

1 $a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ のとき, 次の値を求めよ。

- (1) $a + b$
- (2) $a^2 + b^2$
- (3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

2 $AB = AC = 4, \angle BAC = 90^\circ$ の三角形において, 辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上に点 Q があり, $AP = AQ = x$ ($0 < x < 4$) とおく。また, 辺 BC の中点を M とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQM$ の面積 y を x を用いて表せ。
- (2) $0 < x < 4$ の範囲で (1) で求めた関数のグラフをかけ。また, $\triangle PQM$ の面積の最大値を求めよ。

3 四面体 $ABCD$ があり, $AB = AC = 1, AD = 2, \angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle BDC = \theta$ としたとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\triangle BDC$ の面積を求めよ。
- (3) A から $\triangle BDC$ に垂直に線を下ろして, その交点を H とするとき, AH の長さを求めよ。

4 さいころを 5 回振ったとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 奇数がちょうど 3 回出るときの確率を求めよ。
- (2) 奇数が 3 回以上出るときの確率を求めよ。

1

$$(1) a = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \text{ より}$$

$$a + b = \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{5} //$$

$$(2) ab = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \text{ であるから } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 //$$

$$(3) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 //$$

2

$$(1) AP = AQ = x \text{ なので } BP = CQ = 4 - x, \text{ また, } BM = CM = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8, \quad \triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{x^2}{2}$$

$$\triangle BPM = \triangle CQM = \frac{1}{2} \cdot (4 - x) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 4 - x$$

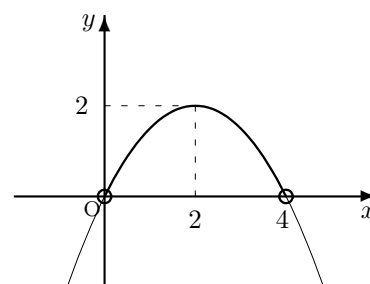
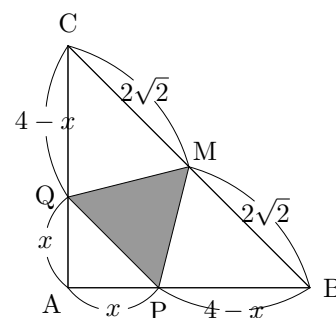
$$\triangle PQM = \triangle ABC - (\triangle APQ + \triangle BPM + \triangle CQM) \text{ であるから}$$

$$y = 8 - \left\{ \frac{x^2}{2} + (4 - x) + (4 - x) \right\}, \text{ すなわち } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x //$$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

よってグラフは右図のようになる。

グラフより $x = 2$ のときに最大値 2 をとる。 //



3

$$(1) \text{ 三平方の定理より } BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad CD = DB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$\triangle BCD$ において余弦定理を用いて

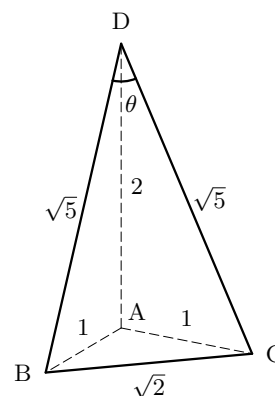
$$\cos \theta = \frac{CD^2 + DB^2 - BC^2}{2 \cdot CD \cdot DB} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5} //$$

$$(2) 0 < \theta < 180^\circ \text{ より } \sin \theta > 0 \text{ なので } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{よって求める面積は } \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{2} //$$

$$(3) \triangle BCD \perp AH \text{ であるから 四面体 } ABCD \text{ の体積} = \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH$$

$$\text{よって } \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot AH \quad \therefore AH = \frac{2}{3} //$$



4

$$(1) {}_5C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} //$$

$$(2) {}_5C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^5 = (10 + 5 + 1) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} //$$