$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right) \left(t - \text{テ}\right) \left(t - \text{トナ}\right)$$

となる。したがって, X, Y, Z により

$$X = \frac{1}{2}, Y = \text{テ}, Z = \text{トナ}$$

となり, $x = \log_{\frac{1}{2}} X, y = \log_{\frac{1}{2}} Y, z = \log_{\frac{1}{2}} Z$ から

$$X = \text{ヌネ}, y = \text{ノ}, z = \text{ハ}$$

であることがわかる。

第2問 (配点 30)

a を正の実数として, x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3a^2x + a^3$$

とする。

関数 $y = f(x)$ は, $x =$ で極大値 $a^{\text{エ}}$ をとり, $x =$ で極小値 $a^{\text{キ}}$ をとる。

このとき, 2点

$$\left(\text{アイ}, \text{ウ} a^{\text{エ}} \right), \left(\text{オ}, \text{カ} a^{\text{キ}} \right)$$

と原点を通る放物線

$$y = \text{ク} x^2 - \text{ケ} a^{\text{コ}} x$$

を C とする。原点における C の接線 l の方程式は

$$y = \text{サシ} a^{\text{ス}} x$$

である。また, 原点を通り l に垂直な直線 m の方程式は

$$y = \frac{1}{\text{セ} a^{\text{ソ}}} x$$

である。

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線

$$y = -\text{ク} x^2 + \text{ケ} a^{\text{コ}} x$$

を D とする。 D と l で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \frac{\text{タチ}}{\text{ツ}} a^{\text{テ}}$$

である。

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は, 0 と $\frac{4a^{\text{ト}} + 1}{2a^{\text{チ}}}$ である。 C と m で囲まれた図形の面積を T とする。 $S = T$ と

なるのは $a^{\text{テ}} = \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$ のときであり, このとき, $S = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$ である。

第3問 (配点 20)

(1) 数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。

$$p_1 = 3, \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad \text{..... ①}$$

数列 $\{p_n\}$ の一般項と、初項から第 n 項までの和を求めてみよう。まず、① から

$$p_{n+1} - \frac{\text{ア}}{\text{イ}} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \right) \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

となるので、数列 $\{p_n\}$ の一般項は

$$p_n = \frac{1}{\text{ウ}} \cdot \frac{\text{エ}}{\text{カ}}^{n-2} + \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$$

である。したがって、自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^n p_k = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \left(1 - \frac{1}{\text{ケ}}^n \right) + \frac{\text{コ}}{\text{サ}}^n$$

である。

(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ は、初項から第3項が $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3$ 、であり、すべての自然数 n に対して

$$a_{n+3} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+2}} \quad \text{..... ②}$$

を満たすとする。また、数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を、自然数 n に対して、 $b_n = a_{2n-1}, c_n = a_{2n}$ で定める。数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めてみよう。まず、② から

$$a_4 = \frac{a_1 + a_2}{a_3} = \frac{\text{シ}}{\text{セ}}, \quad a_5 = 3, \quad a_6 = \frac{\text{ス}}{\text{セ}}, \quad a_7 = 3$$

である。したがって、 $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 3$ となるので

$$b_n = 3 \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad \text{..... ③}$$

と推定できる。

③ を示すためには、 $b_1 = 3$ からすべての自然数 n に対して

$$b_{n+1} = b_n \quad \text{..... ④}$$

であることを示せばよい。このことを「まず、 $n = 1$ のとき ④ が成り立つことを示し、次に、 $n = k$ のとき ④ が成り立つと仮定すると、 $n = k + 1$ のときも ④ が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法を ソ という。 ソ に当てはまるものを、次の ⑩ ~ ⑬ のうちから一つ選べ。

- ⑩ 組立除法 ⑪ 弧度法 ⑫ 数学的帰納法 ⑬ 背理法

[I] $n = 1$ のとき、 $b_1 = 3, b_2 = 3$ であることから ④ は成り立つ。

[II] $n = k$ のとき、④ が成り立つ、すなわち

$$b_{k+1} = b_k \quad \text{..... ⑤}$$

と仮定する。 $n = k + 1$ のとき、② の n に $2k$ を代入して得られる等式と、 $2k - 1$ を代入して得られる等式から

$$b_{k+2} = \frac{c_k + \frac{\text{タ}}{\text{チ}}^{k+1}}{\frac{\text{チ}}{\text{テ}}^{k+1}}, \quad c_{k+1} = \frac{\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}^{k+c_k}}{\frac{\text{テ}}{\text{ト}}^{k+1}}$$

となるので、 b_{k+2} は

$$b_{k+2} = \frac{(\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}^k + \frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}^{k+1}) \frac{\text{ニ}}{\text{ナ}}^{k+1}}{\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}^{k+c_k}}$$

と表される。したがって、⑤ により、 $b_{k+2} = b_{k+1}$ が成り立つので、④ は $n = k + 1$ のときにも成り立つ。

[I], [II] により、すべての自然数 n に対して ④ の成り立つことが証明された。したがって、③ が成り立つので、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 3$ である。

次に、② の n を $2n - 1$ に置き換えて得られる等式と ③ から

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

となり、 $c_1 = \frac{\text{ヌ}}{\text{セ}}$ であることと ① から、数列 $\{c_n\}$ の一般項は、(1) で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

第4問 (配点 20)

OA=5, OC=4, $\angle AOC = \theta$ である平行四辺形 OABC において, 線分 OA を 3:2 に内分する点を D とする。また, 点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし, $0 < \theta < \pi$ とする。

以下, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき, 実数 t を用いて $\overrightarrow{OE} = t\vec{c}$ と表す。

(1) t を $\cos \theta$ で表そう。

$$\overrightarrow{AE} = t\vec{c} - \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ウエ}} \cos \theta$$

となるので, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = \boxed{\text{オ}}$ により

$$t = \frac{\boxed{\text{カ}} (\boxed{\text{キ}} \cos \theta + 1)}{\boxed{\text{ク}} (\cos \theta + \boxed{\text{ケ}})} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるものとする。 θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし, 線分 OC は両端の点 O, C を含むものとする。以下, $r = \cos \theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから, $0 \leq t \leq 1$ である。 $-1 < r < 1$ なので, ①の右辺の $\cos \theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}} (r + \boxed{\text{ケ}})$ は正である。したがって, 条件 $0 \leq t \leq 1$ は

$$0 \leq \boxed{\text{カ}} (\boxed{\text{キ}} r + 1) \leq \boxed{\text{ク}} (r + \boxed{\text{ケ}}) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となる。

r についての不等式 ② を解くことにより, θ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \leq \theta \leq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \pi$$

であることがわかる。

(3) $\cos \theta = -\frac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし, 三角形 BEF の面積を求めよう。① により, $t = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$

となり

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \vec{c}$$

となる。したがって, 点 F は線分 AE を 1 : $\boxed{\text{テ}}$ に内分する。このことと, 平行四辺形 OABC の面積は

$$\frac{\boxed{\text{トナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ であることから, 三角形 BEF の面積は } \frac{\boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}} \text{ である。}$$